

Estructuras Discretas

Teoría de Autómata Finito. (1)

Prof. Miguel Fagúndez

Definición de Autómata:

Es una quintupla $M = \{\varphi, \Sigma, \delta, q_0, F\}$ donde:

φ : es un conjunto finito de estados.

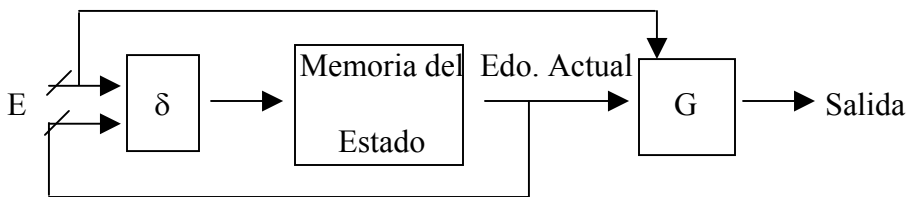
Σ : es un alfabeto de entrada

$\delta: \varphi \times \Sigma \longrightarrow \varphi$

q_0 : es un $q \in \varphi$ conocido como estado inicial

$F: F \subseteq \varphi$ es un conjunto de estados finales

Autómata como maquina de estados finitos (Maquina de Mealy y de Moore):

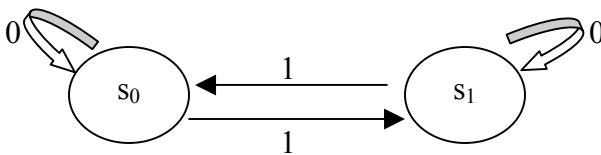


Maquina de Mealy

Ejemplo: Sea $\varphi = \{s_0, s_1\}$, $\Sigma = \{0, 1\}$ y sea δ definida por la tabla de transición de estados.

δ	0	1
s_0	s_0	s_1
s_1	s_1	s_0

$q_0 = s_0$ y $F = \{s_0\}$. Gráficamente:



El grafo asociado, llamado diagrama de transición de estados, estaría definido como:

Sea $G = (V, A)$ un grafo donde:

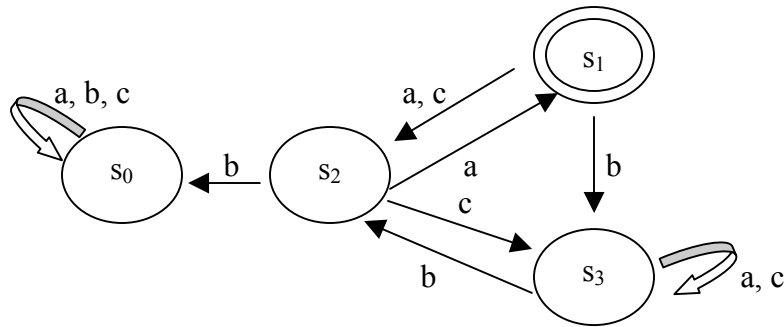
$V = \{s_i / s_i \text{ es un estado del autómata}\}$

$A = \{(s_i, s_j) / s_i, s_j \in \varphi \text{ y } \exists x \in \Sigma \text{ tal que } \delta(s_i, x) = s_j\}$

Ejemplo2: Sea $M = \{\varphi, \Sigma, \delta, q_0, F\}$ donde $\varphi = \{s_0, s_1, s_2, s_3\}$; $\Sigma = \{a, b, c\}$ y la función de transición de estado δ como:

δ	a	b	c
s_0	s_0	s_0	s_0
s_1	s_2	s_1	s_2
s_2	s_1	s_0	s_3
s_3	s_3	s_2	s_3

$q_0 = s_2$ y $F = \{s_1, s_3\}$. Gráficamente:



Maquinas y Lenguajes:

Sea Σ un conjunto finito de símbolos, llamamos a Σ alfabeto. Sobre Σ podemos definir palabras. Así, llamamos Σ^* al conjunto de todas las palabras que se pueden formar con K símbolos de Σ ($K \geq 0$). Para $K = 0$, ϵ denota la palabra vacía.

$$\Sigma^* = \epsilon \cup \Sigma \cup \Sigma^2 \cup \Sigma^3 \dots \cup \Sigma^n \dots$$

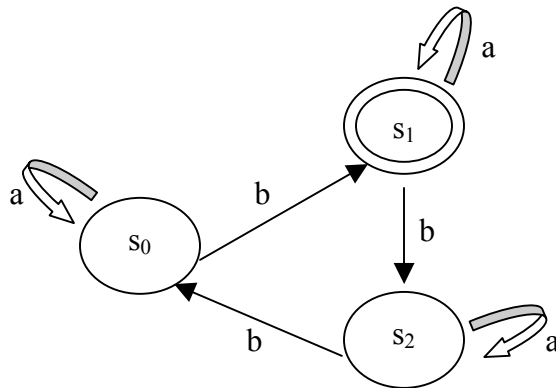
Finalmente, a cualquier subconjunto de Σ^* lo llamamos lenguaje. Es decir, un lenguaje de cualquier conjunto finito de palabras. Existe un relación muy estrecha entre autómatas (específicamente maquinas de Moore) y lenguajes.

