

Estructuras Discretas

Teoría de Grafos y Árboles.

Prof. Miguel Fagúndez

Motivación: los puentes de Königsberg



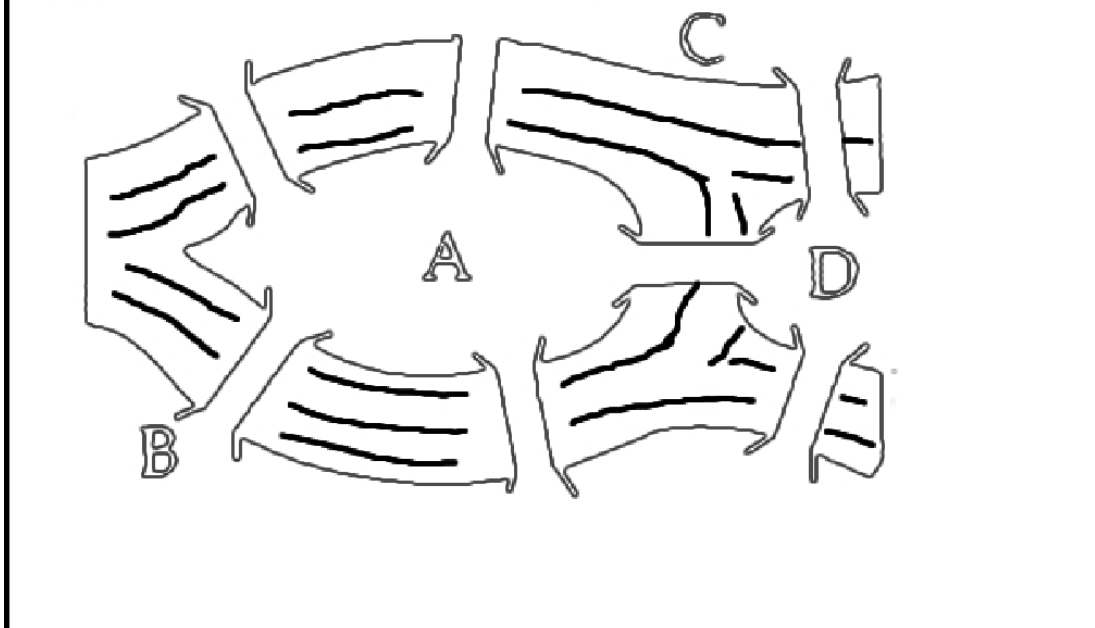
La teoría de grafos tiene su origen en un artículo publicado por Euler en 1736 en el que se daba solución al problema de los 7 puentes de la ciudad de Königsberg (actualmente Kaliningrado), puentes que conectaban dos islas con las márgenes del río Pregel según el esquema de la figura que se adjunta (Figura 5.1).

El problema consistía en realizar un paseo que atravesase cada uno de los 7 puentes una única vez (los puentes en el gráfico son los que unen las regiones A,B,C y D).

Euler demostró que esto no era posible y (esto es lo importante) sin comprobar todos los posibles paseos.

Desde entonces los resultados y aplicaciones de esta teoría han ido aumentando, y actualmente la teoría de grafos se utiliza para resolver problemas en

Una versión simplificada:

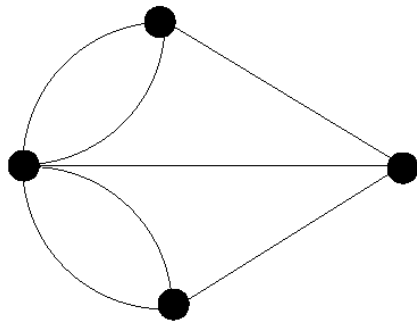


ramas de la ciencia muy diferentes. Por ejemplo, los grafos se utilizan para construir modelos de redes de ordenadores y determinar si dos ordenadores están conectados en una red, para determinar si un circuito puede ser implementado sobre un tablero plano, para distinguir compuestos químicos con la misma fórmula molecular, para encontrar el camino más corto entre dos ciudades en una red de transporte...

