

Métodos matemáticos en microeconomía. Una introducción

Ignacio Monzón
30-04-03

A Introducción

En la teoría microeconómica, se hace uso frecuente de ciertas estructuras lógicas y matemáticas. Esta clase¹ posee como objetivo enhebrar conceptos desarrollados anteriormente en cursos de Álgebra y Análisis, de forma tal que puedan ser utilizados posteriormente a lo largo del curso. Por supuesto, no se realiza un tratamiento profundo de estos conceptos. Luego de ciertas definiciones de notación, se trata con curvas de nivel de una función, con transformaciones monótonas de una función y con el caso particular de una función homogénea. Más adelante, se analiza el problema de optimización en microeconomía, con el objeto de encontrar las condiciones de regularidad en las que posee una única solución, caracterizada exclusivamente por las condiciones de primer orden.

B Algunas definiciones

B.1 Notación vectorial

Habitualmente, vamos a trabajar con funciones con más de una variable (usualmente dos). Así, el dominio estará definido en un espacio n -dimensional, por ejemplo $X \subset \mathbb{R}^n$. En tal caso, los elementos del dominio serán vectores con n elementos:

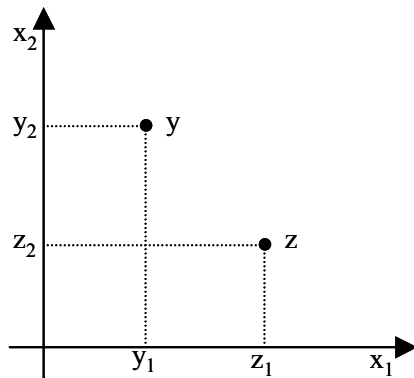
$$\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$$

$$y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$$

$$z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$$

En estos vectores, cada componente representa la cantidad consumida o utilizada de un bien o factor. Así, por ejemplo, el primer componente puede ser la cantidad utilizada de trabajo, el segundo la de tierra y un tercero la de capital.

Por supuesto, estos vectores pueden representarse de la siguiente forma.



Por otro lado, muchas veces se simplificará la notación de las funciones, especialmente cuando sean de n variables. Por ejemplo, si se desea notar que f depende de n factores, se indica: $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Para evitar repeticiones en la escritura, se dirá: $z = f(\cdot)$

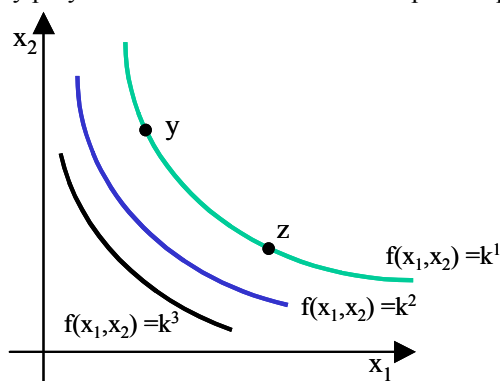
¹ Estas notas están diseñadas con el fin de facilitar el seguimiento de las clases y la lectura de la bibliografía. Su carácter es absolutamente provisorio, por lo que se agradecen comentarios, sugerencias, y, por sobre todo, correcciones a: imonzon@udes.edu.ar

B.2 Curvas de nivel

Una curva de nivel k de la función $f(x)$ muestra todos los puntos del dominio que tienen como imagen a k :

$$CN_k^f = \{x \in \mathbb{R}_+^n : f(x) = k\}$$

Una función $f(x)$ determina una superficie. Ahora bien, puede tomarse a la función sólo en cierto nivel, k y proyectar hacia el dominio sólo los puntos que se encuentren en él. Se obtuvo así una curva de nivel.



B.3 Pendiente de una curva de nivel

A lo largo de estas curvas, el nivel (la altura) de la función se mantiene constante, lo que se altera es la cantidad de los factores. Por tanto, la pendiente de la curva de nivel muestra el aumento de la cantidad de un factor y la disminución del otro necesarios para que el nivel se mantenga constante.

