

Estructuras Discretas

Teoría de Grafos y Árboles. (5)

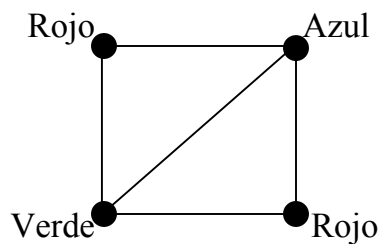
Prof. Miguel Fagúndez

Coloración de Grafos.

Planteamiento del Problema:

Determinar el mínimo numero de colores necesarios para colorear los vértices de un grafo de tal forma que vértices adyacentes posean diferentes colores.

Ejemplo:



Si tenemos un grafo $G = (V, A)$, podemos definir un función $\sigma: V \rightarrow C$, donde C es el conjunto de los colores; y entonces el problema se puede expresar diciendo que:

$\forall v, w \in V$, si $(v, w) \in A$ (v es adyacente a w) entonces $\sigma(v) \neq \sigma(w)$.

Definición: Numero Cromático de un grafo G . El numero mínimo de colores requeridos para la coloración de un grafo G , que constituye la solución al problema de coloración de G , se denomina **numero cromático de G** y se denota como **$K(G)$** .

Aplicación de la coloración de grafos:

Vamos a ilustrarlo con un problema ejemplo: La compañía distribuidora de productos químicos EyJ C.A., esta organizando sus locales y almacenes para abrir pronto sus puertas al publico. La persona encargada del almacenamiento de los compuestos químicos se llama endrina y tiene amplios conocimientos en la materia. Ella, se percató de la peligrosidad de guardar los compuestos, sin ningún tipo de clasificación, puesto que ciertos tipos de compuestos (como ácidos y bases) no deben estar cerca. Endrina acordó con su socio Jacinto dividir el almacén en áreas para almacenar reactivos químicos incompatibles en secciones distintas. Como pueden ellos determinar el numero de secciones que deberán construir?

Si esta compañía EyJ C.A. vende 25 compuestos químicos, entonces podemos modelar el problema, por medio de grafos, de la siguiente manera:

Sea $G = (V, A)$, el grafo que modela el problema, donde:

$$V = \{v_i / v_i \text{ representa el conjunto de compuestos químicos, } i = 1, 2, \dots, 25\} \text{ y}$$

$$A = \{(v_i, v_j) / v_i, v_j \in V \wedge v_i \text{ debe almacenarse en una sección distinta de } v_j\}$$

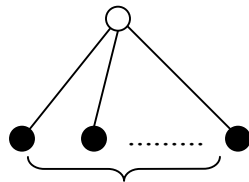
El grafo resultante es no dirigido y el problema de determinar el número mínimo de secciones a construir, se traduce en encontrar el **numero cromático** de G ($K(G)$)

Teorema: Si G es un K_n entonces $K(G) = n$, es decir, un grafo completo de n vértices posee un número cromático igual a n .

Es lógico, ya que en un grafo completo, todos los vértices son adyacentes con todos, por lo tanto, la única manera en que podemos realizar la coloración del grafo es con tantos colores como vértices tenga el grafo.

Teorema: Si el vértice de mayor grado en un grafo G , posee grado z , entonces $K(G) \leq z + 1$.

Ejemplo:

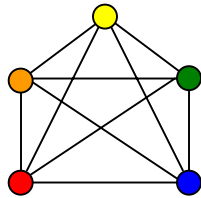


z vértices, entonces tiene a los sumo $z+1$ colores, para este caso sencillo se ve que aunque tenga z vértices la cantidad de colores es 2, pero sigue cumpliendo el teorema de $2 \leq z + 1$.

Esto tiene sentido, ya que conociendo que el grado de todos los vértices en un grafo completo K_n es $n-1$ (todos los vértices tienen mayor grado, que corresponde a $n-1$) y conociendo que, si G es K_n , entonces $K(G) = n$ (en base al teorema anterior), entonces $K(G) = (n - 1) + 1$, por o tanto, $K(G) = \delta(v) + 1$. Este es el peor caso, en el cual se requiere utilizar tantos colores como vértices tiene el grafo, puesto que todos los vértices son adyacentes a todos los otros. Ahora, basta que se elimine un arco, para que dos vértices del grafo no sean adyacentes, y por lo tanto, se pueda repetir en esos dos vértices el mismo color, teniendo como resultado que: $K(G) \leq \delta(v_0) + 1$, donde V_0 es el vértice de mayor grado en el grafo.

Gráficamente:

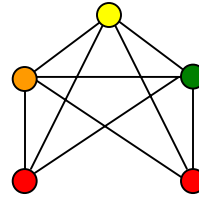
Peor Caso:



$G = K_5$

Para todo v perteneciente a G , el grado de $(v) = 4$ y $K(G) = 5$, por lo tanto, $K(G) = \text{grado}(v) + 1$

Al eliminar un arco:



G'

El vértice v (o vértices) de mayor grado, tiene $\text{grado}(v) = 4$ y $K(G) = 4$, y ahora, $K(G) \leq \delta(v_0) + 1$

Conjetura de los 4 Colores:

Suelen parecer en ciertas ramas de las matemáticas determinados problemas que, a pesar de su planteamiento sencillo y aun elemental, resultan casi insolubles y resisten los embates de varias generaciones de matemáticos. Entre los ejemplos mas famosos esta “el problema de los 4 colores” o “problema de Guthrie”, en geometría combinatoria.

