Estructuras Discretas

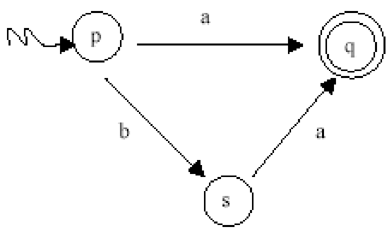
Teoría de Autómata Finito. (3)

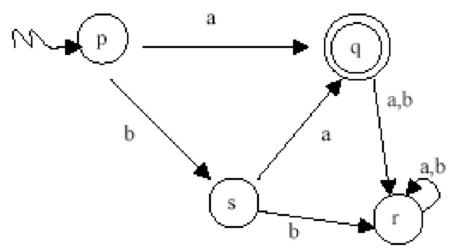
Prof. Miguel Fagúndez

Tipos de Autómatas (Características):

- **Autómatas Incompletos**: A menudo nos encontramos con autómatas para los que no están definidos todas las transiciones. Las situaciones que no están definidas deben ser consideradas como situaciones de *error*, es decir, si una cadena hace llegar al autómata hasta la situación no definida, consideraremos que la cadena no ha sido reconocida por dicho autómata.

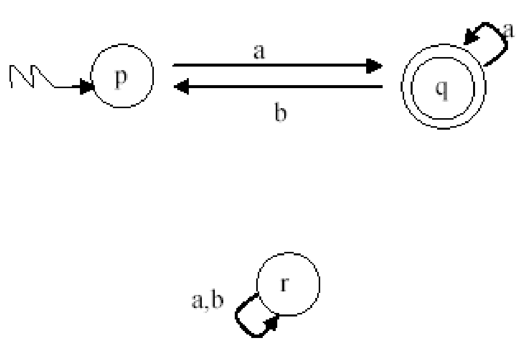
  Si deseamos completar un autómata (no es imprescindible) bastara con añadir un estado *muerto* que reciba todas las transiciones que le faltan al autómata incompleto. En la siguiente figura podemos ver un ejemplo de esta situación. El autómata de la izquierda esta incompleto, pero podemos completarlo transformándolo en el de la derecha.





- **Autómata Conexo**: Un autómata es conexo si todos sus estados son accesibles desde el estado inicial.

- **Parte conexa de un autómata**: Si un autómata no es conexo, se llama parte conexa del autómata al conjunto de estados accesibles desde el estado inicial. Ejemplo de este tipo es la figura siguiente donde el autómata representado en este diagrama no es conexo y su parte conexa es la formada por los estados p y q y por las transiciones que hay entre ellos.



Simplificación de Maquinas:

Sea M = $\{\varphi,\Sigma,\delta,q_0,F\}$ una maquina de Moore, se obtiene la relación R sobre φ como:

$\forall si,sj \in \varphi$ siRsj si solo si $\forall w \in \Sigma^*[(\delta(si,w) \in F \Rightarrow \delta(sj,w) \in F)$ o $(\delta(si,w) \notin F) \Rightarrow \delta(sj,w) \notin F]$. Si siRsj se dice que si y sj son compatibles.

Teorema: Sea M = $\{\varphi,\Sigma,\delta,q_0,F\}$ una maquina de Moore y sea R la relación de compatibilidad en φ:

- R es una relación de equivalencia.
- R es una congruencia de maquinas.

Teorema: Sea M = $\{\varphi,\Sigma,\delta,q_0,F\}$ una maquina de Moore, sea R la relación de equivalencia definida como relación de compatibilidad y sea M/R la maquina cociente de M, según R, entonces:

$$L(M/R) = L(M)$$

Vamos a definir ahora la relación:

R: $\varphi \longrightarrow \varphi$
$\forall s,t \in \varphi$ sRt si solo si $\forall w \in \Sigma^*[(\delta(s,w) \in F \Rightarrow \delta(t,w) \in F)$ o $(\delta(s,w) \notin F) \Rightarrow \delta(t,w) \notin F]$. Es una relación de compatibilidad.

Teorema: Si R es de equivalencia y R es congruencia de maquinas, entonces con R puedo hallar una maquina cociente M/R.

Los autómatas vistos anteriormente también se le conoce como Autómatas Finitos Deterministas o AFD. El nombre determinista viene de la forma en que esta definida la función de transición (tabla de transición de estados), como:

- Si en un instante t la maquina esta en el estado q.
- Lee el símbolo x
- Entonces, en el instante siguiente t + 1 la maquina cambia de estado y sabemos con seguridad cual es el estado al que cambia: $\delta(q,x)$

En resumen, es una maquina analizadora de cadenas que acepta las cadenas contenidas en su diagrama de transición, y rachaza las restantes. Se conoce también como determinista porque siempre existe una y solo una transición posible en cada instante de tiempo t.

Representación de los Autómatas:

- Grafo de Transición de Estados.
- Tabla de transición de Estados.

Se puede definir formalmente ambas representaciones, como sigue:

Grafo de Transición de Estados:

Sea G = (V,A) un grafo, tal que:

V = {qi/ qi es un estado del autómata, $i \in I$}; V = Q
A = {(qi,qj)/ $qi,qj \in V$ y $\exists x \in \Sigma$ tal que $\delta(qi,x) = qj$}

Es decir,

- Los nodos se etiquetan con los estados.
- Habrá un arco etiquetado con x desde el nodo qi al qj si $\delta(qi,x) = qj$
- El estado inicial tiene un arco entrante no etiquetado
- Los estados finales están rodeados de un doble circulo.

