

Estructuras Discretas

Teoría de Grafos y Árboles. (4)

Prof. Miguel Fagúndez

Teorema de Caracterización Múltiple.

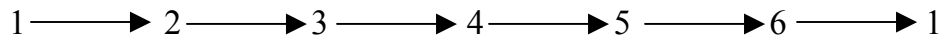
Las siguientes sentencias son equivalentes para un grafo con $n \geq 2$.

1. G es un Árbol.
2. G no posee circuitos y posee $n-1$ arcos.
3. G es conexo y posee $n-1$ arcos.
4. G es arcomaximal respecto a no poseer circuitos.
5. G es arcominimal respecto a ser conexo.
6. Cada par de vértices está unido por un único camino.

Demostración:

Se desea probar que $(1) \equiv (2) \equiv (3) \equiv (4) \equiv (5) \equiv (6)$, es decir, que todas las sentencias son equivalentes.

Para hacer la demostración, seguiremos el siguiente esquema:



De aquí se tendría, por ejemplo que: $(1) \Rightarrow (2)$ y como $(2) \Rightarrow (3)$, $(3) \Rightarrow (4)$, $(4) \Rightarrow (5)$, $(5) \Rightarrow (6)$, $(6) \Rightarrow (1)$, por silogismo hipotético aplicando reiteradamente resulta $(2) \Rightarrow (1)$, de $(1) \Rightarrow (2) \wedge (2) \Rightarrow (1)$ entonces $(1) \Leftrightarrow (2)$, por lo tanto estaría demostrando que $(1) \equiv (2)$. Esta misma idea se aplica para cada par de sentencias.

(1) $\Rightarrow$ (2)

Hipótesis: G es un árbol, por lo que: $P(G) = 0$ y $p = 1$.

Tesis: G no posee circuitos y posee $n - 1$ arcos.

Demostrando la tesis tenemos que:

Por hipótesis, G no posee circuitos.

Falta probar que: $m = n - 1$.

Sabemos por la fórmula de rango de circuito que: $P(G) = m - n + p$. Ahora, por hipótesis $P(G) = 0$ y $p = 1$, entonces surge la ecuación $0 = m - n + p \Rightarrow m = n - 1$.

(2) $\Rightarrow$ (3)

Hipótesis: G no posee circuitos y posee $n - 1$ arcos.

Tesis: G es conexo y posee $n - 1$ arcos.

Para verificar la veracidad de la tesis tenemos que:

Por hipótesis, G posee $n - 1$ arcos. Falta probar que G es conexo, es decir, probar que $p = 1$.

De nuevo aplicando $P(G) = m - n + p$, tenemos : $0 = (n - 1) - n + \Rightarrow p = 1$.

(3) $\Rightarrow$ (4)

Hipótesis: G es conexo y posee $n - 1$ arcos.

Tesis: G es arcomaximal respecto a no poseer circuitos.

Se debe probar que si se añade un arco al grafo G , entonces se forma un circuito, es decir, al añadir un arco, $p(G) = 1$. Pero añadir un arco, conduce a la aparición de un nuevo grafo $G' = (V, A')$, donde $A' = A \cup \{\text{nuevo arco}\}$, por lo que en realidad se debe calcular es a $P(G')$, siendo $|A'| = m' = m + 1$. Por lo que:

$$P(G') = m' - n' + p' \Rightarrow P(G') = (m + 1) - n + 1 \Rightarrow P(G') = ((n - 1) + 1) - n + 1 \\ \Rightarrow P(G') = 1.$$

Como se forma un circuito al añadir un arco entonces G es arcomaximal respecto a no poseer circuitos.

(4) $\Rightarrow$ (5)

Hipótesis: G es arcomaximal respecto a no poseer circuitos.

Tesis: G es arcominimal respecto a ser conexo.

Primeramente, antes de verificar si se cumple, debo partir del hecho de que G sea conexo. Por lo que probamos que G sea conexo:

Vamos a hacerlo por reducción al absurdo. Supongamos que G NO es conexo, entonces $\exists v, w \in V$ tal que v y w NO están unidos por camino alguno. Siendo así, podemos añadir el arco (v, w) al grafo G para formar el único camino entre v y w . Ahora, por hipótesis tenemos que al añadir un arco al grafo G , estamos obteniendo un circuito y precisamente si se forma un circuito entonces existe otro camino para llegar de v a w , que es el camino que parte de v y llega a w sin usar el arco que se acaba de añadir. Contradicción: Había o no había un camino de v a w ?; la contradicción se produce por haber dicho que no existía un camino entre v y w , lo cual, a su vez proviene de haber asumido que el grafo no es conexo; por lo tanto, El Grafo es Conexo.