Se pretende que el alumno al finalizar el capítulo:

- Entienda los conceptos y definiciones básicas de la teoría de grafos.
- Utilice las distintas representaciones de grafos.
- Utilice diferentes métodos para reconocer si dos grafos son o no isomorfos.
- Conozca los conceptos de grafo conexo, euleriano y hamiltoniano, las técnicas para reconocerlos, sus propiedades y algunos resultados relacionados con ellos.
- Aplique la definición más adecuada para verificar si un grafo es un árbol.

Más todavía ...



Grafos: Definición

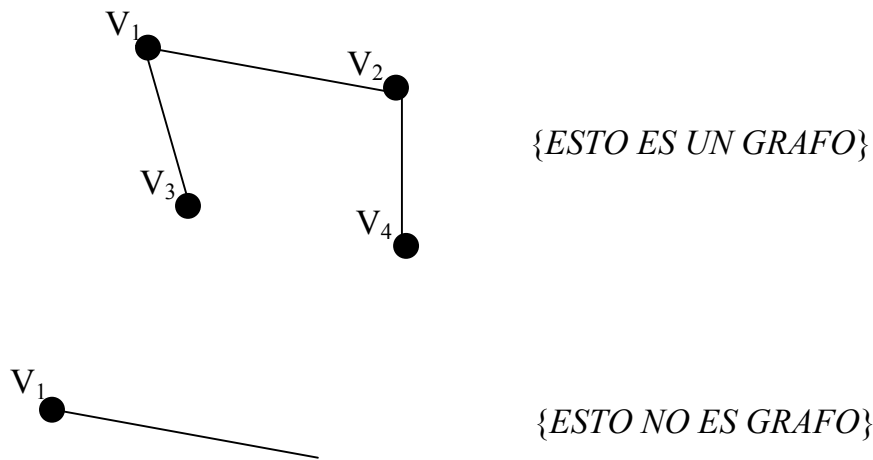
Un grafo no es mas que una estructura algebraica $G=(V,A)$ de forma tal que cumple que:

- V es un conjunto “**no vacío**” de elementos, que se denominan **vértices**.
- A es un conjunto de elementos que se denominan **arcos** o **aristas**, estos pueden ser vacíos.

Otra manera de definir un grafo es como:

- $V \neq \emptyset$, es un conjunto de elementos, que se denominan **vértices**.
- A es un conjunto de elementos que se denominan **arcos** o **aristas**, y que asocian los elementos de V en pares ordenados ($A \subseteq V \times V$).
- Q es una función tal que $Q:A \longrightarrow E$, donde E es un conjunto de **etiquetas** o nombres que se le quieren poner a los **arcos o aristas**.

Ejemplo: Sea $V = \{V_1, V_2, V_3, V_4\}$ y $A = \{(V_1, V_2), (V_1, V_3), (V_2, V_4)\}$, el grafo asociado a esta representación algebraica es:



Multiplicidad de los arcos

Para cualquier par $((V_1, V_2), \langle V_1, V_2 \rangle)$ con $V_1, V_2 \in V$, se define la multiplicidad de $((V_1, V_2), \langle V_1, V_2 \rangle)$ como:

1. Multiplicidad $(V_1, V_2) = \text{Card } \{a / a \in A \wedge a = (V_1, V_2)\}$
2. Multiplicidad $\langle V_1, V_2 \rangle = \text{Card } \{a / a \in A \wedge a = \langle V_1, V_2 \rangle\}$

Lo que se quiere decir es que la multiplicidad de (V_1, V_2) y $\langle V_1, V_2 \rangle$ se define como la cardinalidad del conjunto de arcos (V_1, V_2) y $\langle V_1, V_2 \rangle$ que se repiten tantas veces como aparece en el grafo.

Los grafos son estructuras discretas que constan de vértices y aristas que conectan estos vértices. Hay diferentes tipos de grafos que difieren en la clase y número de aristas que conectan un par de vértices. En esta sección introduciremos algunos conceptos de la teoría de grafos y algunos tipos de grafos de particular interés.

