

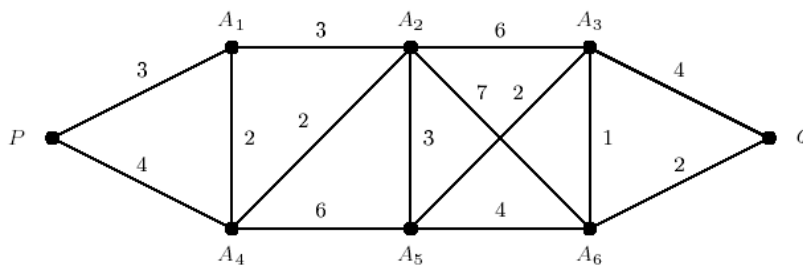
Estructuras Discretas

Teoría de Grafos y Árboles. (2)

Prof. Miguel Fagúndez

Grafos Etiquetados y Ponderados

Aunque ya hemos usado los grafos etiquetados, damos una definición en esta sección. En particular, G es un **grafo ponderado o etiquetado** si a cada arista e de G se le asigna un número no negativo $w(e)$ denominado peso o longitud de e . El peso (o longitud de un camino en un grafo ponderado G se define como la suma de los pesos de las aristas del camino. Un importante problema en teoría de grafos es encontrar el camino más corto (liviano), esto es, el camino con el peso (longitud) mínimo entre dos vértices dados.



Conexidad

Un grafo G es **Conexo** si existe una cadena (camino) entre cualesquiera par de vértices. En caso contrario a G se le conoce como **Disconexo**.

Si un grafo no es conexo, se puede expresar como la unión de dos o mas subgrafos conexos de manera que los conjuntos de vértices y de aristas de cada par de estos subgrafos son disjuntos entre si. A estos subgrafos se le denomina **Componentes Conexas** del grafo dado. De esta manera un grafo es conexo si y solo si tiene una única componente conexas. Todo esto nos lleva al siguiente Teorema:

Teorema: *Existe un camino simple entre cualquier par de vértices distintos de un grafo conexo no dirigido.*

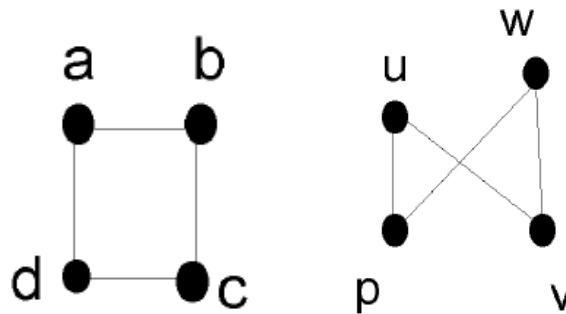
Isomorfismo en Grafos.

Dos grafos que tienen la misma estructura diremos que son isomorfos, ateniéndonos a la siguiente definición:

Se dice que dos grafos simples $G = (V, A)$ y $G_2 = (V_2, A_2)$ son isomorfos si existe una función biyectiva $f: V \rightarrow V_2$ tal que, $\forall v, w \in V$ y $(v, w) \in A$ si y solo si $(f(v), f(w)) \in A_2$. De la función f que satisface dicha condición se dice que es un **isomorfismo de grafos** entre G y G_2 .

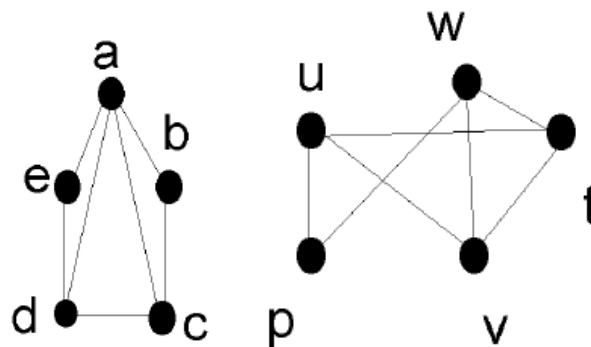
En otras palabras, dos grafos son isomorfos si tienen el mismo número de vértices y existe una función biyectiva entre los dos conjuntos de vértices que preservas las adyacencias.

Ejemplo: Dado los siguientes Grafos determinar si son isomorfos. Sea $G=(V,A)$ y $G_2=(V_2,A_2)$, con $V=\{a,b,c,d\}$ y $V_2=\{u,w,p,v\}$ y $A=\{(a,b),(b,c),(c,d),(a,d)\}$ y $A_2=\{(u,p),(p,w),(w,v),(v,u)\}$. Gráficamente:



Estos grafos son isomorfos. Para verlo basta comprobar que la función: $f: \{a,b,c,d\} \longrightarrow \{u,v,w,p\}$, tal que $f(a)=u$, $f(b)=v$, $f(c)=w$ y $f(d)=p$, es un isomorfismo de grafo.