Demostrando ahora (4) $\Rightarrow$ (5) sabiendo que G es conexo tenemos por reducción al absurdo que si se le quita un arco a G , entonces G deja de ser conexo, esto es equivalente a demostrar que cuando se quita un arco $p = 2$. Por hipótesis sabemos que $p = 1$ y $P(G) = 0$, entonces $0 = m - n + 1$ y $m = n - 1$. Si quitamos un arco a G , con $m = m - 1$ arcos, entonces:

$$\begin{aligned}
P(G') &= m' - n' + p' \\
\Rightarrow 0 &= (m - 1) - n + p' \\
\Rightarrow 0 &= ((n - 1) - 1) - n + p' \\
\Rightarrow 0 &= -2 + p' \\
\Rightarrow p' &= 2
\end{aligned}$$

Cuando se le quita un arco a G , entonces G deja de ser conexo, lo que indica que G es arcominimal respecto a ser conectado o conexo.

(5) $\Rightarrow$ (6)

Hipótesis: G es arcominimal respecto a ser conexo

Tesis: Cada par de vértices está unido por un único camino.

Por reducción al absurdo, supondremos que en G existe al menos un par de vértices v y w que no están unidos por un único camino.

Aquí v y w están unidos por, al menos, dos caminos. Podemos interrumpir uno de los caminos entre v y w , quitando uno de sus arcos, por ejemplo (i,j) y aun v y w estarían unidos por el otro camino. Pero por hipótesis, al quitar el arco (i,j) el grafo deja de ser conexo, por lo que i está en una componente conexa y j está en otra componente conexa y entre i,j no existe camino alguno. Como asumimos que entre v y w existe un camino alternativo, se puede desarrollar un camino entre i,j , empleando ese camino como puente. Contradicción:

- Entre i,j no existe camino alguno
- Existe un camino entre i,j .

La contradicción se produce por haber asumido que existía más de un camino entre v y w ; luego no existe un par de vértices en G que tenga más de un camino, es decir, cada par de vértices está unido por un único camino.

(6) $\Rightarrow$ (1)

Hipótesis: Cada par de vértices está unido por un único camino.

Tesis: G es un árbol.

Para probar la tesis, debemos considerar lo siguiente:

Por hipótesis, como cada par de vértices está unido por un único camino, esto significa que (i) en G no posee circuitos. Por otra parte, como entre cada par de vértices existe un camino, entonces (ii) G es conexo. Con (i) y (ii) queda comprobado que G es un árbol.

Relación definida sobre V , para grafos NO dirigidos.

Sea R la relación sobre V definida como:

vRw si y solo si existe un camino de v a w , para $v, w \in V$

Esta relación cumple las propiedades de:

Reflexividad: Por definición, todo vértice v está conectado consigo mismo, lo cual indica que todo vértice tiene un camino vacío para ir de él en el mismo. Por lo tanto, la relación es reflexiva.

Simetría: Es simétrica porque vRw (que quiere decir que existe un camino de v a w) entonces también se cumple (en grafos NO dirigidos) que wRv (que es el mismo camino de v a w pero haciendo el recorrido en sentido inverso). Y esto es válido para todo par de vértices relacionados. Por lo tanto, la relación es simétrica.

Transitividad: Es transitiva porque si el grafo existen las relaciones vRw (existe un camino de v a w) y wRk (existe un camino de w a k) entonces también existe la relación vRk (que es el camino compuesto por los dos anteriores).

Cumpléndose todas estas propiedades, tenemos que R es una relación de equivalencia, y en tal sentido, podemos buscar sus clases de equivalencia y su conjunto cociente.

Vamos a convenir en llamar $V_i (i = 1, 2, \dots, p)$ a las clases de equivalencias diferentes de R . Como podemos recordar, una relación de equivalencia Q definida sobre un conjunto A , induce una partición sobre A , mediante el conjunto cociente V/R , el cual, obviamente, contiene las clases de equivalencia V_i (constituyen fragmentos de V).

Siendo $V/R = \{V_i / i \in I\} = \pi(V)$, donde $I = \{1, 2, \dots, p\}$, entonces:

1. $V_i \neq \emptyset$ con $i \in I$
2. $V_j \cap V_i = \emptyset \ \forall i, j \in I$, tal que $i \neq j$
3. $\cup V_i = V$

Como sabemos que todos los elementos de una misma clase de equivalencia están relacionados entre sí mediante la relación definida, y como en este caso la relación R consiste en que existe algún camino entre vértices de un grafo, presenta un camino que lo conecta con cualquier otro vértice de la misma clase V_i . En conclusión, al ubicar en el grafo los elementos de una clase de equivalencia se

puede observar que de cualquiera de ellos se puede llegar a cualquiera de los otros de la misma clase.

