

Teorema de la envolvente

1 Introducción

Tenemos una función a maximizar, que depende de parámetros, a los que llamamos q y de $\mathbf{n}$ variables de elección, a las que llamamos x . Asimismo, tenemos $\mathbf{k}$ restricciones lineales, que notamos como g . En consecuencia, el problema es:

$$\begin{aligned} \max f(x, q) \\ \text{s.a. } g(x, q) = b \end{aligned}$$

(Nótese que tanto x como q son vectores. Asimismo, $g(x, q) = b$ es un vector de restricciones)

Este problema se resuelve mediante el método de Lagrange. Se define una función L , que es la que se maximiza:

$$\max L \equiv f(x, q) + \sum_{i=1}^k \lambda_i * [g_i(x, q) - b_i]$$

1.1 Resolución de este problema

Las condiciones de primer orden son:

$$\frac{\partial L(x, q)}{\partial x} = \frac{\partial f(x, q)}{\partial x} + \sum_{i=1}^k \lambda_i * \frac{\partial g_i(x, q)}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

(el anterior es un vector de $\mathbf{n}$ componentes de igualdades)

$$\frac{\partial L(x, q)}{\partial \lambda} = g(x, q) - b = 0 \quad (2)$$

(el anterior es un vector de $\mathbf{k}$ componentes de igualdades)

De la resolución de las condiciones (1) y (2) surge el vector de soluciones para las $\mathbf{n}$ variables de elección:

$$x(q) = \arg \max f(x, q) \text{ s.a. } g(x, q) = b \quad (3)$$

En consecuencia, puede definirse la función de valor, es decir, la función objetivo evaluada en la solución:

$$v(q) \equiv f(x(q), q) \quad (4)$$

Hasta aquí, se ha caracterizado el problema de optimización con restricciones lineales. A partir de este punto comienza la propia demostración del teorema de la envolvente.

2 Demostración Teorema

El objetivo del teorema de la envoltura es caracterizar la variación de la función de valor cuando se altera un parámetro. En consecuencia, se comienza diferenciando (4):

$$\frac{\partial v(q)}{\partial q} \equiv \frac{\partial f(x(q), q)}{\partial x} * \frac{\partial x}{\partial q} + \frac{\partial f(x(q), q)}{\partial q} \quad (5)$$

Asimismo, las condiciones (1) se cumplen en $x = x(q)$, en consecuencia, se presenta (1) evaluado allí:

$$\frac{\partial L(x(q), q)}{\partial x} = \frac{\partial f(x(q), q)}{\partial x} + \sum_{i=1}^k \lambda_i * \frac{\partial g_i(x(q), q)}{\partial x} = 0$$

Reordenando...

$$\frac{\partial f(x(q), q)}{\partial x} = - \sum_{i=1}^k \lambda_i * \frac{\partial g_i(x(q), q)}{\partial x} \quad (6)$$

Uniendo (5) y (6) :

$$\frac{\partial v(q)}{\partial q} = - \sum_{i=1}^k \lambda_i * \frac{\partial g_i(x(q), q)}{\partial x} * \frac{\partial x}{\partial q} + \frac{\partial f(x(q), q)}{\partial q} \quad (7)$$

Por último, dado que las condiciones (2) se cumplen en $x = x(q)$, se presenta:

$$\frac{\partial L(x(q), q)}{\partial \lambda_i} = g_i(x(q), q) - b = 0 \quad \forall i$$

Reordenando...

$$g_i(x(q), q) = b \quad \forall i$$

Derivando con respecto a q:

$$\frac{\partial g_i(x(q), q)}{\partial x} * \frac{\partial x}{\partial q} + \frac{\partial g_i(x(q), q)}{\partial q} = 0 \quad \forall i$$

Reordenando:

$$\frac{\partial g_i(x(q), q)}{\partial x} * \frac{\partial x}{\partial q} = -\frac{\partial g_i(x(q), q)}{\partial q} \quad \forall i \quad (8)$$

Uniendo (7) y (8) :

$$\frac{\partial v(q)}{\partial q} = -\sum_{i=1}^k \lambda_i * -\frac{\partial g_i(x(q), q)}{\partial q} + \frac{\partial f(x(q), q)}{\partial q}$$

Reordenando, se llega a la expresión final del teorema:

$$\frac{\partial v(q)}{\partial q} = \frac{\partial f(x(q), q)}{\partial q} + \sum_{i=1}^k \lambda_i * \frac{\partial g_i(x(q), q)}{\partial q} \quad (9)$$

3 Aplicaciones económicas

Las aplicaciones económicas se dan en dos contextos. Por un lado, esto es de utilidad para analizar el problema de maximización de la utilidad. Por otro, sirve para estudiar el problema de minimización de gasto.