La forma más sencilla de obtener una expresión de la pendiente de una curva de nivel es diferenciando totalmente $f(x_1, x_2) = k$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(\cdot)}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f(\cdot)}{\partial x_2} dx_2 &= 0 \quad \Rightarrow \\ \frac{\partial f(\cdot)}{\partial x_1} dx_1 &= -\frac{\partial f(\cdot)}{\partial x_2} dx_2 \quad \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{\frac{\partial f(\cdot)}{\partial x_1}}{\frac{\partial f(\cdot)}{\partial x_2}} \quad (1)$$

B.4 Transformaciones monótonas

Transformación de la función $f : v(x) = g(f(x))$

$g(x)$ es una **función estrictamente creciente** si:

$$a > b \Rightarrow g(a) > g(b) \quad (2)$$

Si $g(x)$ es una función estrictamente creciente entonces $v(x) = g(f(x))$ es una transformación monótona estrictamente creciente de $f(x)$:

$$f(a) > f(b) \Rightarrow g[f(a)] > g[f(b)]$$

Ejercicio 1.

Probar que si se cumple (2), entonces: $a \geq b \Leftrightarrow g(a) \geq g(b)$

Ejemplo.

$f(x_1, x_2) = x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{2}}$ es la función que deseamos transformar. $g(x) = x^2$ es la función que utilizaremos para transformar $f(\cdot)$. Para comenzar, nos preguntamos si $g(\cdot)$ es estrictamente creciente.

$$a > b \Rightarrow g(a) > g(b)$$

$$a > b \Rightarrow a^2 > b^2$$

Es verdadero siempre que $a, b > 0$

En consecuencia, transformamos la función...

$$v(x_1, x_2) = g(f(x_1, x_2)) = g\left(x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{2}}\right) = \left(x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{2}}\right)^2 = x_1^{\frac{2}{2}} x_2^{\frac{2}{2}} = x_1 x_2$$

Como $g(x)$ es estrictamente creciente, entonces $v(x_1, x_2)$ también lo es (siempre que $f(\cdot)$ tome valores positivos).

C Curvas de nivel de una transformación monótona

Tomemos la función $f(x)$ y apliquémosle la transformación $v(x) = g(f(x))$. Vamos a probar que **las curvas de nivel de $f(x)$ y de $v(x)$ son idénticas**. ¿Cómo? En dos pasos. Primero demostraremos que todo elemento del dominio que pertenezca a una curva de nivel determinada de $f(x)$ también pertenecerá a una determinada de $v(x)$. Luego demostraremos que puntos que pertenecen a distintas curvas de nivel de $f(x)$ también lo hacen en $v(x)$.

$$1. \quad x, y \in CN_{k_1}^f \implies x, y \in CN_{l_1}^g$$

Como x e y pertenecen a la misma curva de indiferencia de $f(x) \implies$

$$x, y \in CN_{k_1}^f \iff f(x) = f(y) = k_1$$

$$f(x) = f(y) \implies g(f(x)) = g(f(y)) \quad \text{Recordemos que } f(x) \wedge f(y) \text{ son sólo números.}$$

$$g(f(x)) = g(f(y)) = l_1 \implies x, y \in CN_{l_1}^g$$

QED

$$2. \quad x \in CN_{k_1}^f \wedge y \in CN_{k_2}^f; k_1 \neq k_2 \implies x \in CN_{l_1}^g \wedge y \in CN_{l_2}^g; l_1 \neq l_2$$

$$f(x) \neq f(y) \implies f(x) > f(y) \vee f(x) < f(y)$$

$$\text{Si } f(x) > f(y) \implies g(f(x)) > g(f(y)) \quad \text{Porque } g(x) \text{ es estrictamente creciente.}$$

$$g(f(x)) = l_1 > g(f(y)) = l_2 \implies x \in CN_{l_1}^g \wedge y \in CN_{l_2}^g; l_1 \neq l_2 \quad \text{Puede probarse lo mismo para el caso en que } f(x) < f(y)$$

QED

De esta forma, ambas curvas de nivel son idénticas, aunque pueden referir a niveles diferentes.