Pensemos un momento en el siguiente autómata:

$$\Sigma = \{a, b\}$$

$$F = \{s_1\}$$

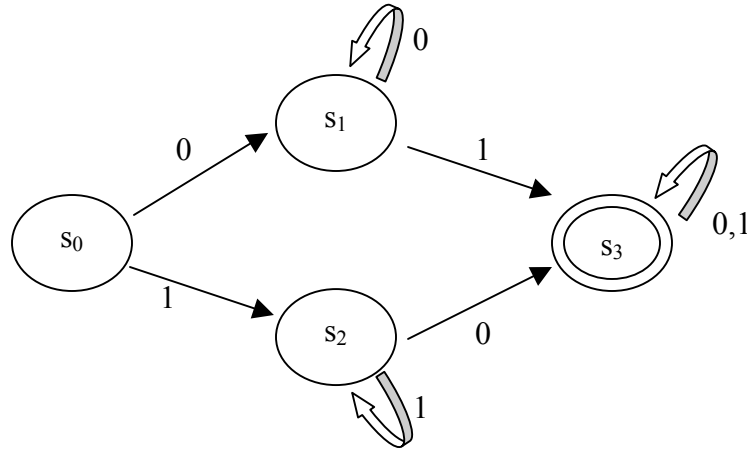
$q_0 = s_0$. Gráficamente:



Si este autómata recibe una secuencia finita de símbolos de Σ , o sea, recibe palabras de Σ^* . Cuando el autómata queda en un estado de F ? Es fácil ver que $\delta(w, s_0) = s_1 \exists w \in \Sigma^*$ que vaya al estado final, por lo que $L(M) = \{w / w \in \Sigma^* \text{ y } w \text{ incide en } F\}$, se dice que L es un lenguaje reconocido por el autómata M .

Ejemplo:

Construya una maquina de Moore M que acepte las secuencias de entrada w que contenga las secuencias 01 o 10. Es decir, que no contengan solo ceros o solo unos. (con $\Sigma = \{0,1\}$).



Acabamos de realizar el autómata de forma Grafica, debemos ahora hacerlos a través de M . (en su estado formal).

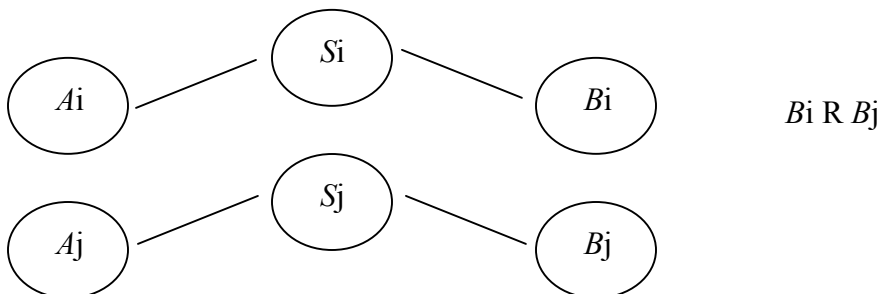
Congruencia de Maquinas.

Sea $M = \{\varphi, \Sigma, \delta, q_0, F\}$ una maquina de Moore y supongamos que R es una relación de equivalencia en φ . Se dice que R es una congruencia de maquinas en M si y solo si :

$$\forall s_i, s_j \in \varphi \{s_i R s_j \Rightarrow \delta(s_i, x) R \delta(s_j, x), \forall x \in \Sigma\}$$

es decir, pares de estados equivalentes según R producen siempre pares también equivalentes para cualquier valor de entrada.

$$s_i R s_j \Rightarrow \begin{matrix} \delta(s_i, x) \\ \delta(s_j, x) \end{matrix}, \text{ están relacionadas } \forall x \in \Sigma$$



Ahora bien, si R es una congruencia de maquinas en M , podemos hallar el conjunto cociente inducido por R sobre φ .

$$\varphi/R = \{[s] / s \in \varphi\}, [s] = \{s, t, u, v\}$$

Luego, para cualquier entrada $x \in \Sigma$, se define la relación ϕ_x como:

$$\phi_x = \{([s_i], \delta([s_i, x]))\} / \phi_x: \varphi/R \longrightarrow \varphi/R.$$

$$\begin{aligned} \text{Si } [s_i] = [s_j] &\Rightarrow s_i R s_j \Rightarrow \delta(s_i, x) R \delta(s_j, x) \\ &\Rightarrow [\delta(s_i, x)] = [\delta(s_j, x)] \end{aligned}$$

$$\text{Así, } \phi([s_i], x) = [\delta(s_i, x)] \quad \forall [s_i] \in \varphi/R.$$