3.1 Maximización de la utilidad

Definimos la **función objetivo**:

$$U = U(x)$$

Existen en ella **n** variables de elección, y ningún parámetro.

Definimos la (única) **restricción**:

$$m - px = 0$$

Existen en ella **n** variables de elección, y **n + 1** parámetros (n precios y la renta).

Por último, definimos la **función de valor**:

$$v = v(p, m) = U(x(p, m))$$

En este contexto, calculemos las derivadas a utilizar en el teorema:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x(q), q)}{\partial q} &= \frac{\partial U(x)}{\partial p_i} = 0 \\ \frac{\partial g_i(x(q), q)}{\partial q} &= \frac{\partial (m-px)}{\partial p_i} = -x_i \\ &\quad \frac{\partial (m-px)}{\partial m} = 1 \end{aligned}$$

Ahora, ya podemos aplicar el teorema de la envolvente:

$$\begin{aligned}\frac{\partial v(p, m)}{\partial m} &= \frac{\partial U(x)}{\partial m} + \lambda * \frac{\partial (m - px)}{\partial m} \\ \frac{\partial v(p, m)}{\partial m} &= 0 + \lambda * 1 \\ \frac{\partial v(p, m)}{\partial m} &= \lambda\end{aligned}$$

Remark 1 Así, nuestro primer resultado es que el multiplicador de Lagrange es la utilidad marginal del ingreso.

$$\begin{aligned}\frac{\partial v(p, m)}{\partial p_i} &= \frac{\partial U(x)}{\partial p_i} + \lambda * \frac{\partial (m - px)}{\partial p_i} \\ \frac{\partial v(p, m)}{\partial p_i} &= 0 + \lambda * -x_i \\ \frac{\partial v(p, m)}{\partial p_i} &= \frac{\partial v(p, m)}{\partial m} * -x_i \\ x_i &= -\frac{\frac{\partial v(p, m)}{\partial p_i}}{\frac{\partial v(p, m)}{\partial m}}\end{aligned}$$

Remark 2 Así, nuestro segundo resultado es la Identidad de Roy.

3.2 Minimización del gasto

Definimos la **función objetivo**:

$$f(p, h) = ph$$

Existen en ella **n** variables de elección, y **n** parámetros (los precios).
Definimos la (única) **restricción**:

$$\overline{U} - U(h) = 0$$

Existen en ella **n** variables de elección, y **1** parámetro (el nivel de utilidad).
Por último, definimos la **función de valor**:

$$e = e(p, \overline{U}) = ph(p, \overline{U})$$

En este contexto, calculemos las derivadas a utilizar en el teorema:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f(x(q), q)}{\partial q} &= \frac{\frac{\partial(ph)}{\partial p_i}}{\frac{\partial(ph)}{\partial \bar{U}}} = h_i \\
\frac{\partial g_i(x(q), q)}{\partial q} &= \frac{\frac{\partial[\bar{U}-U(h)]}{\partial p_i}}{\frac{\partial[\bar{U}-U(h)]}{\partial \bar{U}}} = 0 \\
&= \frac{\partial[\bar{U}-U(h)]}{\partial \bar{U}} = 1
\end{aligned}$$

Ahora, ya podemos aplicar el teorema de la envolvente:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial e(p, \bar{U})}{\partial \bar{U}} &= \frac{\partial(hx)}{\partial \bar{U}} + \lambda * \frac{\partial[\bar{U}-U(h)]}{\partial \bar{U}} \\
\frac{\partial e(p, \bar{U})}{\partial \bar{U}} &= 0 + \lambda * 1 \\
\frac{\partial e(p, \bar{U})}{\partial \bar{U}} &= \lambda
\end{aligned}$$

Remark 3 Así, el multiplicador de Lagrange es el costo marginal de un aumento en la utilidad.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial e(p, \bar{U})}{\partial p_i} &= \frac{\partial(ph)}{\partial p_i} + \lambda * \frac{\partial[\bar{U}-U(h)]}{\partial p_i} \\
\frac{\partial e(p, \bar{U})}{\partial p_i} &= h_i + \lambda * 0 \\
\frac{\partial e(p, \bar{U})}{\partial p_i} &= h_i
\end{aligned}$$

Remark 4 Así, nuestro segundo resultado es el Lema de Shephard.