C.1 Ejemplo. La función Cobb-Douglas.

$$f(x_1, x_2) = x_1^\alpha x_2^\beta$$

$$g(x) = x^2$$

$$v(x_1, x_2) = g(f(x_1, x_2)) = g\left(x_1^\alpha x_2^\beta\right) = \left(x_1^\alpha x_2^\beta\right)^2 = x_1^{2\alpha} x_2^{2\beta}$$

$$v(x_1, x_2) = x_1^{2\alpha} x_2^{2\beta}$$

Obtenemos las curvas de nivel de $f(x)$.

$$f(x_1, x_2) = x_1^\alpha x_2^\beta = k$$

$$x_2^\beta = \frac{k}{x_1^\alpha}$$

$$x_2 = \left(\frac{k}{x_1^\alpha}\right)^{\frac{1}{\beta}}$$

$$x_2 = k^{\frac{1}{\beta}} x_1^{-\frac{\alpha}{\beta}} \quad (3)$$

Obtenemos las curvas de nivel de $v(x)$.

$$v(x_1, x_2) = x_1^{2\alpha} x_2^{2\beta} = l$$

$$x_2^{2\beta} = \frac{l}{x_1^{2\alpha}}$$

$$x_2 = \left(\frac{l}{x_1^{2\alpha}}\right)^{\frac{1}{2\beta}}$$

$$x_2 = l^{\frac{1}{2\beta}} x_1^{-\frac{\alpha}{\beta}} \quad (4)$$

De las expresiones (3) y (4), notamos que poseen la misma fórmula, con distinto cartelito, de hecho, si definimos a $l = k^2$

$$x_2 = (k^2)^{\frac{1}{2\beta}} x_1^{-\frac{\alpha}{\beta}}$$

$$x_2 = k^{\frac{2}{2\beta}} x_1^{-\frac{\alpha}{\beta}}$$

$$x_2 = k^{\frac{1}{\beta}} x_1^{-\frac{\alpha}{\beta}}$$

El gráfico de las curvas de nivel k para $f(x)$ será idéntico al gráfico de las curvas de nivel de k^2 para $v(x)$.

D Homogeneidad

Definición: $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ es homogénea de grado $r \iff \forall t > 0 :$

$$f(tx_1, tx_2, \dots, tx_n) = t^r f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

En consecuencia, si $f(\cdot)$ es homogénea de grado r , puedo llamar $t = \frac{1}{x_1} \Rightarrow$

$$f\left(1, \frac{x_2}{x_1}, \dots, \frac{x_n}{x_1}\right) = x_1^{-r} f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (\text{siempre que } x_1 > 0)$$

Podemos reescribir...

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^r f\left(1, \frac{x_2}{x_1}, \dots, \frac{x_n}{x_1}\right) \quad (\text{siempre que } x_1 > 0)$$

Así, por ejemplo, si una función es homogénea de grado 0 ($r = 0$):

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f\left(1, \frac{x_2}{x_1}, \dots, \frac{x_n}{x_1}\right)$$

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = g\left(\frac{x_2}{x_1}, \dots, \frac{x_n}{x_1}\right)$$

¡Lo relevante en este caso es la relación entre variables, no sus valores absolutos!

D.1 Teorema

Si $f(\cdot)$ es homogénea de grado $r \Rightarrow \frac{\partial f(\cdot)}{\partial x_i}$ es homogénea de grado $r-1$.