Tabla de Transición de Estados: es una matriz bidimensional cuyos elementos proporcionan el resumen de un diagrama de transición.

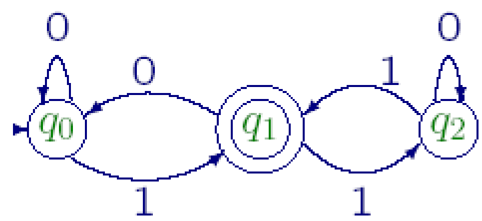
- Cada fila corresponde a un estado $q \in \varphi$, por lo que hay tantas filas como estados.
- Cada columna corresponde a un símbolo de entrada $x \in \Sigma$
- En la posición (q,x) esta el estado que determine $\delta(q,x)$
- El estado inicial se precede del símbolo $\rightarrow$
- Cada estado final se precede del símbolo #

Ejemplo:

M = ({q0, q1, q2} , {0, 1} , δ, q0, {q1}),
$\delta : \{q0, q1, q2\} \times \{0, 1\} \rightarrow \{q0, q1, q2\}$
$\delta(q0, 0) = q0$ $\delta(q0, 1) = q1$ $\delta(q1, 0) = q0$ $\delta(q1, 1) = q2$ $\delta(q2, 0) = q2$ $\delta(q2, 1) = q1$

Tabla y diagrama de Transición de estados:

δ	0	1
→ q0	q0	q1
#q1	q0	q2
q2	q2	q1



Autómatas Reconocedores:

Sea M = (φ,Σ,S,δ,q_0,F) un autómata reconocedor.

Se define Mx(q0):
Mx(q0) = qi, dada una palabra x∈Σ*, al utilizar x como entrada al autómata o maquina M (entra un símbolo a la vez), causa que el estado inicial q0 se mueva o termine en el estado qj.

Se define L(M)⊆Σ*:
L(M), es el conjunto de todas las palabras x∈Σ*, es decir, es el conjunto de todas las palabras que "reconoce" o "acepta" el autómata M.

Al usar M es posible determinar el conjunto de palabras de Σ* que pertenece a L(M), siendo L(M) el lenguaje de maquina o del autómata M (como se mostró anteriormente). A partir de aquí podemos concluir que todo lenguaje L es un subconjunto de Σ* y todo autómata M tiene lenguaje que reconoce L(M).

Un Autómata Finito también cumple lo siguiente:

- La configuración de un autómata finito en cierto instante viene dada por el estado del autómata en ese instante y por la porción de cadena de entrada que le queda por leer o procesar.
- El comportamiento futuro de la maquina depende solo de la configuración actual.
- La porción de cadena leída hasta llegar al estado actual no tiene influencia en el comportamiento futuro de la maquina.
- Los estados resumen o memorizan la información procesada.
- Formalmente una configuración de un AF es un elemento: (q,w)∈(φ x Σ*)

Tipos de Configuraciones especiales:

- Configuración Inicial: (q0,w), donde q0 es el estado inicial y w la palabra de entrada.
- Configuración de parada: cualquier configuración en la que le autómata puede parar su ejecución, bien porque se haya procesado toda la entrada o bien porque se haya llegado a una situación donde no es aplicable ninguna transición.

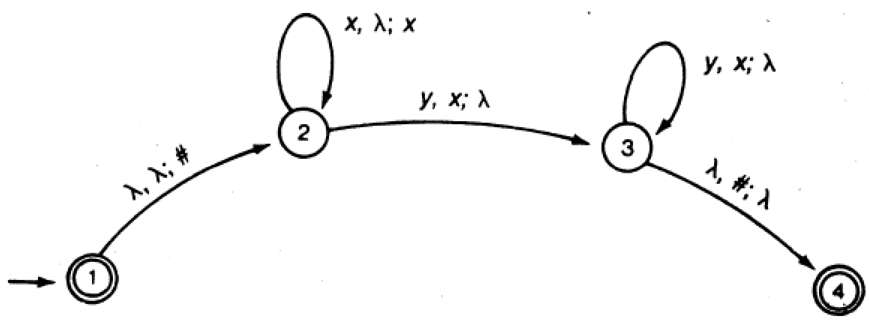
- Configuración de aceptación: (qf, cadena), donde qf es un estado final del autómata. Una vez alcanzada esta configuración el autómata acepta la palabra.

<u>Autómata de Pila</u>:

Son autómatas finitos con una memoria en forma de pila. Simbólicamente Mp = {p, x, s; q, y} donde:

- p, q son estados
- x símbolos de entrada
- s,y símbolos de la pila (transición y estados finales)

Ejemplo de un diagrama de transición de un autómata de pila:



Proceso de reconocer a una cadena:

- Se parte del estado inicial y la pila vacía.
- Se lee la cadena símbolo a símbolo de izquierda a derecha.
- Por cada símbolo leído se produce una transición desde el estado actual a otro a través de la flecha cuyo símbolo de entrada coincida con el símbolo leído, siempre y cuando la cabecera de la pila coincida con el símbolo de pila que figura a la izquierda del punto y coma.
- El autómata puede realizar transiciones entre estados sin consumir símbolos de entrada.
- La cadena es reconocida si es posible que el autómata alcance un estado de aceptación, estando completamente consumida la cadena de entrada.