Los siguientes grafos NO son isomorfos:



no lo son, aunque ambos tienen el mismo número de vértices y de arcos, en el primero el grado(a) = 4, mientras que en el segundo no hay ningún vértice cuyo grado sea 4.

Camino, Ciclos y Grafos Conexos.

Un **camino** de longitud n entre par de vértices v,w de un grafo no dirigido es una sucesión finita $(a_0,a_1,\dots,a_{n-1})$ de aristas del grafo, $a_0 = (v_0,v_1)$, $a_1 = (v_1,v_2),\dots$,

$a_{n-1}=(v_{n-1},v_n)$, de manera que $v_0 = a$ y $v_n = b$ y cada arco sucesivo empieza donde terminó la anterior. Si el grafo es simple, el camino $(a_0,a_1,...,a_{n-1})$ queda perfectamente determinado por la sucesión de vértices $(a,v_1,...,v_{n-1},b)$.

Partiendo de aquí podemos definir algunos puntos, tales como:

Se dice que un camino es un **circuito** si es cerrado, esto es, empieza y termina en el mismo vértice, es decir, $a=b$. Si a dicho circuito no pasa dos veces por el mismo vértice (salvo el vértice inicial) se denomina **ciclo**.

Para determinar el numero de circuitos independientes de un grafo G cualquiera se aplica la siguiente formula:

$$P(G) = m - n + p, \text{ donde}$$

m = Numero de arcos

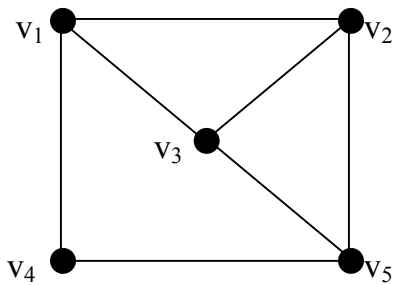
n = Numero de Vértices

p = Numero de Componentes Conexas

Se dice que un camino es **simple** si no contiene a la misma arista o arco más de una vez. Un camino es **elemental** si no contiene a un mismo vértice mas de una vez.

Orden de un Camino: no es mas que la cantidad de vértices que posee dicho camino, y si el $O(C) = k$, eso quiere decir que dicho camino pasa por $k-1$ arcos (ya que pueden haber arcos repetidos).

Ejemplo: Para el siguiente grafo determinar un camino elemental, una camino simple, un circuito y un ciclo.



P	Ll	Camino	Tipo
v_1	v_4	(v_1, v_2, v_5, v_4)	
v_1	v_4	$(v_1, v_2, v_3, v_1, v_4)$	
v_1	v_4	$(v_1, v_2, v_3, v_5, v_2, v_1, v_4)$	

Teorema: Sea $G = (V, A)$ un grafo (dirigido o no dirigido) y sea $MA = (a_{ij})$ su matriz de adyacencia con respecto al orden $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, v_n$ de su conjunto de vértices. En estas condiciones el numero de caminos de longitud m entre el vértice v_i y el vértice v_j es igual al coeficiente situado en el lugar ij de la potencia m -ésima de la matriz MA (con respecto al producto de matrices usual).

Esto nos lleva pensar que si $|V| = n$, y para cualesquiera par de vértices $v, w \in V$ siendo $v \neq w$ y estando unidos por un camino en G , entonces v y w están unidos por un camino de longitud menor o igual que $n-1$.

De todo lo anterior podemos concluir los siguientes colorarios:

Colorario: Dado un grafo $G = (V, A)$ tal que $|V| = n$, y siendo $MA = a_{ij}$ la matriz de adyacencia de G , se verifica que existe un camino entre v_i y v_j si y solo si la matriz $C = c_{ij}$, definida como:

$$C = I_n + A + A^2 + \dots + A^{n-1}$$

satisface que el coeficiente $c_{ij} \neq 0$, con lo cual también debe satisfacer el principio de conexidad (próximo colorario).

Colorario: Dado un grafo $G = (V, A)$ tal que $|V| = n$, se verifica que G es conexo si y solo si la matriz que se forma del siguiente producto

$$I_n + A + A^2 + \dots + A^{n-1}$$

tiene todos los coeficientes distintos de cero.