Ejercicio 2. Probar que:

$$\frac{\partial f(tx_1, tx_2, \dots, tx_n)}{\partial tx_i} = t^{r-1} \frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_i}$$

D.2 Curvas de nivel de funciones homogéneas

Tomemos dos puntos, x e y , tales que $f(x) = f(y)$.

$$f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(y) = f(y_1, y_2, \dots, y_n)$$

$$f(tx_1, tx_2, \dots, tx_n) = t^r f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad \text{porque } f(\cdot) \text{ es homogénea.}$$

$$\frac{f(tx_1, tx_2, \dots, tx_n)}{t^r} = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (5)$$

Del mismo modo,

$$\frac{f(ty_1, ty_2, \dots, ty_n)}{t^r} = f(y_1, y_2, \dots, y_n) \quad (6)$$

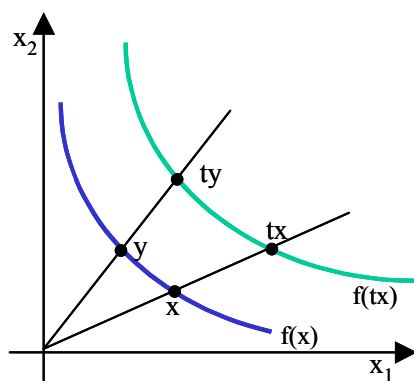
$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(y_1, y_2, \dots, y_n)$$

Entonces, de (5) y (6),

$$\frac{f(tx_1, tx_2, \dots, tx_n)}{t^r} = \frac{f(ty_1, ty_2, \dots, ty_n)}{t^r}$$

$$f(tx_1, tx_2, \dots, tx_n) = f(ty_1, ty_2, \dots, ty_n)$$

Gráficamente, las curvas de nivel son desplazamientos unas de otras.



D.3 Pendiente de C. de N. de funciones homogéneas

Recordamos de (1) que la pendiente de una curva de nivel es:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}}{\frac{\partial f(x)}{\partial x_2}} \quad \text{en el punto } x.$$

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{\frac{\partial f(tx)}{\partial x_1}}{\frac{\partial f(tx)}{\partial x_2}} \quad \text{en el punto } tx.$$

Ahora, como la derivada parcial primera de una función homogénea de grado r también es homogénea (de grado $r - 1$), entonces:

$$\frac{\partial f(tx)}{\partial x_1} = t^{r-1} \frac{\partial f(x)}{\partial x_1}$$

Del mismo modo,

$$\frac{\partial f(tx)}{\partial x_2} = t^{r-1} \frac{\partial f(x)}{\partial x_2}$$

Su cociente, entonces, es:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{t^{r-1} \frac{\partial f(x)}{\partial x_1}}{t^{r-1} \frac{\partial f(x)}{\partial x_2}} = -\frac{\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}}{\frac{\partial f(x)}{\partial x_2}}$$

De esta forma, a lo largo de cada rayo que sale del origen, la pendiente de la curva de nivel es la misma.

D.4 Funciones homotéticas

Si $f(x)$ es homogénea y $h(x)$ es una transformación monótona estrictamente creciente de $f(x)$ entonces se denomina a $h(x)$ homotética.

Dado lo explicado anteriormente, las funciones homotéticas poseen las mismas curvas de nivel que la función original. Como ésta es homogénea, la pendiente es constante a lo largo de rayos desde el origen.

D.5 Ecuación de Euler

Si $f(x)$ es homogénea de grado r y diferenciable,

$$\sum_{i=1}^N \frac{\partial f(\cdot)}{\partial x_i} * x_i = r * f(\cdot)$$

Ejercicio 3. Probar Ecuación de Euler.

E Problemas de optimización

E.1 Introducción

Existe un individuo, que debe decidir qué consumir a lo largo del mes. Tiene muchas opciones: un poco de frutas, arreglos odontológicos, algunas salidas al cine, televisores, nafta, etc. Se pregunta qué elegir. Cada opción le da cierta satisfacción. Él quiere obtener la máxima satisfacción, por lo que elegiría consumir mucho de prácticamente todos los bienes. Pero tiene una limitación: su ingreso es finito, y los bienes tienen

precio: ¿qué elige entonces?

A lo largo del curso, veremos que se suceden planteos de este tipo. Estos planteos serán traducidos a lenguaje matemático, con el fin de aprovechar las herramientas matemáticas para facilitar el análisis.

