Obtención de FPP con tecnologías Cobb-Douglas

Ignacio Monzón
19-05-03

1 FPP genérica

Planteamos dos **tecnologías** de producción genéricas:
$x = x(K_x, L_x)$
$y = y(K_y, L_y)$
Asimismo, existen **dotaciones** finitas de factores:
$K_x + K_y = C$
$L_x + L_y = T$
Desde la tecnología y la dotación puede obtenerse la FPP.
$\max x = x(K_x, L_x)$
s.a. $y(K_y, L_y) = y$
s.a. $K_x + K_y = C$
s.a. $L_x + L_y = T$
En forma equivalente...

$$\max L = x(K_x, L_x) + \lambda(y - y(C - K_x, T - L_x))$$

CPO

1. $L_{K_x} = \frac{\partial x}{\partial K_x} - \lambda \frac{\partial y}{\partial K_y}(-1) = 0$
2. $L_{L_x} = \frac{\partial x}{\partial L_x} - \lambda \frac{\partial y}{\partial L_y}(-1) = 0$
3. $L_\lambda = y - y(K - K_x, L - L_x) = 0$

Reexpreso y uno las primeras dos CPO:
$\frac{\partial x}{\partial K_x} = -\lambda \frac{\partial y}{\partial K_y} \quad \Rightarrow \quad \frac{\frac{\partial x}{\partial K_x}}{\frac{\partial y}{\partial K_y}} = -\lambda$
$\frac{\partial x}{\partial L_x} = -\lambda \frac{\partial y}{\partial L_y} \quad \Rightarrow \quad \frac{\frac{\partial x}{\partial L_x}}{\frac{\partial y}{\partial L_y}} = -\lambda$

$$\frac{\frac{\partial x}{\partial K_x}}{\frac{\partial y}{\partial K_y}} = \frac{\frac{\partial x}{\partial L_x}}{\frac{\partial y}{\partial L_y}} \tag{1}$$
$$y = y(C - K_x, T - L_x)$$

De esas condiciones proviene la FPP

2 Cobb Douglas homogénea grado 1

Las tecnologías de producción se representan por:

$$x = (K_x)^{\alpha} (L_x)^{1-\alpha}$$

$$y = (K_y)^{\beta} (L_y)^{1-\beta}$$

2.1 Productividades marginales

$\frac{\partial x}{\partial K_x} = \frac{\alpha}{K_x} * x$
$\frac{\partial y}{\partial K_y} = \frac{\beta}{K_y} * y$
$\frac{\partial x}{\partial L_x} = \frac{(1-\alpha)}{L_x} * x$
$\frac{\partial y}{\partial L_y} = \frac{(1-\beta)}{L_y} * y$

2.2 CPO

Aplicamos a (1) las productividades marginales de la Cobb-Douglas:
$\frac{\frac{\partial x}{\partial K_x}}{\frac{\partial y}{\partial K_y}} = \frac{\frac{\partial x}{\partial L_x}}{\frac{\partial y}{\partial L_y}}$
$\frac{\frac{\alpha}{K_x}*x}{\frac{\beta}{K_y}*y} = \frac{\frac{(1-\alpha)}{L_x}*x}{\frac{(1-\beta)}{L_y}*y} \quad \Rightarrow \quad \frac{\frac{\alpha}{K_x}}{\frac{\beta}{K_y}} = \frac{\frac{(1-\alpha)}{L_x}}{\frac{(1-\beta)}{L_y}} \quad \Rightarrow \quad \frac{(1-\beta)}{\beta} * \frac{K_y}{C-K_y} = \frac{(1-\alpha)}{\alpha} * \frac{L_y}{T-L_y} \quad \Rightarrow$
$\frac{\frac{(1-\beta)}{\beta}}{\frac{(1-\alpha)}{\alpha}} * \frac{K_y}{C-K_y} = \frac{L_y}{T-L_y}$
Definimos:

$$\gamma(\alpha, \beta) = \frac{\frac{(1-\beta)}{\beta}}{\frac{(1-\alpha)}{\alpha}}$$