Gracias a este Colorario nos permite obtener un algoritmo para determinar partiendo de una matriz de adyacencia de un grafo $G = (V, A)$ tal que $|V| = n$ es o no conexo, mediante el uso de producto usual de matrices.

Ejemplo: Suponga que la siguiente matriz es la matriz de adyacencia de un grafo cualquiera

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

entonces su cuadrado es

$$A^2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

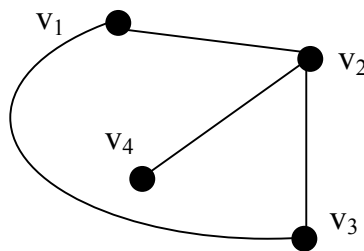
Por tanto, $I + A + A^2$ tiene todas sus entradas no nulas y el grafo es conexo.

Alcanzabilidad.

Definición: Se dice que un vértice w es alcanzable desde otro vértice v si y solo si existe un camino de v a w . Calculando la matriz de orden n , siendo n el numero de vértices del grafo.

$$Mal[ij] = \begin{cases} 1 & \text{si existe un camino de } v_i \text{ a } v_j \text{ de cualquier longitud} \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Ejemplo: Para el siguiente grafo calcular la matriz de Alcanzabilidad de orden 2.



$$MA_d = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, (MA_d)^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Observación: Con esta matriz de Alcanzabilidad no solo podemos saber si un grafo es conexo o no, sino poder determinar cuantos caminos de orden n hay en el grafo, siendo n el orden de la matriz de Alcanzabilidad.

Si nos interesa saber si se puede o no alcanzar un cierto vértice desde otro, sin importar la longitud del camino, entonces, calculamos MA_d^n que es diferente de calcular MA_d^n .

$$MA_d^n = MA_d^{n-1} * MA_d \quad \text{y} \quad MA_d^n = MA_d + MA_d^2 + MA_d^3 + \dots + MA_d^n$$

Por ejemplo, conseguir un camino para el grafo anterior que va de V_1 a V_4 .

$$C_{(1,4)} = \{v_1, v_2, v_3, v_2, v_4\}$$

$$L(c) = 4 \quad \{\text{arcos}\}$$

$$|V| = 5 \quad \{\text{vertices}\}$$

Lema: Si un camino posee k arcos entonces es porque tiene $k+1$ vértices si y solo si el Camino es no elemental. (siendo $k \geq n$ y $n = |V|$)

Grafos Eulerianos y Hamiltonianos.

Definición: Un **camino euleriano** es un grafo no dirigido $G = (V, A)$ es un camino simple que contiene a todas las aristas o arcos de G sin repetir ninguno. Un **circuito euleriano** en G es un circuito simple que contiene todas las aristas o arcos de G sin repetir ninguna y además el vértice de origen es igual al vértice de llegada.

Definición: Se dice que un grafo no dirigido es **euleriano** si y solo si contiene un circuito euleriano.

De la definición de grafo euleriano se concluye que, o bien el grafo es conexo, o hay una componente conexa que contiene todas las aristas o arcos del grafo, siendo las otras componentes conexas vértices aislados.

Definición: Se denomina **camino hamiltoniano** en un grafo no dirigido $G = (V, A)$ a cualquier camino simple que contenga a todos los vértices de G pasando solo una vez por todos ellos. Si el vértice origen es igual al vértice de llegada a este camino se le denomina **circuito hamiltoniano**.

Definición: Se dice que un grafo no dirigido es **hamiltoniano** si y solo si contiene un circuito hamiltoniano.

Hay una forma de determinar si un grafo es euleriano o hamiltoniano sin necesidad de realizar todos los posibles recorridos de un grafo no dirigido cualquiera??.... La respuesta es SI y NO!!

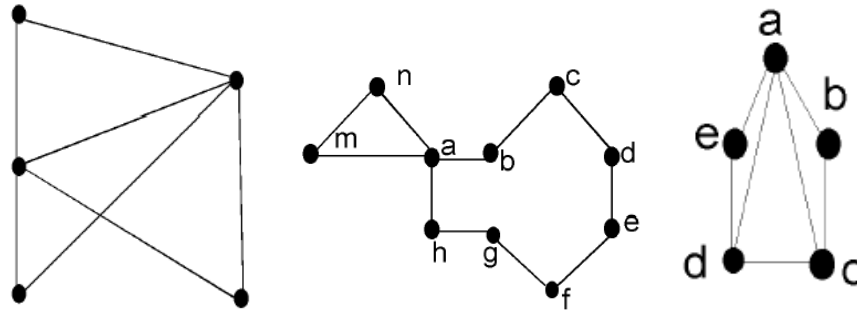
Para los Grafos Eulerianos si hay una forma de determinar si lo son sin necesidad de realizar todos los posibles recorridos, lo que nos lleva a la siguiente Teorema:

Teorema: Sea $G = (V, A)$ un grafo conexo. Si todos los vértices de G tienen grado par, entonces G posee un circuito euleriano.