Habitualmente habrá una función objetivo, que en el caso comentado será la utilidad. Ésta dependerá de muchos factores, las cantidades consumidas de cada bien:

$$U = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Asimismo, se enfrentará a la limitación de su ingreso y los precios:

$$p_1x_1 + p_2x_2 + \dots + p_nx_n = m$$

De esta forma, los problemas a analizar tendrán la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \max U &= (\cdot) \\ \text{s.a. } g(\cdot) &= c \end{aligned} \quad (7)$$

Nos interesará saber cuál es la solución, pero antes que eso, queremos saber:

1. si existe alguna solución
2. si ésta es única
3. cómo reconocerla

E.2 Teorema de Weierstrass

Un conjunto es compacto si es cerrado y acotado (**en castellano: no tiene agujeros, tiene límites y los incluye**)

Sea $A \subset \mathbb{R}^n \wedge f : A \rightarrow \mathbb{R}$

Si A es compacto y f es continua $\implies f$ alcanza un máximo y un mínimo en A .

E.3 El método de Lagrange

Así, con el teorema de Weierstrass debería ser suficiente, ya que provee las condiciones que debe satisfacer el problema para tener solución. Pero los economistas desean simplificar su vida, por lo que buscan que la solución sea única y, por sobre todo, fácil de hallar.

Volviendo al problema (7). Puede construirse un lagrangiano:

$$Z = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \lambda(c - g(x_1, x_2, \dots, x_n))$$

E.3.1 Condiciones de primer orden

$$Z_1 = f_1 - \lambda g_1 = 0$$

$$Z_1 = f_1 - \lambda g_2 = 0$$

.....

$$Z_n = f_n - \lambda g_n = 0$$

$$Z_\lambda = c - g(\cdot) = 0$$

En síntesis, las CPO (o FOC) son:

1. $\frac{f_i}{g_i} = \lambda = \frac{f_j}{g_j} \forall i, j$
2. $g(\cdot) = c$

E.3.2 Condiciones de segundo orden: el hessiano orlado

$$|\overline{H}| = \begin{vmatrix} 0 & g_1 & g_2 & \dots & g_n \\ g_1 & Z_{11} & Z_{12} & \dots & Z_{1n} \\ g_2 & Z_{21} & Z_{22} & \dots & Z_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_n & Z_{n1} & Z_{n2} & \dots & Z_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} \overline{H}_2 &> 0 \\ \overline{H}_3 &< 0 \\ \overline{H}_4 &> 0 \\ \text{etcétera} \end{aligned}$$

Ejercicio 4. Un ser obtiene utilidad de dos bienes. Su función de utilidad es $U = x_1^{\frac{1}{3}} x_2^{\frac{2}{3}}$. Tiene \$80 para dedicar al bien 1, de precio \$10 y al bien 2, de precio \$20. ¿Qué elige consumir? Grafique las curvas de nivel para $U = 125$ y $U = 25$.

E.4 Concavidad

Así, tenemos las condiciones de primero y segundo orden, conjuntamente suficientes para el descubrimiento de un máximo. Pero aún así los economistas no quedan conformes, desean que la determinación del máximo sea más sencilla aún. De hecho, quieren que saber en qué casos, sólo con observar las condiciones de primer orden alcanza para saber que se está ante un máximo.

En los casos en que no existe restricción, ¿qué debe suceder para que las CPO sean suficientes y necesarias? Debe suceder que sólo se cumplan en el punto en que es máximo, en otras palabras:

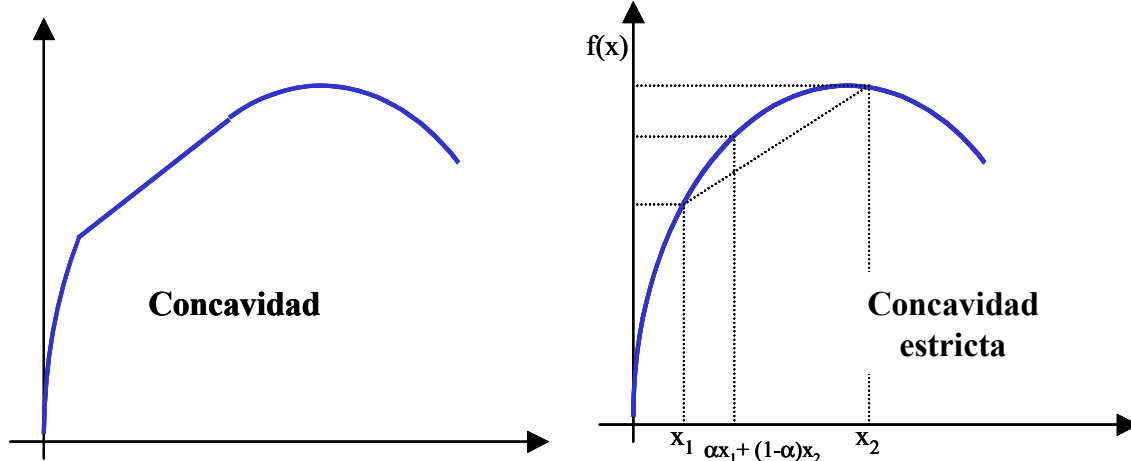
1. No tiene que haber mínimos.
2. No debe haber máximos locales.
3. No debe haber puntos de ensilladura.

Esto sucede cuando $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ es cóncava:

$$f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) \geq \alpha f(x_1) + (1 - \alpha)f(x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in A \wedge \forall \alpha \in [0, 1]$$

Concavidad estricta:

$$f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) > \alpha f(x_1) + (1 - \alpha)f(x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in A \wedge \forall \alpha \in (0, 1)$$



E.5 Cuasiconcavidad

Ahora bien, en los casos en que sí existen restricciones, las condiciones que debe cumplir la función objetivo para eximir al economista de mirar las condiciones de segundo orden son menos restrictivas.

E.5.1 Definición 1

$f : A \rightarrow \mathbb{R}$ es cuasicóncava si:

$$\{x \in A / f(x) \geq t\} \text{ es convexo}$$

E.5.2 Definición 2

$f : A \rightarrow \mathbb{R}$ es cuasicóncava si:

$$\forall x_1, x_2 \in A, \forall \alpha \in [0, 1], \text{ si } f(x_1) \geq t \wedge f(x_2) \geq t \implies f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) \geq t$$

E.5.3 Definición 3

$f : A \rightarrow \mathbb{R}$ es estrictamente cuasicóncava si:

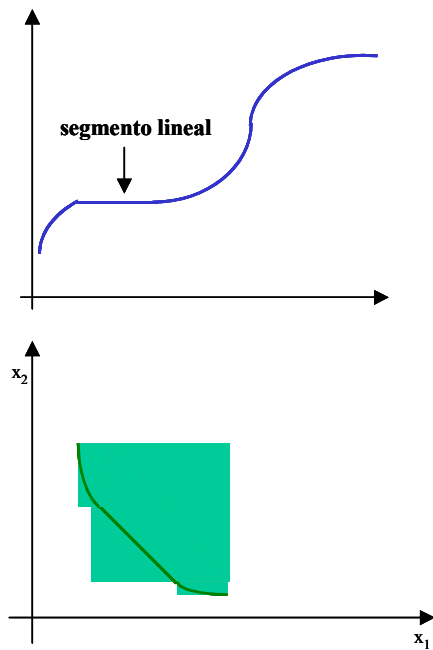
$$\forall x_1, x_2 \in A, \forall \alpha \in (0, 1), \text{ si } f(x_1) \geq t \wedge f(x_2) \geq t \implies f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) > t$$

