

BREVES NOTAS SOBRE OPTIMIZACIÓN¹

290. MICROECONOMÍA PARA ECONOMISTAS - FCE, UBA.

Curso: Prof. Francisco Mondolfo.

Bajo un esquema neoclásico de pensamiento económico, el propósito de la teoría es definir una regla de decisión óptima. Quizás, de ir un poco más allá, podría ser demostrar la optimalidad social si el mundo real fuera a asemejarse a un modelo propuesto.

Para poder alcanzar dicha regla, el análisis marginal de la mano del cálculo infinitesimal son las herramientas más útiles a tal fin. Y es en el corazón del cálculo que surge la posibilidad de estudiar extremos de funciones y correspondencias entre conjuntos (con ciertos requisitos) de bienes finales, insumos, activos financieros, stocks de capital, en uno o varios períodos, etc.

El análisis de extremos libres y condicionados es el motivo de estas notas. Pero en vez de presentar el tradicional esquema de $\max f(x_1, \dots, x_n)$ s.a. $g(x_1, \dots, x_n) = c$, se trata de abordar de manera intuitiva qué idea económica subyace a las condiciones de primer orden.

Sea $F(x_1, x_2)$ una función objetivo de la que deseo obtener su máximo. Es útil suponer la perfecta divisibilidad de las cantidades que son argumentos de esta función. La función cumple con $F'_{x_1} > 0, F'_{x_2} > 0$. Es decir, mayores cantidades de x_1 y x_2 me hacen bien. Sea $g(x_1, x_2) = c$, aquella ecuación que restringe mi dominio.

Decido partir de (x_1, x_2) con $x_1 > 0$ y $x_2 > 0$, e intentaré obtener cantidades (x_1, x_2) que hagan lo más alto posible el valor de $F(x_1, x_2)$. Para hacerlo, alteraré las cantidades (x_1, x_2) de las que parto.

Si me detengo en el caso particular de una restricción lineal: $ax_1 + bx_2 = c$, $a, b > 0$ de manera que fijo un valor máximo c al que puedo asignar cantidades de (x_1, x_2) , puedo pensar una reasignación de recursos como un pasaje de unidades de x_1 a unidades de x_2 . ¿Por qué no aumentar de los 2, tanto x_1 como x_2 ?. Porque tengo una restricción lineal que me indica: agregue de x_2 , pero fíjese que tiene un tope c y tanto a como b son positivos, con lo cual es inevitable reducir la cantidad de x_1 para mantener la igualdad. Aquí se ve operando a la restricción.

Volviendo al trueque de unidades de x_1 por unidades de x_2 , ¿Cómo se resiente eso en términos algebraicos?. El tener más x_2 implica una mejora (pues $F'_{x_2} > 0$), y el cuánto más de x_2 tengo lo represento como $dx_2 > 0$, es decir, una variación infinitesimal de x_2 . Entonces, por el cambio, en x_2 tengo $F'_{x_2} dx_2$. Por el lado de x_1 , con un razonamiento análogo pero a la inversa, el tener menos, hace que $dx_1 < 0$, y en cuánto resiento esa

¹Ariel Wirkierman. Los comentarios aquí hechos reflejan exclusivamente las opiniones y visiones de quien escribe y bajo ningún concepto hablan por el curso todo. Cualquier error u omisión es pura responsabilidad del autor. Versión más que preliminar, comentarios, sugerencias, broncas, deseos e ilusiones son muy bienvenidos.

cantidad menos de x_1 lo mido por $F'_{x_1} dx_1$. Al trabajar con aproximaciones de primer orden², mido el cambio total en la función como $F'_{x_1} dx_1 + F'_{x_2} dx_2$.

El punto clave a entender aquí es que un cambio marginal (dx_1 por ejemplo), es tan pequeño que los cambios en F'_{x_1} y F'_{x_2} durante el trueque entre x_1 y x_2 pueden ser descartados. Esto es, a medida que yo voy reduciendo de a medidas más chicas que un infinitésimo x_1 , F'_{x_1} en rigor cambia. Pero ese cambio de F'_{x_1} mientras cambio x_1 es tan chico que lo descarto para el análisis.

Lo importante es que una vez que hice el cambio, y x_1 ahora es $x_1 + dx_1$ y x_2 es $x_2 + dx_2$, F'_{x_1} y F'_{x_2} han cambiado, y su relación: F'_{x_1}/F'_{x_2} es otra. De hecho, si aumento x_2 y reduzco x_1 , puedo, suponiendo que $F''_{x_1} < 0$ y $F''_{x_2} < 0$, decir que cae F'_{x_2} y aumenta F'_{x_1} , entonces, aumenta F'_{x_1}/F'_{x_2} .

Es útil entender a la curva de nivel como una ecuación. Ella indica una relación de igualdad que debe cumplirse para ciertos puntos. Por lo tanto puedo, en esos puntos, diferenciar totalmente y trabajar con ella. Así como puedo hacerlo para la función objetivo: $F'_{x_1} dx_1 + F'_{x_2} dx_2 = 0$, también puedo hacerlo para la restricción.