De esta manera:

$$\gamma * \frac{K_y}{C - K_y} = \frac{L_y}{T - L_y} \tag{2}$$

La otra condición...
$y = y(C - K_x, T - L_x)$
$y = (K_y)^{\beta} (L_y)^{1-\beta}$
$y * (L_y)^{-(1-\beta)} = (K_y)^{\beta}$
$K_y = y^{\frac{1}{\beta}} * (L_y)^{-\frac{(1-\beta)}{\beta}}$ Llamamos $Y = y^{\frac{1}{\beta}}$ y $\phi = -\frac{(1-\beta)}{\beta}$

$$K_y = y^{\frac{1}{\beta}} * (L_y)^{-\frac{1-\beta}{\beta}} \tag{3}$$

Tomo (2) y (3):

$\gamma * \frac{\left(y^{\frac{1}{\beta}} * (L_y)^{-\frac{1-\beta}{\beta}}\right)}{C - \left(y^{\frac{1}{\beta}} * (L_y)^{-\frac{1-\beta}{\beta}}\right)} = \frac{L_y}{T - L_y}$

Divido el LHS por $y^{\frac{1}{\beta}}$:

$\gamma * \frac{(L_y)^{-\frac{1-\beta}{\beta}}}{\frac{C}{y^{\frac{1}{\beta}}} - (L_y)^{-\frac{1-\beta}{\beta}}} = \frac{L_y}{T - L_y}$

Defino:

$$J(C, y, \beta) = \frac{C}{y^{\frac{1}{\beta}}} = Cy^{-\frac{1}{\beta}}$$

$\gamma * \frac{T - L_y}{J - (L_y)^{-\frac{1-\beta}{\beta}}} = \frac{L_y}{(L_y)^{-\frac{1-\beta}{\beta}}}$

$\gamma * \frac{T - L_y}{J - (L_y)^{-\frac{1-\beta}{\beta}}} = (L_y)^{1+\frac{1-\beta}{\beta}}$

$\gamma * (T - L_y) = (L_y)^{\left(1+\frac{1}{\beta}-1\right)} \left(J - (L_y)^{-\frac{1-\beta}{\beta}}\right)$

$\gamma T - \gamma L_y = J (L_y)^{\frac{1}{\beta}} - (L_y)^{\frac{1}{\beta}} (L_y)^{-\frac{1-\beta}{\beta}}$

$\gamma T - \gamma L_y = J (L_y)^{\frac{1}{\beta}} - (L_y)^{\frac{1}{\beta}-\frac{1-\beta}{\beta}}$

$\gamma T - \gamma L_y = J (L_y)^{\frac{1}{\beta}} - (L_y)^{1}$

$\gamma T - \gamma L_y + L_y = J (L_y)^{\frac{1}{\beta}}$

$$\gamma T + (1 - \gamma) L_y = J (L_y)^{\frac{1}{\beta}}$$

2.3 Síntesis de CPO para Cobb Douglas

$$
\begin{aligned}
(1 - \gamma(\alpha, \beta)) L - J(C, y, \beta) L^{\omega(\beta)} + \gamma(\alpha, \beta) T &= 0 & (4)\\
\gamma(\alpha, \beta) &= \frac{\frac{(1-\beta)}{\beta}}{\frac{(1-\alpha)}{\alpha}} & (5)\\
J(C, y, \beta) &= Cy^{-\frac{1}{\beta}} & (6)\\
\omega(\beta) &= \frac{1}{\beta} & (7)
\end{aligned}
$$

3 Solución de la FPP Cobb Douglas.

La ecuación (4) no tiene solución explícita. No obstante, puede intentarse resolver ese polinomio para valores convenientes del parámetro β. Puede notarse que el orden del polinomio depende del valor de ese parámetro. Así, si $\beta = \frac{1}{2}$ debe resolverse una ecuación cuadrática, si $\beta = \frac{1}{3}$ debe resolverse una ecuación cúbica, etc.

Por lo tanto, aquí se toman los siguientes valores de β : $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}\right)$, y se resuelven las ecuaciones.