E.5.4 Definición 4

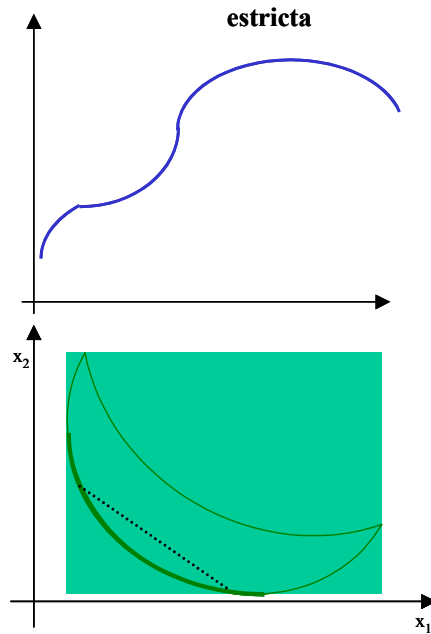
$f : A \rightarrow \mathbb{R}$ es estrictamente cuasicóncava si:

$$\forall x_1, x_2 \in A, \forall \alpha \in (0, 1), \text{ si } f(x_1) \geq f(x_2) \implies f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) > f(x_2)$$

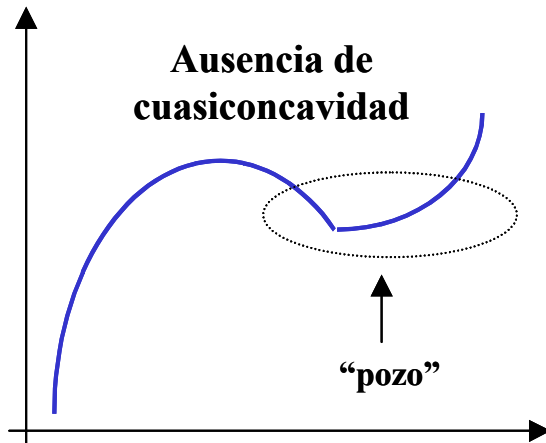
Cuasiconcavidad



Cuasiconcavidad estricta



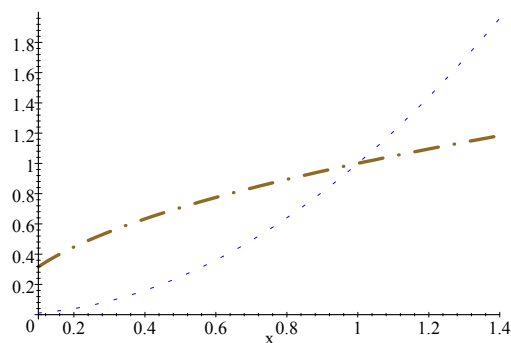
En el siguiente gráfico, notamos la ausencia de concavidad,



E.6 Supervivencia a transformaciones

Si se le aplica una transformación creciente a una función cóncava, la función transformada no será necesariamente cóncava. Por ejemplo, a $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$ se le aplica la transformación $v(x) = (f(x))^4 = (x^{\frac{1}{2}})^4 = x^2$

Así, se pasa de una función cóncava, $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$ (línea sólida) a una convexa, $v(x) = x^2$ (línea punteada).



En cambio, una función cuasicóncava sí lo hace.

Ejercicio 5. Probar que una transformación monótonamente creciente de una función estrictamente cuasicóncava, también será estrictamente cuasicóncava.

E.7 Notación matricial de la cuasiconcavidad

Una función es cuasicóncava si, para el siguiente determinante:

$$|B| = \begin{vmatrix} 0 & f_1 & f_2 & \dots & f_n \\ f_1 & f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1n} \\ f_2 & f_{21} & f_{22} & \dots & f_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_n & f_{n1} & f_{n2} & \dots & f_{nn} \end{vmatrix}$$

los determinantes de los menores principales poseen los siguientes signos:

$$|B_1| < 0$$

$$|B_2| > 0$$

$$|B_3| < 0$$

$$|B_4| > 0$$

Ahora bien, es clara la similitud entre el hessiano orlado y el determinante de la cuasiconcavidad. En cierto caso específico, la cuasiconcavidad de la función implica el cumplimiento de la condición de segundo orden: cuando la restricción es lineal.