Definición 5.1.1 Un **grafo simple** G es un par $G = (V, E)$ formado por un conjunto finito de **vértices** V y un conjunto E de pares no ordenados de vértices distintos, es decir,

$$E \subset \{\{u, v\} \mid u, v \in V \wedge u \neq v\}.$$

A los elementos de E se les denomina **aristas** (no dirigidas o no orientadas).

y No poseen bucles, es decir, Multiplicidad $(W, W) = 0$, para $\forall W \in V$.

Grafos Dirigidos.

Generalmente se usan paréntesis para representar los **arcos** o **aristas** $A \subseteq V \times V$, aquí el orden de los pares ordenados importa, donde $(V_1, V_2) \neq (V_2, V_1)$.

Grafos NO Dirigidos.

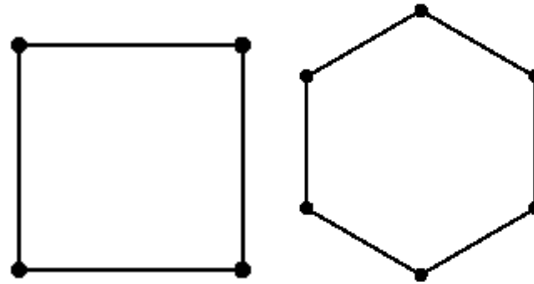
No importa el orden de los pares ordenados y $(V_1, V_2) = (V_2, V_1)$, generalmente se representan de esta manera $\langle V_1, V_2 \rangle = \langle V_2, V_1 \rangle$, pero por simplicidad usaremos los paréntesis.

Grafos Libres.

Un grafo $G = (V, A)$ se dice libre si $A = \emptyset$, es decir, si no tiene arcos.

Grafos Regulares.

Un grafo $G = (V, A)$ es regular de grado k o k -regular si cada vértice tiene grado k ; es decir, un grafo es regular si todos los vértices tienen el mismo grado.



Grafos 2-Regulares

Definición 5.1.3 *Un multigrafo es un par (V, E) formado por un conjunto finito de vértices V y una familia finita E de aristas no orientadas*

$$E = \{e_i\}_{i \in I}$$

donde I es un conjunto finito y $\forall i \in I$ se verifica que $e_i = \{u_i, v_i\}$ con $u_i, v_i \in V$.

Observación 5.1.4 *Nótese que, en un multigrafo, dos aristas distintas pueden conectar los mismos vértices, esto es, que E es una familia y no un conjunto, pudiendo tener elementos repetidos. Nótese también que estamos permitiendo aristas del tipo $\{u, u\}$ denominadas **lazos** o **bucles**.*

Definición 5.1.5 Un **digrafo** es un par (V, E) donde V es un conjunto finito y $E \subset (V \times V) - \Delta$, siendo $\Delta = \{(x, x) : x \in V\}$. A los elementos de V se les denomina **vértices** y a los de E **aristas (dirigidas u orientadas)**.

Ejemplo 5.1.6 $(\{a, b, c\}, \{(a, b), (a, c), (b, c), (c, b)\})$ es un digrafo que podemos representar utilizando puntos para representar los vértices y flechas para representar las aristas, según la figura 5.2. Observar que la arista (b, c) es distinta de la arista (c, b) .

Definición 5.1.7 Un **multidigrafo** es un par (V, E) formado por un conjunto finito de vértices V y una familia finita E de aristas orientadas

$$E = \{e_i\}_{i \in I}$$

donde I es un conjunto finito y $\forall i \in I$ se verifica que $e_i \in V \times V$.