3.1 Si $\beta = \frac{1}{2}$

Las ecuaciones (4) toman la forma:

$$\begin{aligned}
\gamma\left(\alpha, \frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{1-\alpha}\alpha \\
J\left(C, y, \frac{1}{2}\right) &= \frac{C}{y^2} \\
\omega\left(\frac{1}{2}\right) &= 2
\end{aligned}$$

E en consecuencia la ecuación restante puede expresarse:
$\left(1-\gamma\left(\alpha, \frac{1}{2}\right)\right) L - J\left(C, y, \frac{1}{2}\right) L^{\omega\left(\frac{1}{2}\right)} + \gamma\left(\alpha, \frac{1}{2}\right) T = 0$
Lo que equivale a:

$$-\frac{C}{y^2} L^2 + \frac{1-2\alpha}{1-\alpha} L + \frac{\alpha}{1-\alpha} T = 0$$

Cuyas soluciones son:

1. $L_1 = \frac{1}{2(-C+C\alpha)}\left(2y\alpha - y + \sqrt{(4y^2\alpha^2 - 4\alpha y^2 + y^2 + 4\alpha TC - 4\alpha^2 TC)}\right) y$
2. $L_2 = \frac{1}{2(-C+C\alpha)}\left(2y\alpha - y - \sqrt{(4y^2\alpha^2 - 4\alpha y^2 + y^2 + 4\alpha TC - 4\alpha^2 TC)}\right) y$

3.1.1 Análisis de las soluciones

Sólo se analiza la segunda solución, ya que la primera es siempre negativa (se prueba al final).
$L = \frac{1}{2(-C+C\alpha)}\left(2y\alpha - y - \sqrt{(4y^2\alpha^2 - 4\alpha y^2 + y^2 + 4\alpha TC - 4\alpha^2 TC)}\right) y$
Simplificando:
$L = \frac{1}{2(1-\alpha)}\frac{y}{C}\left((1-2\alpha)\, y + \sqrt{4\alpha\,(1-\alpha)\, TC + (2\alpha-1)^2\, y^2}\right)$

En general, la **cantidad a utilizar de trabajo en la fabricación de y depende de**:

- α: Intensidad de los factores en la producción de **x**.
- T: Cantidad total existente de trabajo.
- C: Cantidad total existente de capital.
- y: Cantidad a producir de **y**.
- (Recordemos que β, la intensidad factorial en la producción de **y**, ya está definida).

$$L(\alpha, T, C, y) = \frac{(1-2\alpha)}{2(1-\alpha)}\frac{y^2}{C} + \frac{\sqrt{4\alpha(1-\alpha)TC + (2\alpha-1)^2 y^2}}{2(1-\alpha)}\frac{y}{C} \tag{8}$$

Recordemos que: $K_y = y^{\frac{1}{\beta}} * (L)^{-\frac{(1-\beta)}{\beta}}$
Dado que $\beta = \frac{1}{2} \Longrightarrow$
$K_y = y^2 * (L)^{-\frac{\left(1-\frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{2}}} = \frac{y^2}{L}$

$$K(\alpha, T, C, y) = \frac{y^2}{L(\alpha, T, C, y)}$$

Definimos las cantidades a utilizar de capital y trabajo en la fabricación de x:

$$A(\alpha, T, C, y) = C - K(\alpha, T, C, y)$$

$$B(\alpha, T, C, y) = T - L(\alpha, T, C, y)$$

En consecuencia, la cantidad producida de x es:

$$x(\alpha, T, C, y) = A(\alpha, T, C, y)^{\alpha} * B(\alpha, T, C, y)^{1-\alpha}$$

3.1.2 Capital = 10

Con el fin de dar una solución del mayor carácter genérico, se plantea un valor de capital = 10 ($C = 10$), manteniéndose el resto de las variables libres:
$L(\alpha, T, 10, y) = .1\frac{1.0-2.0\alpha}{2.0-2.0\alpha}y^2 + .1\frac{\sqrt{(40.0\alpha T - 40.0\alpha^2 T + 4.0y^2\alpha^2 - 4.0y^2\alpha + y^2)}}{2.0-2.0\alpha}y$
Puede simplificarse a:

$$L(\alpha, T, 10, y) = \frac{y}{10(2-2\alpha)}\left((1-2\alpha)y + \sqrt{((10T - y^2) * 4\alpha(1-\alpha) + y^2)}\right)$$

En consecuencia:
$K(\alpha,T,10,y) = \frac{y^2}{L(\alpha,T,10,y)} = \frac{y^2}{\frac{y}{10(2-2\alpha)}\left((1-2\alpha)y+\sqrt{((10T-y^2)*4\alpha(1-\alpha)+y^2)}\right)} = \frac{20(1-\alpha)y}{(1-2\alpha)y+\sqrt{((10T-y^2)*4\alpha(1-\alpha)+y^2)}}$

$$K(\alpha,T,10,y) = \frac{y^2}{L(\alpha,T,10,y)} = \frac{20(1-\alpha)y}{(1-2\alpha)y+\sqrt{((10T-y^2)*4\alpha(1-\alpha)+y^2)}}$$

$$x(\alpha,T,10,y) = \left(10-\frac{y^2}{L(\alpha,T,10,y)}\right)^{\alpha} * (T-L(\alpha,T,10,y))^{1-\alpha}$$