De ser así,

$$Z_i = f_i - \lambda g_i = f_i - \lambda a_i \quad \Rightarrow \quad Z_{ii} = f_{ii}$$

Del mismo modo, como:

$$Z_i = f_i - \lambda g_i = 0 \quad \Rightarrow \quad f_i = \lambda g_i$$

Por consiguiente, $|B| = \lambda^2 * |\overline{H}|$

$$\text{Si } |B_2| > 0 \Rightarrow \lambda^2 * |\overline{H}_2| > 0 \Rightarrow |\overline{H}_2| > 0$$

$$\text{Si } |B_3| < 0 \Rightarrow \lambda^2 * |\overline{H}_3| < 0 \Rightarrow |\overline{H}_3| < 0$$

$$\text{Si } |B_4| > 0 \Rightarrow \lambda^2 * |\overline{H}_4| > 0 \Rightarrow |\overline{H}_4| > 0$$

Etcétera.

F Bibliografía

- Mas-Colell, Andreu; Whinston, Michael D. & Green, Jerry R. **Microeconomic Theory**. Oxford University Press. 1995. Mathematical Appendix. M.B. Homogeneous Functions and Euler's Formula & M.C. Concave and Quasiconcave Functions
- Chiang, Alpha C. **Métodos Fundamentales de Economía Matemática**. Mc Graw Hill. Tercera Edición. 1987. Capítulo 12. Optimización con restricciones de igualdad.

Ejercicios Introducción Matemática. Soluciones

Ejercicio 1.

Probar que si se cumple (2), entonces: $a \geq b \iff f(a) \geq f(b)$

Ejercicio 2. Probar que:

$$f(tx_1, tx_2, \dots, tx_n) = t^r f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Derivo en ambos lados con respecto a x_i .

$$\frac{\partial f(tx_1, tx_2, \dots, tx_n)}{\partial x_i} = t^r \frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_i}$$

$$\frac{\partial f(tx_1, tx_2, \dots, tx_n)}{\partial tx_i} * \frac{\partial tx_i}{\partial x_i} = t^r \frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_i}$$

$$\frac{\partial f(tx_1, tx_2, \dots, tx_n)}{\partial tx_i} * t = t^r \frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_i}$$

$$\frac{\partial f(tx_1, tx_2, \dots, tx_n)}{\partial tx_i} = t^{r-1} \frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_i}$$

Ejercicio 3. Probar Ecuación de Euler.

Ejercicio 4. Un ser obtiene utilidad de dos bienes. Su función de utilidad es $U = x_1^{\frac{1}{3}} x_2^{\frac{2}{3}}$. Tiene \$80 para dedicar al bien 1, de precio \$10 y al bien 2, de precio \$20. ¿Qué elige consumir? Grafique las curvas de nivel para $U = 125$ y $U = 25$.

Ejercicio 5. Probar que una transformación monótonamente creciente de una función estrictamente cuasicóncava, también será estrictamente cuasicóncava.

Generamos la nueva función $v(x) = g(f(x))$, donde g es una transformación monótona estrictamente creciente. Debemos mostrar que $v(x)$ es cuasicóncava, es decir que (usando la cuarta definición):

$$\text{si } v(x_1) \geq v(x_2) \implies v(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) > v(x_2)$$

Sabemos que:

$$f(x_1) \geq f(x_2) \implies f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) > f(x_2) \quad (8)$$

Por otro lado,

$f(x_1) \geq f(x_2) \iff g(f(x_1)) \geq g(f(x_2))$ (porque es una transformación monótona estrictamente creciente)

lo que equivale a:

$$f(x_1) \geq f(x_2) \iff v(x_1) \geq v(x_2) \quad (9)$$

Luego,

$$f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) > f(x_2) \implies g(f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2)) > g(f(x_2))$$

lo que equivale a:

$$f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) > f(x_2) \implies v(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) > v(x_2) \quad (10)$$

De (8), (9) y (10),

$$\begin{aligned} v(x_1) \geq v(x_2) &\implies f(x_1) \geq f(x_2) & (\text{uso } 9) &\implies f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) > f(x_2) & (\text{uso } 8) \\ &\implies v(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) > v(x_2) & (\text{uso } 10) \end{aligned}$$

En síntesis,

$$\text{si } v(x_1) \geq v(x_2) \implies v(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) > v(x_2)$$