Resumimos en una tabla la terminología que empleamos:

Tipo	Aristas	¿aristas múltiples?	¿lazos?
Grafo simple	No dirigidas	No	No
Multigrafo	No dirigidas	Sí	Sí
Digrafo	Dirigidas	No	No
Multidigrafo	Dirigidas	Sí	Sí

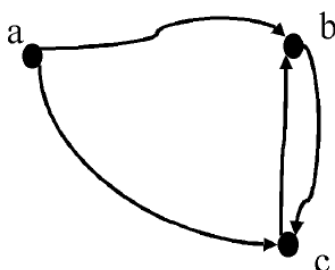


Figura 5.2:

Subgrafo de un Grafo NO Dirigido.

El Grafo $G_1 = (V_1, A_1)$ es subgrafo de si: $G = (V, A)$ si:

- $V_1 \neq \emptyset$ y $V_1 \subseteq V$.
- $A_1 \subseteq A$.

Si $V_1 = V$ entonces el subgrafo se llama subgrafo **“Expandido”** o **“Cobertor”** de G .

Ejemplo: Sea el grafo $G = (V, A)$, tal que $V = \{V_1, V_2, V_3, V_4\}$ y $A = \{(V_1, V_2), (V_3, V_4), (V_2, V_4)\}$, ahora tenemos que G_1 es un grafo tal que $V_1 = \{V_1, V_3\}$ y $A_1 = \{(V_3, V_4)\}$, por lo tanto G_1 es **subgrafo** de G .

Ejemplo 2: Sea el grafo $G = (V, A)$, tal que $V = \{V_1, V_2, V_3, V_4\}$ y $A = \{(V_1, V_2), (V_3, V_4), (V_2, V_4)\}$, ahora tenemos que G_1 es un grafo tal que $V_1 = \{V_1, V_2, V_3, V_4\}$ y $A_1 = \emptyset$, por lo tanto G_1 es **subgrafo expandido** de G .

Definición: Sea $G = (V, A)$ un grafo y sea $U \subseteq V$, donde $U \neq \emptyset$, el subgrafo generado por U se define como $G_U = (V_U, A_U)$, donde:

$$\left. \begin{array}{l} (V_1, V_2) \in A_U \\ \langle V_1, V_2 \rangle \in A_U \end{array} \right\} \quad \text{si } V_1, V_2 \in A_U \wedge \left\{ \begin{array}{l} (V_1, V_2) \in A \\ \langle V_1, V_2 \rangle \in A \end{array} \right.$$

Definición: Un Grafo G es **“Completo”**, si para cada **vértice** incide sobre el $n-1$ **arcos** y no posee **bucles**, esto se denota como:

- $G = K_n$
- $n = |V|$
- $A = V \times V$
- $K_n |A| = \frac{n(n-1)}{2}$, Lema!!

Demostrando el Lema por Inducción Completa.

Caso Base.

$N=1$

L_1 : K_1 posee $|A_1| = 0$, si el grafo tiene un solo vértice, este no puede tener arcos.

Demostrado el Caso Base!!!

Caso General.

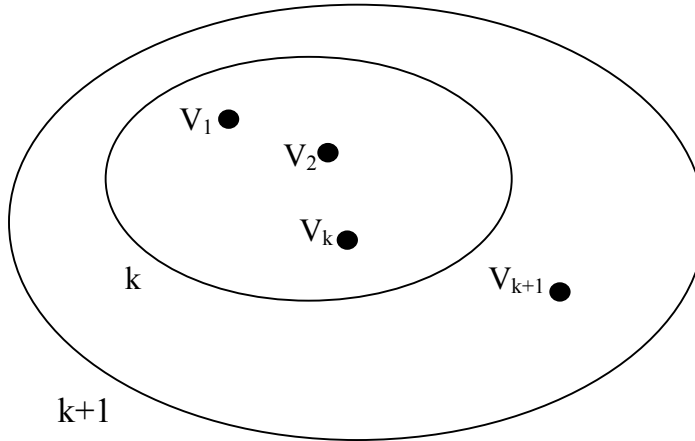
Hipótesis Inductiva ($P(k)$): K_k posee $|A_k| = \frac{k(k-1)}{2}$ arcos. (Se asume como verdad) De cada vértice sale $k-1$ arcos.