No se sabe a ciencia cierta quien fue el primero en plantear el problema de los 4 colores. Alrededor de 1850, el matemático ingles Francis Guthrie se intereso en el problema general después de mostrar como colorear en un mapa los distritos de Inglaterra con solo 4 colores. Poco después, mostró el problema de los 4 colores a su hermano menor Frederick. En este momento, Frederick Guthrie era alumno de Augusto DeMorgan, quien se lo comunico a William Hamilton, por medio de una carta que data de 1852, y que constituye la primera mención escrita del problema, en esta carta, DeMorgan menciona que el problema fue planteado “por un alumno”, y se invita al destinatario a encontrar un contraejemplo. El problema no intereso a Hamilton y se mantuvo inactivo durante casi 25 aos. En 1878, la comunidad científica se entero del problema por un anuncio de Arthur Cayley en una reunión de la London Mathematical Society. Aos mas tarde Francis Guthrie afirmo haber demostrado la conjetura. Esta demostración nunca se publico. Después, el matemático británico sir Alfred Kempe elaboro una demostración que permaneció sin cuestionarse por mas de una década; pero en 1890, su compatriota Percy John Heawood, hallo un error en su trabajo.

El problema permaneció sin resolverse hasta 1976, cuando, por ultimo, Kenneth Appel y Wolfgang Haken lo demostraron. Su demostración emplea un complejo análisis por computador de 1936 grafo (reducibles, es decir, familias de grafos) que envuelven millones de casos. Puesto que los programas de computadoras son largos y envolventes y, por tanto, propensos a errores, ellos están siendo revisados por varias personas de todo el mundo. Lo que si es cierto es que hasta el presente, no se ha publicado una demostración analítica formal para el problema. Su enunciado original es el siguiente:

“Con 4 colores es posible colorear cualquier mapa plano de forma tal que dos regiones contiguas tengan distinto color. (Dos regiones son contiguas si tienen uno o varios arcos como frontera común).”

Entendiendo que dado un mapa, este siempre puede ser representado por medio de un grafo planar, donde las regiones son los vértices y las relaciones de contiguidad son los arcos, entonces, se puede re-enunciar la conjetura, en términos de teoría de grafos, de la siguiente manera:

Conjetura:

Si G es un grafo planar entonces $K(G) \leq 4$.

Teorema de Konig:

Sea $G = (V, A)$ un grafo. $K(G) \leq 2$ si y solo si, G no contiene circuitos de longitud impar.

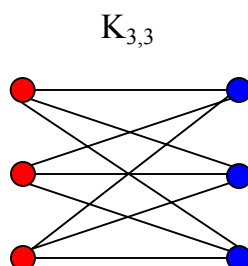
Coloración en Arboles:

Un árbol se puede colorear mínimo con tan solo dos colores.

Corolario: Si $T = (V, A)$ es un árbol, entonces $K(T) = 2$. (Es obvio porque no contiene ciclos).

Corolario: $K(K_{n,m}) = 2$ (En un grafo Bipartito Completo, todos los circuitos son de longitud par)

Ejemplo:



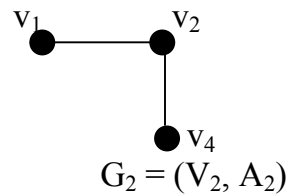
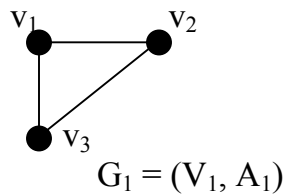
Operaciones entre Grafos:

*) Unión entre Grafos:

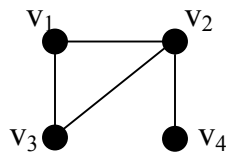
Sean $G_1 = (V_1, A_1)$ y $G_2 = (V_2, A_2), \dots, G_n = (V_n, A_n)$ grafos. El grafo unión se define como:

$$\bigcup_{i=1}^n G_i = \left(\bigcup_{i=1}^n V_i, \bigcup_{i=1}^n A_i \right)$$

Ejemplo: Sean $G_1 = (V_1, A_1)$ donde $V_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$ y $A_1 = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_1)\}$ y $G_2 = (V_2, A_2)$ donde $V_2 = \{v_1, v_2, v_4\}$ y $A_2 = \{(v_1, v_2), (v_2, v_4)\}$



El grafo Unión de G_1 y G_2 es el siguiente:



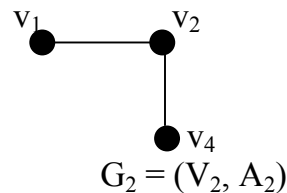
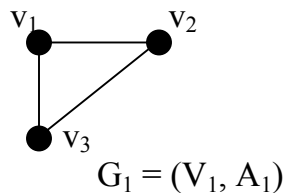
$$G_1 \cup G_2 = (V_1 \cup V_2, A_1 \cup A_2).$$

*) Intersección de Grafos:

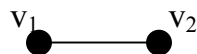
Sean $G_1 = (V_1, A_1)$ y $G_2 = (V_2, A_2), \dots, G_n = (V_n, A_n)$ grafos. El grafo intersección se define como:

$$\bigcap_{i=1}^n G_i = \left(\bigcap_{i=1}^n V_i, \bigcap_{i=1}^n A_i \right)$$

Ejemplo: Sean $G_1 = (V_1, A_1)$ donde $V_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$ y $A_1 = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_1)\}$ y $G_2 = (V_2, A_2)$ donde $V_2 = \{v_1, v_2, v_4\}$ y $A_2 = \{(v_1, v_2), (v_2, v_4)\}$



El grafo Intersección de G_1 y G_2 es el siguiente:



$$G_1 \cap G_2 = (V_1 \cap V_2, A_1 \cap A_2).$$