Si definimos una función de transición $\phi = \{\phi_x / x \in \Sigma\}$, entonces podemos crear una nueva quintupla $M/R = (\varphi/R, \Sigma, \phi, q_0^*, F^*)$ y decimos que es la Maquina Cociente de M (también se denota como M^*). En general, una maquina cociente será mas simple que su original, pero equivalente en funcionamiento.

Ejemplo: Sea $M = \{\varphi, \Sigma, \delta, q_0, F\}$ donde, $\varphi = \{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4, s_5\}$, $\Sigma = \{a, b\}$ y δ esta definida como:

δ	a	B
s_0	s_0	s_1
s_1	s_1	s_0
s_2	s_2	s_4
s_3	s_5	s_2
s_4	s_1	s_3
s_5	s_3	s_2

Y adicionalmente nos definen una cierta relación R en φ como:

R	s_0	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5
s_0	1		1			
s_1		1		1		1
s_2	1		1			
s_3		1		1		1
s_4					1	
s_5		1		1		1

R es una relación de equivalencia, vamos a hallar φ/R .

$$\varphi/R = \{[s_0], [s_1], [s_4]\}, \text{ donde } [s_0] = \{s_0, s_2\}, [s_1] = \{s_1, s_3, s_5\}, [s_4] = \{s_4\}.$$

Ahora vamos a verificar que R es de Congruencia:

R es congruencia de maquina si y solo si

$$\forall s_i, s_j \in \varphi \{s_i R s_j \Rightarrow \delta(s_i, x) R \delta(s_j, x), \forall x \in \Sigma\}$$

entonces tenemos que:

$$*) s_0Rs_2 : \left. \begin{array}{l} \delta(s_0,a) = s_0. \\ \delta(s_2,a) = s_2. \end{array} \right\} s_0Rs_2$$

$$\left. \begin{array}{l} \delta(s_0,b) = s_4. \\ \delta(s_2,b) = s_4. \end{array} \right\} s_4Rs_2$$

$$*) s_1Rs_3 : \left. \begin{array}{l} \delta(s_1,a) = s_1. \\ \delta(s_3,a) = s_5. \end{array} \right\} s_1Rs_3$$

$$\left. \begin{array}{l} \delta(s_1,b) = s_0. \\ \delta(s_3,b) = s_2. \end{array} \right\} s_0Rs_2$$

·
·
·
·

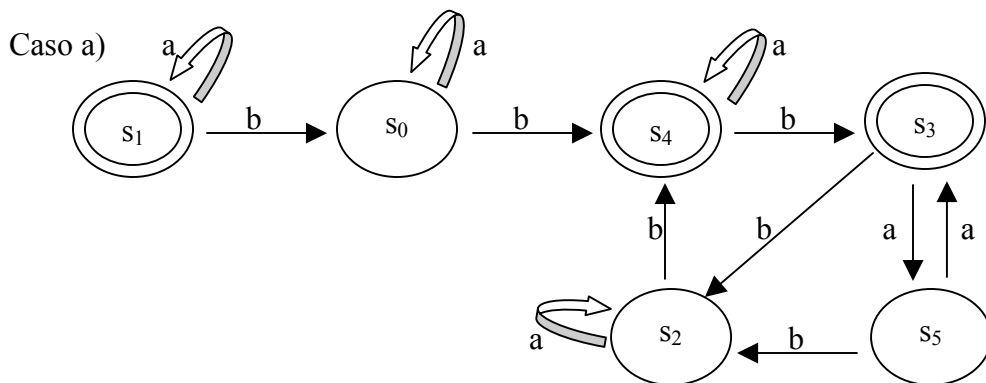
y así sucesivamente, en definitiva podemos afirmar que R es una congruencia de maquina, y al mismo tiempo R define una maquina cociente $M/R = \{\varphi/R, \Sigma, \phi, q_0^*, F^*\}$, donde ϕ queda definida como:

ϕ	a	b
$[s_0]$	$[s_0]$	$[s_4]$
$[s_1]$	$[s_1]$	$[s_0]$
$[s_4]$	$[s_4]$	$[s_1]$

a) $q_0 = s_1$.
 $F = \{s_1, s_3, s_4\}$, pero la nueva relación nos da que:

b) $q_0^* = [s_1]$.
 $F^* = \{[s_1], [s_4]\}$.

Comparando Gráficamente:



Caso b)