Se presentan algunos casos específicos en el Apéndice

3.2 Si $\beta = \frac{1}{3}$

Las ecuaciones (4) toman la forma:

$$\begin{aligned}
\gamma\left(\alpha,\frac{1}{3}\right) &= \frac{2}{1-\alpha}\alpha \\
J\left(C,y,\frac{1}{3}\right) &= \frac{C}{y^3} \\
\omega\left(\frac{1}{3}\right) &= 3
\end{aligned}$$

En consecuencia la ecuación restante puede expresarse:
$\left(1-\gamma\left(\alpha,\frac{1}{3}\right)\right)L - J\left(C,y,\frac{1}{3}\right)L^{\omega\left(\frac{1}{3}\right)} + \gamma\left(\alpha,\frac{1}{3}\right)T = 0$
Lo que equivale a:

$$-\frac{C}{y^3}L^3 + \left(\frac{1-3\alpha}{1-\alpha}\right)L + \frac{2\alpha}{1-\alpha}T = 0$$

Cuyas soluciones son:

$$I(\alpha,T,C,y) = \Bigg(\frac{1}{3C(\alpha-1)}\sqrt[3]{\Bigg(\bigg(-27\alpha T + 3\sqrt{\left(-\frac{-3y^3+27y^3\alpha-81y^3\alpha^2+81y^3\alpha^3+81\alpha^2T^2C-81\alpha^3T^2C}{C(-1+\alpha)}\right)}\bigg)C^2\,(}$$

$$O(\alpha,T,C,y) = \Bigg(-\frac{1}{6C(-1+\alpha)}\sqrt[3]{\Bigg(\bigg(-27\alpha T + 3\sqrt{\left(-\frac{-3y^3+27y^3\alpha-81y^3\alpha^2+81y^3\alpha^3+81\alpha^2T^2C-81\alpha^3T^2C}{C(-1+\alpha)}\right)}\bigg)}$$

$$P(\alpha,T,C,y) = \Bigg(-\frac{1}{6C(-1+\alpha)}\sqrt[3]{\Bigg(\bigg(-27\alpha T + 3\sqrt{\left(-\frac{-3y^3+27y^3\alpha-81y^3\alpha^2+81y^3\alpha^3+81\alpha^2T^2C-81\alpha^3T^2C}{C(-1+\alpha)}\right)}\bigg)}$$

3.2.1 Ensayo error

$I\left(\frac{3}{4},10,10,3\right)=1.5444$
$O\left(\frac{3}{4},10,10,3\right)=-.77219-1.8135i$
$P\left(\frac{3}{4},10,10,3\right)=-.77219+1.8135i$
Me quedo con la primera solución
$I\left(\frac{3}{4},10,10,y\right)=-.13333\sqrt[3]{\left(-1265.6+11.719\sqrt{(6.0y^3+11664.)}\right)}+1.25\frac{y}{\sqrt[3]{\left(-1265.6+11.719\sqrt{(6.0y^3+}\right.}}$

3.3 Si $\beta=\frac{1}{4}$

$\gamma\left(\alpha,\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{1-\alpha}\alpha$
$J\left(K,y,\frac{1}{4}\right)=\frac{K}{y^4}$
$\omega\left(\frac{1}{4}\right)=4$
Soluciono:
$\left(1-\gamma\left(\alpha,\frac{1}{4}\right)\right)L-J\left(K,y,\frac{1}{4}\right)L^{\omega\left(\frac{1}{4}\right)}+\gamma\left(\alpha,\frac{1}{4}\right)T=0=$
$\left(1-\frac{3}{1-\alpha}\alpha\right)L-\frac{K}{y^4}L^4+\frac{3}{1-\alpha}\alpha T=0Z$
Solution is : $\{L=\rho y\}$ where ρ is a root of $(-K+K\alpha)Z^4+3\alpha T+(-4y\alpha+y)Z$

4 Apéndice

4.1 Negatividad de primera solución para $\beta=\frac{1}{2}$

Recuérdese que las soluciones obtenidas en ese caso son:

1. $L_1=\frac{1}{2(-C+C\alpha)}\left(2y\alpha-y+\sqrt{(4y^2\alpha^2-4\alpha y^2+y^2+4\alpha TC-4\alpha^2TC)}\right)y$
2. $L_2=\frac{1}{2(-C+C\alpha)}\left(2y\alpha-y-\sqrt{(4y^2\alpha^2-4\alpha y^2+y^2+4\alpha TC-4\alpha^2TC)}\right)y$

En todo el análisis realizado hasta el momento, nunca se especificó que L debe tomar valores positivos, aunque naturalmente debe ser así. En consecuencia, si se muestra que una de las dos es negativa, entonces esa solución no es relevante.

Primera solución.

Chequeo que sea superior a 0:
$L_1=\frac{1}{2(-C+C\alpha)}\left(2y\alpha-y+\sqrt{(4y^2\alpha^2-4\alpha y^2+y^2+4\alpha TC-4\alpha^2TC)}\right)y>0$
Como $y>0$,
$\frac{1}{2(-C+C\alpha)}\left(2y\alpha-y+\sqrt{(4y^2\alpha^2-4\alpha y^2+y^2+4\alpha TC-4\alpha^2TC)}\right)>0$
Simplifico el denominador
$-\frac{1}{2(1-\alpha)K}\left(2y\alpha-y+\sqrt{(4y^2\alpha^2-4\alpha y^2+y^2+4\alpha TC-4\alpha^2TC)}\right)>0$
Como $2(1-\alpha)C>0$,
$-\left(2y\alpha-y+\sqrt{(4y^2\alpha^2-4\alpha y^2+y^2+4\alpha TC-4\alpha^2TC)}\right)>0$

$-2y\alpha + y - \sqrt{(4y^2\alpha^2 - 4\alpha y^2 + y^2 + 4\alpha TC - 4\alpha^2 TC)} > 0$
$2y\alpha - y < -\sqrt{(4y^2\alpha^2 - 4\alpha y^2 + y^2 + 4\alpha TC - 4\alpha^2 TC)}$
Multiplico ambos lados por -1,
$y - 2y\alpha > \sqrt{(4y^2\alpha^2 - 4\alpha y^2 + y^2 + 4\alpha TC - 4\alpha^2 TC)}$
Además, $y - 2y\alpha = (1-2\alpha)\,y$, entonces...
$(1-2\alpha)\,y > \sqrt{(4y^2\alpha^2 - 4\alpha y^2 + y^2 + 4\alpha TC - 4\alpha^2 TC)}$
$(1-2\alpha)\,y > \sqrt{(4\alpha\,(TC - y^2)\,(1-\alpha) + y^2)}$
$\sqrt{(2\alpha-1)^2\,y^2} > \sqrt{(4\alpha\,(TC - y^2)\,(1-\alpha) + y^2)}$
Será verdadero siempre que:
$(2\alpha-1)^2\,y^2 > 4\alpha\left(TC - y^2\right)(1-\alpha) + y^2$
$\left(4\alpha^2 + 1 - 2\alpha\right)y^2 > 4\alpha\left(TC - y^2\right)(1-\alpha) + y^2$
$\left(4\alpha^2 - 2\alpha\right)y^2 > 4\alpha\left(TC - y^2\right)(1-\alpha)$
$2\alpha\,(\alpha-1)\,y^2 > 4\alpha\left(TC - y^2\right)(1-\alpha)$
$(\alpha-1)\,y^2 > 2\left(TC - y^2\right)(1-\alpha)$
$-(1-\alpha)\,y^2 > 2\left(TC - y^2\right)(1-\alpha)$
$-y^2 > 2\left(TC - y^2\right)$
$-y^2 > 2TC - 2y^2$

$$y^2 > 2TC \tag{9}$$

Ahora bien el máximo valor que puede tomar y es:
$y \square T^{\frac{1}{2}}C^{\frac{1}{2}}$
La desigualdad se mantiene si elevo al cuadrado ambos miembros.
$y^2 \square \left(T^{\frac{1}{2}}C^{\frac{1}{2}}\right)^2$
$y^2 \square TC$
Entonces...
$2TC < y^2 \square TC$
$2TC < TC$