Si consideramos el subgrafo generado por cada clase de equivalencia V_i , tenemos que:

$$G = \bigcup_{i=1}^p (\text{SubGen } V_i)$$

En pocas palabras: al unir los subgrafos generados por cada V_i , obtenemos el grafo original. Cada $\text{SubGen } V_i$ se denomina componente conexa de G el numero p de clases de equivalencia diferentes: V_i se denomina numero de conexión o conectividad de G y se denota $|G| = p$.

Por otra parte, tenemos que dos vértices están en dos componentes distintas si y solo si entre ellos no existe ningún camino, es decir, si el grafo es desconexo. De aquí surge el siguiente lema:

Lema: Un grafo es conexo si y solo si admite una única componente conexa, es decir, si y solo si $p = 1$.

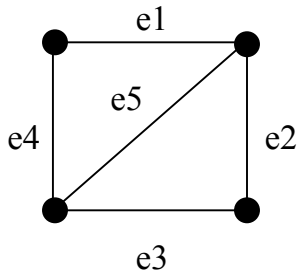
Independencia entre circuitos.

Notación: de ahora en adelante llamaremos $|V|=n$, $|A|=m$ y $|G|=p$. Sea el grafo $G = (V, A, \phi)$ y supongamos que la función ϕ asocia etiquetas e_i ($i = 1, 2, \dots, m$) a los arcos de A ; así entonces, un circuito cualquiera del grafo G : $C = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), \dots, (v_{r-1}, v_r)\}$, con $v_1 = v_r$, se puede representar en términos de las etiquetas como $C = \{e_1, e_2, \dots, e_r\}$.

Basados en esta idea, una notación estándar para los circuitos es la siguiente: Cada circuito se puede denotar como una m _tupla, donde la i _esima componente de la m _tupla tendra un 1 si el arco etiquetado como e_i , forma parte del circuito, y tendra un 0 si e_i , no forma parte del circuito. Es decir:

$$\text{Componente } i\text{-esima del circuito} = \begin{cases} 1 & \text{si el arco } e_i \in C \\ 0 & \text{si el arco } e_i \notin C \end{cases}$$

Ejemplo: Para el grafo:



Podemos tomar los circuitos:

$$C_1 = (e_1, e_5, e_4)$$

$$C_2 = (e_1, e_2, e_3, e_4)$$

$$C_3 = (e_2, e_3, e_5)$$

Con la notación estándar y considerando que para este ejemplo $|A| = m = 5$; los circuitos escogidos se representan de la siguiente manera:

	e1	e2	e3	e4	e5
$C_1 =$	(1	0	0	1	1)
$C_2 =$	(1	1	1	1	0)
$C_3 =$	(0	1	1	0	1)

La notación estándar nos permite realizar operaciones entre ellos, lo cual nos provee un medio para compararlos. Con esta notación (normalizada) se introduce el operador $\oplus$, el cual funciona de la siguiente manera:

Sean C_i y C_j dos circuitos en el grafo G y expresados según la notación estándar, entonces $C_i \oplus C_j = C_k$ tal que C_k es un circuito donde la i -ésima componente corresponde a: $C_{k_i} = C_{i_i} \underline{\vee} C_{j_i}$, siendo $\underline{\vee}$ la operación Or_Exclusivo, aplicada entre las componentes binarias de dos circuitos en notación estándar.

Recordemos: Tabla del Or_Exclusivo:

C_i	C_j	$C_i \underline{\vee} C_j$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Ejemplo: $(1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1) \oplus (1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0) = (0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1)$

En realidad la operación lo que hace es cancelar aquellos arcos comunes entre los dos circuitos operados. Es decir, al solapar 2 circuitos, obtendremos un 0 en aquellos arcos que se repiten y un 1 en los arcos NO comunes.

Ahora bien, para que todo esto? Pues bien, si tenemos un grafo con varios circuitos, es muy posible que algunos de estos se puedan generar en base a otros, en este caso decimos que al agruparlos tenemos un **conjunto de circuitos dependientes**.

Por otra parte, si logramos hallar un conjunto de circuitos en el cual ninguno de los involucrados puede generarse como la operación de 2 o mas circuitos del conjunto, entonces estamos en presencia de un **conjunto de circuitos independientes**.

Entonces, podemos afirmar que n circuitos serán independientes si y solo si cada uno de ellos tiene algún arco que no tenga alguno de los $(n - 1)$ restantes del conjunto.

Conjunto de Circuitos Independientes:

Definición: un conjunto $\{C_1, C_2, \dots, C_k\}$ de circuitos independientes si y solo si no existe ningún subconjunto $\{C_1', C_2', \dots, C_b'\}$ tal que $C_1' \oplus C_2' \oplus \dots \oplus C_b' = C_0$, donde C_0 corresponde al circuito que contiene ceros en todas sus componentes.

Es decir, un conjunto de circuito donde ningún circuito puede ser obtenido a partir de operar $\oplus$ algunos otros circuitos del conjunto.