Ahora bien, si yo tomo la restricción lineal, puedo expresar esa relación estática en términos de diferenciales. Es decir, partiendo de $ax_1 + bx_2 = c$ puedo decir que $adx_1 + bdx_2 = dc = 0$ ³. El cambio que resiento en c , lo mido por la suma del cambio que resiento en x_1 más el cambio que resiento en x_2 . Pero es interesante que los cambios se compensan (por ello la expresión termina igualada a 0) para hacer ver que la restricción debe seguirse cumpliendo. Si ahora analizo parcialmente cada cambio, al ser $dx_2 = 0$, obtengo $adx_1 = dc$, por un lado, y $bdx_2 = dc$, cuando $dx_1 = 0$ por el otro.

Si ahora despejo: $dx_1 = \frac{dc}{a}$ y $dx_2 = \frac{dc}{b}$, y tomo en cuenta que si $dx_1 < 0$, $dx_2 > 0$ para respetar que $dc = 0$ puedo emplearlos en $F'_{x_1} dx_1 + F'_{x_2} dx_2$ y llegar a $F'_{x_2} \frac{dc}{b} - F'_{x_1} \frac{dc}{a}$, o lo que es lo mismo: $\left[\frac{F'_{x_2}}{b} - \frac{F'_{x_1}}{a} \right] dc$. ¿Qué es lo que estoy haciendo aquí? Expreso en términos que no dependen de las cantidades arbitrarias de x_1 y x_2 una relación de variaciones marginales.

Si $\left[\frac{F'_{x_2}}{b} - \frac{F'_{x_1}}{a} \right] dc$ es positiva, la reasignación tiene sentido, pues el beneficio de aumentar la cantidad de x_2 ($\frac{F'_{x_2}}{b}$) más que compensa la pérdida de unidades de x_1 ($\frac{F'_{x_1}}{a}$). Pero si la asignación es óptima la expresión no puede ser positiva, pues la imposibilidad de encontrar una mejora sirve como prueba de la optimalidad. Como dc es supuesto positivo, podemos dividir la expresión por dc y enunciar un criterio que excluye una potencial mejora: $\left[\frac{F'_{x_2}}{b} - \frac{F'_{x_1}}{a} \right] \leq 0$.

Si esta condición no se cumple, la expresión es positiva, y dado que $F''_{x_1} < 0$ y

²uso sólo F'_{x_1} para medir qué tanto peor estoy al tener menos x_1

³notando que c es una constante

$F''_{x_2} < 0$, aumentos en x_2 y reducciones en x_1 acercan cada vez más la expresión a 0 al ir reduciendo F'_{x_2} e ir aumentando F'_{x_1} .

De considerar un cambio en la dirección opuesta, o sea, aumentar x_1 y reducir x_2 la expresión que excluye una potencial mejora será ahora $\left[\frac{F'_{x_2}}{b} - \frac{F'_{x_1}}{a} \right] \geq 0$. Si esto no se da, podrá aumentarse x_1 (y caerá $\frac{F'_{x_1}}{a}$) y reducirse x_2 (y aumentará $\frac{F'_{x_2}}{b}$) a fin de acercar la expresión a 0.

Combinando los dos criterios que excluyen potenciales mejoras y entendiendo que los cambios en las direcciones de x_1 y x_2 son arbitrarios, el punto (x_1, x_2) (con ambas cantidades positivas) es óptimo cuando $\left[\frac{F'_{x_2}}{b} - \frac{F'_{x_1}}{a} \right] = 0$, o sea: $\frac{F'_{x_2}}{b} = \frac{F'_{x_1}}{a}$.

Si a la igualdad $\frac{F'_{x_2}}{b} = \frac{F'_{x_1}}{a}$ se le asigna un valor común λ , de manera que $\lambda = \frac{F'_{x_2}}{b} = \frac{F'_{x_1}}{a}$, pueden extraerse dos ecuaciones que llevan a las dos conocidas condiciones de primer orden de la optimización con lagrangianos: $F'_{x_1} = \lambda a$ y $F'_{x_2} = \lambda b$. Estas condiciones de primer orden son condiciones necesarias, no suficientes. Es decir, su cumplimiento no garantiza que el punto crítico sea un máximo.

No obstante, de suponer por ejemplo, que $F(x_1, x_2)$ es cóncava, o incluso, cuasi-cóncava, puedo guiarme por estas condiciones de primer orden para afirmar la existencia (y en ciertos casos unicidad) del máximo.

En conclusión, lo que se ha hecho fue exponer cómo a partir del análisis de primer orden de las variaciones marginales puede enunciarse el criterio que excluye potenciales mejoras sobre una función objetivo, es decir, permite hallar puntos de optimalidad para tomar decisiones respecto de la asignación de escasos recursos (restricciones) para satisfacer múltiples (y algún cínico diría ilimitadas) necesidades.

BIBLIOGRAFÍA.

AVIKANASH DIXIT, *Optimization in Economic Theory*, Oxford: Oxford University Press, 2ed., ch 1.