$$2 < 1$$

4.2 Casos específicos de la solución para $\beta = \frac{1}{2}$

4.2.1 $\alpha = \frac{1}{3}, C = 10, T = 10$

$L\left(\frac{1}{3}, 10, 10, y\right) = .0\,25y^2 + .0\,25\sqrt{(800.0 + y^2)}y = \frac{1}{40}\left(y^2 + y\left(800 + y^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)$
$K\left(\frac{1}{3}, 10, 10, y\right) = \frac{y^2}{.0\,25y^2 + .0\,25\sqrt{(800.0+y^2)}y} = 40.0\frac{y}{y + \sqrt{(800.0+y^2)}}$
Veamos si se verifica la igualdad en la producción.
$y = (K_y)^{\beta}\,(L_y)^{1-\beta}$
Chequeamos:
$n\,(\alpha, T, C, y) = L\,(\alpha, T, C, y)^{\frac{1}{2}} * K\,(\alpha, T, C, y)^{\frac{1}{2}}$

$n\left(\frac{1}{3}, 10, 10, y\right) = y$
OK
$A\left(\frac{1}{3}, 10, 10, y\right) = 10.0 - 1.0\frac{y^2}{.025y^2 + .025\sqrt{(800.0 + y^2)y}}$
$B\left(\frac{1}{3}, 10, 10, y\right) = 10.0 - .025y^2 - .025\sqrt{(800.0 + y^2)}y$

4.2.2 Para todo α,con $C = 10, T = 10$

$K(\alpha, 10, 10, y) = \frac{y^2}{.1\frac{1.0-2.0\alpha}{2.0-2.0\alpha}y^2 + .1\frac{\sqrt{(400.0\alpha - 400.0\alpha^2 + 4.0y^2\alpha^2 - 4.0y^2\alpha + y^2)}}{2.0-2.0\alpha}y}$:
$K(\alpha, 10, 10, y) = 20.0y\frac{-1.0+\alpha}{2.0y\alpha - 1.0y - 1.0\sqrt{(400.0\alpha - 400.0\alpha^2 + 4.0y^2\alpha^2 - 4.0y^2\alpha + y^2)}}$
$= 20y\frac{-1+\alpha}{2y\alpha - y - \sqrt{(400\alpha - 400\alpha^2 + 4y^2\alpha^2 - 4y^2\alpha + y^2)}} = 20y\frac{-1+\alpha}{2y\alpha - y - \sqrt{((1-\alpha)\alpha(400 - 4y^2) + y^2)}} =$
$20y\frac{1-\alpha}{(1-2\alpha)y + \sqrt{((1-\alpha)\alpha(400-4y^2)+y^2)}}$

$$K(\alpha, 10, 10, y) = y\frac{20(1-\alpha)}{(1-2\alpha)y + \sqrt{((1-\alpha)\alpha(400-4y^2)+y^2)}}$$

$$L(\alpha, 10, 10, y) = .1\frac{1.0-2.0\alpha}{2.0-2.0\alpha}y^2 + .1 * \frac{\sqrt{(400.0\alpha - 400.0\alpha^2 + 4.0y^2\alpha^2 - 4.0y^2\alpha + y^2)}}{2.0-2.0\alpha} * y$$

$$L(\alpha, 10, 10, y) = y\frac{\left((1-2\alpha)y + \sqrt{((1-\alpha)\alpha(400-4y^2)+y^2)}\right)}{20(1-\alpha)}$$

4.3 Intentos solución $\alpha = \frac{1}{3}$

$L_1 = \left(\frac{1}{(C(1-\alpha))^{\frac{2}{3}}}\left(\left(-1(C(1-\alpha))^{\frac{1}{3}}\right)\left(-27\alpha T + 3\left(3\left(27\alpha^2\left(T^2 - \frac{y^3}{C}\right) - y^3\frac{(1-9\alpha)}{(1-\alpha)C}\right)\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} + \frac{}{\left(-27\alpha T\right.}\right.\right.$
$Z = \left(-27\alpha T + 3\left(3\left(27\alpha^2\left(T^2 - \frac{y^3}{C}\right) - y^3\frac{(1-9\alpha)}{(1-\alpha)C}\right)\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}$
$L_1 = \left(\frac{1}{(C(1-\alpha))^{\frac{2}{3}}}\left(\left(-1(C(1-\alpha))^{\frac{1}{3}}\right)Z + \frac{(3\alpha-1)y}{Z}\right)\right)$