Tesis Inductiva ($P(k+1)$): K_{k+1} posee $|A_{k+1}| = \frac{(k+1)((k+1)-1)}{2} = \frac{(k+1)(k)}{2}$

Partiendo de la Hipótesis para llegar a la Tesis, tenemos:

“Agregamos” un nuevo arco para demostrar su validez: $|A_k| + K = \frac{k(k-1)}{2} + k$
 $= \frac{k(k-1) + 2k}{2} = \frac{k^2 - k + 2k}{2} = \frac{k^2 + k}{2} = \frac{(k+1)(k)}{2} \quad l.q.q.d.$

Gráficamente:

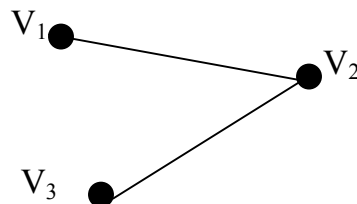


Definición: El Complemento o Grafo Complementario G_c de un Grafo G , es un Grafo cuyo Conjunto de vértices es el mismo que el de G y si dos vértices cualesquiera están relacionados en G_c es porque no lo están en G , es decir, el conjunto de vértices $V = V_c$ y (V_1RV_2) en G_c sii (V_1RV_2) no se da en G .

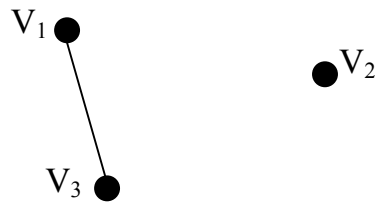
Corolario: Si G_c es el grafo **complementario** de G , entonces:

- $|V_c| = |V| = p$
- $|A_c| = \frac{p(p-1)}{2} - |A|$

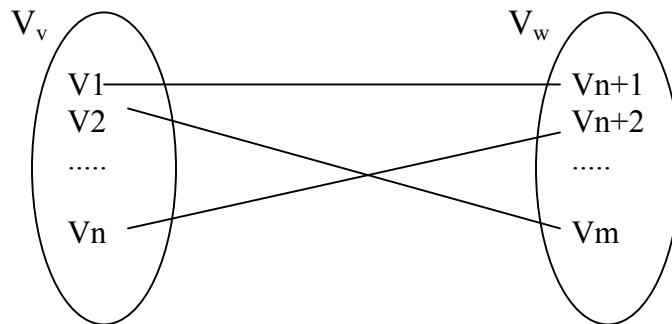
Ejemplo: Sea $G = (V,A)$, tal que: $V = \{V_1, V_2, V_3\}$ y $A = \{(V_1, V_2), (V_2, V_3)\}$, gráficamente:



Entonces, el grafo complemento lo podemos escribir como: $G_c = (V_c, A_c)$, tal que: $V_c = \{V_1, V_2, V_3\}$ y $A_c = \{(V_1, V_3)\}$, gráficamente:



Definición: Un Grafo G es Bipartito o Partible en Dos si se puede definir una partición en V , tal que $V_v, V_w \neq \emptyset$, y $V_v \cap V_w = \emptyset$, y $V_v \cup V_w = V$, siendo: $V_v \subseteq V$ y $V_w \subseteq V$, $\forall (A_v, A_w) \in A$ entonces $A_v \in V_v$ y $A_w \in V_w$, gráficamente:

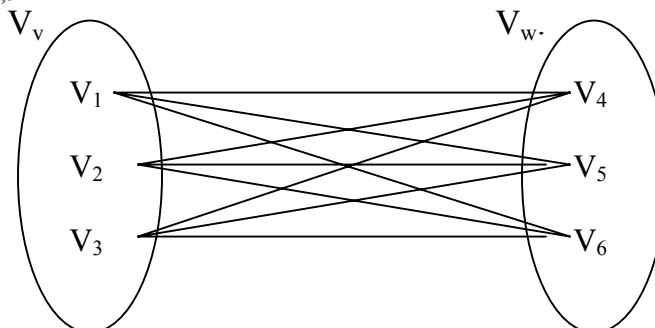


Aquí se ve claramente que los vértices de V_v y V_w están conectados entre si pero no entre los del mismo conjunto, cumpliendo con todas las reglas de un grafo bipartito.