Lema: Si un grafo $G=(V, A)$ conexo y no dirigido admite un camino euleriano no cerrado si y solo si posee exactamente 2 vértices de grado impar.

Para los Grafos Hamiltonianos **NO** ayuna forma de determinarlos, por lo tanto, la única manera de saber si un grafo G es o no hamiltoniano es haciendo el recorrido en el grafo.

Ejemplo: Determinar de ser posible si los siguientes grafos son Eulerianos y Hamiltonianos, en caso contrario, determinar si poseen caminos.



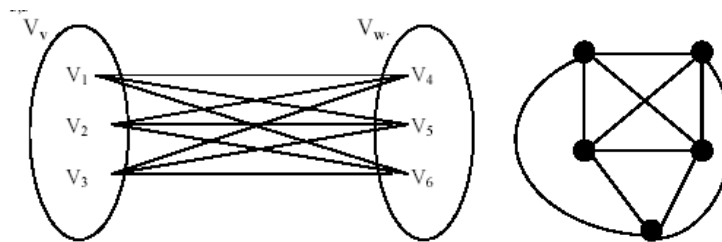
Grafos Planares.

Decimos que un grafo es planar si se puede dibujar en el plano sin que sus arcos o aristas se crucen. Formalmente podemos decir,

Definición: Sea $G = (V, A)$. Si G puede ser dibujado en el plano ($\mathbb{R} \times \mathbb{R}$), de tal manera que sus arcos no se intercepten, entonces G es planar.

Aquí R representa el numero de regiones Planares, y se calcula como:

$R(G) = P(G) + 1$, siendo P el rango circuito de G .

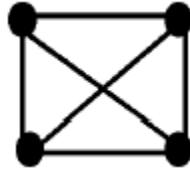


Estos Grafos NO SON PLANARES!!!

Lema: En cualquier grafo planar $G(V, A; R)$ las fronteras de las regiones acotadas representan la mayor colección de circuitos independientes, ya que $R(G) = P(G) + 1$.

Teorema de Euler: En un grafo planar conexo, se cumple que $n - m + R = 2$, siendo n los vértices, m los arcos y R el numero de regiones del grafo.

Probando el teorema de Euler para un grafo planar y conexo particular:



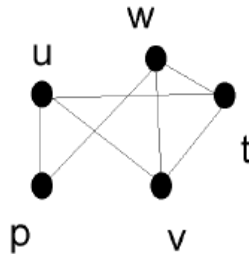
se ve claramente que $m = 6$, $n = 4$, $R = 4$, ya que $P(G)=3$, sustituyendo en la ecuación nos queda que $(4) - (6) + (4) = 2$, CUMPLE EL TEOREMA!!!

Ahora se deberá probar para cualquier grafo planar conexo. **HACER!!!**

Corolario: Si $G = (V,A;R)$ es un grafo plano con k componentes conexas, entonces $n - m + R = k + 1$. **DEMOSTRAR!!!**

Teorema Planaridad: En todo grafo planar se cumple que: $3R \leq 2m$. Y si cada región del grafo G esta acotada por lo menos por 4 arcos, entonces $4R \leq 2m$.

Ejemplo: Probar los teoremas y lemas en los siguientes grafos:



Teorema de Euler:

$$n = 5$$

$$m = 7$$

$$R = 3$$

$$(5)-(7)+(3)=2. \text{ Cumple con el teorema de Euler.}$$

Teorema de Planaridad:

$3R \leq 2m$, anteriormente habíamos calculado $R = 3$ y $m = 7$, así que $3(3) \leq 2(7)$, entonces $9 \leq 14$. Cumple el Teorema de Planaridad. Probando con la otra desigualdad tenemos que: $4(3) \leq 2(7)$, entonces $12 \leq 14$,.... pero ojo, en este grafo cada región no esta acotada por 4 arcos. OJO!!

Corolario: Los grafos de K_5 y $K_{3,3}$ no son planares.

Este corolario nos permite entonces enunciar el siguiente teorema:

Teorema de Kuratowsky: Un grafo es planar si y solo si no contiene como subgrafo a un K_5 o $K_{3,3}$.