Definición: para que un grafo bipartito sea completo los elementos de V_v tienen que relacionarse con todos y cada uno de los elementos de V_w . Se define como, $G = (V, A)$ es bipartito completo sii G es bipartito y $\forall v \in V_v, \forall w \in V_w$, el arco (v, w) pertenece a A .

Si $|V_v| = n$ y $|V_w| = m$, el grafo bipartito completo se denota como $K_{n,m}$ y $|A| = n \times m$.

Ejemplo: $K_{3,3}$



$$V_v = \{V_1, V_2, V_3\}$$

$V_w = \{V_4, V_5, V_6\}$, y para todo par de vértices de V_v y V_w están relacionados.

Definición 5.1.8 Se dice que dos vértices u y v de un grafo no dirigido $G = (V, E)$ son **adyacentes** si $\{u, v\} \in E$. En ese caso se dice que la arista $e = \{u, v\}$ **conecta** los vértices u y v , que es **incidente** con los vértices u y v , y que los vértices u y v son los **extremos** de la arista e .

Definición 5.1.9 El **grado** de un vértice en un grafo no dirigido es el número de aristas incidentes con él, teniendo en cuenta que un lazo en un vértice contribuye dos veces al grado de ese vértice.

El grado del vértice se puede denotar como $\delta(V_i)$.

Ejemplo 5.1.10 Considérense los grafos G y H de la figura 5.3. En el grafo G se verifica que $gr(a) = 3 = gr(c)$, $gr(b) = 2 = gr(e)$ y $gr(d) = 4$. En el grafo H se verifica que $gr(f) = 3$, $gr(g) = 2$ y $gr(h) = 5$.

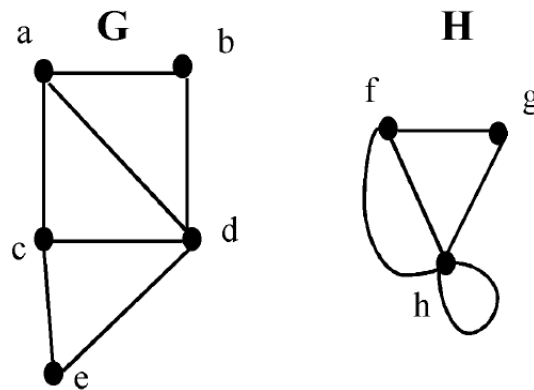


Figura 5.3:

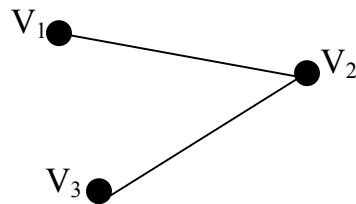
Si un vértice tiene grado cero se dice que es un **vértice aislado**.

Matriz de Adyacencia: Para que dos vértices sean adyacentes tienen que estar conectados entre sí mediante un arco. En una matriz de Adyacencia sus triangulares son iguales, es decir, la matriz es simétrica. Se puede definir como:

Sea $G = (V, A)$ un grafo, donde $|V| = n$. Se define la matriz de adyacencia $Ad(G)$ como la matriz cuadrada de $n \times n$, cuyas entradas son:

$$Ad(G)_{[i,j]} = \begin{cases} 1 & \text{sii } (V_i, V_j) \in A \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Ejemplo: Para el grafo $G = (V, A)$, tal que: $V = \{V_1, V_2, V_3\}$ y $A = \{(V_1, V_2), (V_2, V_3)\}$, gráficamente:



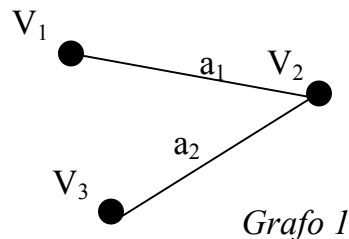
y la matriz de adyacencia asociada a este grafo es:

	V_1	V_2	V_3
V_1	0	1	0
V_2	1	0	1
V_3	0	1	0

Matriz de Adyacencia Pesada: Se emplea para representar grafos pesados, es decir, grafos que tienen sus arcos etiquetados con números que significan medidas en las conexiones de los vértices. Una matriz de adyacencia pesada es una matriz tal que:

$$\text{Adp}(G)_{[i,j]} = \begin{cases} x \in \mathbb{R} & \text{sii } (V_i, V_j) \in A \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Ejemplo: para el grafo $G = (V, A, E)$, tal que: $V = \{V_1, V_2, V_3\}$, $A = \{(V_1, V_2), (V_2, V_3)\}$ y $E = \{a_1, a_2\}$, gráficamente



y la matriz de adyacencia pesada asociada a este grafo es:

	V_1	V_2	V_3
V_1	0	a_1	0
V_2	a_1	0	a_2
V_3	0	a_2	0

Matriz de Incidencia: Es una matriz de incidencia de arcos etiquetados. Para el Grafo 1 la matriz de incidencia asociada a dicho Grafo es:

	a_1	a_2
V_1	1	0
V_2	1	1
V_3	0	1

Formalmente se puede definir como:

Sea $G = (V, A)$ un grafo con n vértices y m aristas, entonces le corresponde una matriz $n \times m$ denominada la matriz de incidencia de G . Si denotamos los vértices de G por $v_1, v_2, \dots, v_n$ y las aristas por $a_1, a_2, \dots, a_m$. Entonces la matriz de incidencia de G es la matriz $M(G) = [x_{ij}]$ donde x_{ij} es el número de veces que la arista a_j incide en el vértice v_i ; los valores son 0, 1 ó 2 (2 en el caso que la arista sea un bucle).

Lema: Sea $G = (V, A)$ un grafo no dirigido. Se verifica que

$$\sum_{v \in V} (\delta(v)) = 2|A|$$

Es decir, la suma de los grados de los vértices es igual a dos veces la cantidad de los arcos de ese grafo.

Teorema: En cualquier grafo, el número de vértices de grado impar es par. Se puede denotar como:

$$V_p = \{v/v \in V \wedge \delta(v) \text{ es par}\}$$

$$V_i = \{v/v \in V \wedge \delta(v) \text{ es impar}\}$$

Por tanto, $|V_i| = 2k, k \in \mathbb{Z}$. *Demostrar este teorema!!!*

Demostración:

Partiendo del lema $\sum_{v \in V} (\delta(v)) = 2|A|$, tenemos que un grupo de vértices son de grado par y otros de grado impar. Por lo que:

$\sum_{v \in V_p} (\delta(v)) + \sum_{v \in V_i} (\delta(v)) = 2|A|$, por lo que $\sum_{v \in V_i} (\delta(v)) = 2|A| - \sum_{v \in V_p} (\delta(v))$, aquí nos damos cuenta que $\sum_{v \in V_p} (\delta(v))$ debe ser un número par ya que la suma de puros números pares me da un número par. Finalmente nos da:

$\sum_{v \in V_i} (\delta(v)) = 2r, r \in \mathbb{Z}$, no hemos terminado, debemos partiendo del grado buscar su cardinalidad, y esto es que si el grado es impar es por es de la forma $2k_i + 1$, sustituimos $\sum_{i=1}^{|V_i|} (2k_i + 1) = 2r$, por propiedades de las sumatorias:

$$\sum_{i=1}^{|V_i|} (2k_i + 1) = 2r \implies 2 \sum_{i=1}^{|V_i|} k_i + \sum_{i=1}^{|V_i|} 1 = 2r \implies |V_i| = 2r - 2 \sum_{i=1}^{|V_i|} k_i \implies |V_i| = 2r - 2r'$$

$$|V_i| = 2k, k = r - r' \text{ l.q.q.d}$$