

Estructuras Discretas

Teoría de Relaciones.

Prof. Miguel Fagúndez

Definición Formal (Teoría de Relaciones I)

Relación Binaria:

Una relación binaria R definida en los conjuntos A_1 y A_2 es un subconjunto del producto cartesiano de A_1 a A_2 , es decir,

$R \subseteq A_1 \times A_2$, tal que los elementos de R cumplen con una propiedad $P(x_1, x_2)$; donde $x \in A_1 \wedge x_2 \in A_2$.

Por lo tanto:

Si $T \subseteq A_1 \times A_2$ entonces T es una relación entre A_1 y A_2 .

Si tenemos una relación binaria entre los conjuntos A y B, pero $A = B$, se dice que es una relación definida en el mismo conjunto. En este caso, $R \subseteq A \times A$ o $R \subseteq A^2$.

En una relación binaria podemos decir que:

Notación:

$(x, y) \in R$	xRy
“el par (x, y) pertenece a la relación R ”	“ x está relacionado con y ”

Relación n-aria:

Una relación n-aria R definida en los conjuntos $A_1, A_2, \dots, A_n$ es un subconjunto del producto cartesiano de A_1 a A_n , es decir, $R \subseteq A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$, tal que los elementos de R cumplen con una función proposicional $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$; donde $x_1 \in A_1 \wedge x_2 \in A_2 \wedge \dots \wedge x_n \in A_n$.

Si $n = 2$, la relación se llama relación binaria.

Si $n = 3$, la relación se llama ternaria.

Notación:

$(x_1, x_2, \dots, x_n) \in R$	$(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) R x_n$
“la n-upla $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ pertenece a R ”	“la (n-1)-upla $(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$ está relacionada con x_n ”

Relaciones de Equivalencia:

Una relación de equivalencia es aquella que cumple con las siguientes propiedades:

Propiedad Reflexiva:

$\forall x [x \in A \rightarrow (x, x) \in R]$, es decir, todo elemento de A se relaciona consigo mismo.

Propiedad Simétrica:

$\forall x \forall y [(x, y \in A \wedge (x, y) \in R) \rightarrow (y, x) \in R]$, es decir, si un elemento de A se relaciona con otro elemento, este ultimo también se debe relacionar con el primero.

Propiedad Transitiva:

$\forall x \forall y \forall z [(x, y, z \in A \wedge (x, y) \in R \wedge (y, z) \in R) \rightarrow (x, z) \in R]$, es decir, si un elemento de A se relaciona con otro elemento y este a su vez se relaciona con un tercero, entonces el primero se debe relacionar con el tercero.

Clases de Equivalencia:

Las relaciones de equivalencias agrupan elementos que tienen características semejantes o comparten alguna propiedad. Formalmente podemos decir que una clase de equivalencia se puede escribir como sigue:

$$[a] = \{x / x \in A \wedge xRa\}$$

Conjunto Cociente:

Es una familia de conjunto formado por las clases de equivalencias. Formalmente un conjunto cociente formado de un conjunto A se puede escribir como:

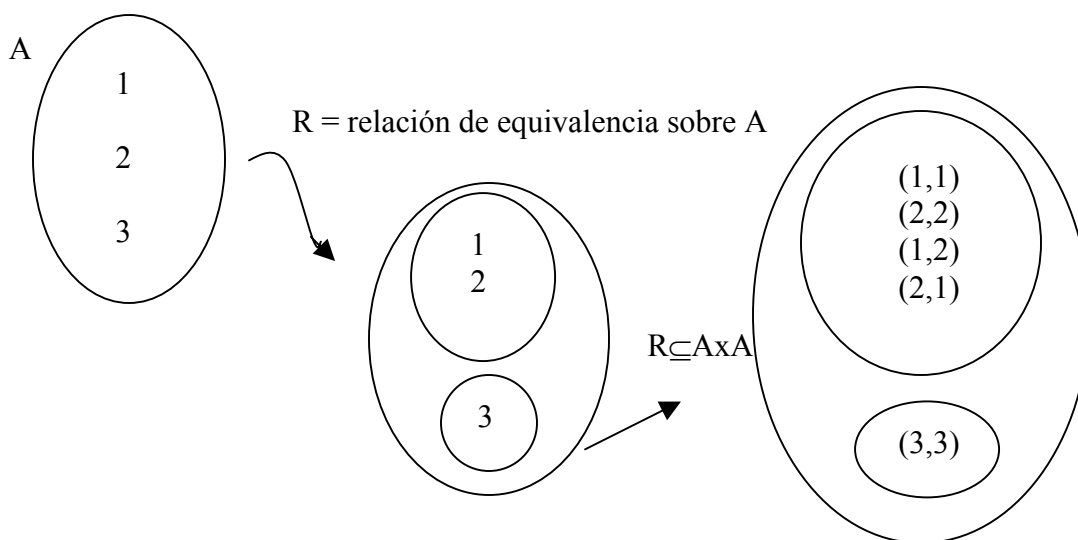
$$A/R = \{A_i / A_i = [a] , a \in A, i \in I \}$$

Conjunto Partición de un Conjunto Cociente:

Un conjunto cociente contiene clases de equivalencias y es una familia de conjuntos, un conjunto partición no es mas que un conjunto que cumple que:

1. $\Pi(A_i) \neq \emptyset$
2. $\cup \Pi(A_i) = A$
3. $\cap \Pi(A_i) = \emptyset$

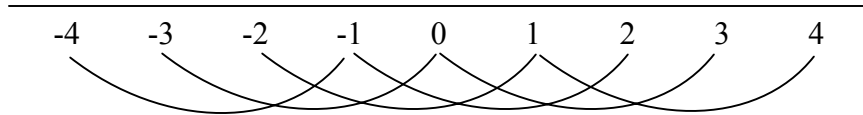
Por ejemplo:



Relación de Congruencia Modulo n.

Modulo $n \in \mathbb{Z}$ y $n \geq 2$ (n debe ser un valor fijo).

Idea Intuitiva: xRy si y solo si x, y tienen una distancia que los separa de n enteros o múltiplos de n . Gráficamente (para $n = 3$):



Formalmente:

$x, y \in \mathbb{Z}$: xRy si y solo si $x - y = 3k$, $k \in \mathbb{Z}$, la notación que generalmente se usa es:
$$x \equiv y \pmod{n}$$

Definición de Relación de Congruencia Modulo n.

Sea $R \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ y sea n un entero fijo, $n \geq 2$. R recibe el nombre de relación de congruencia modulo n , si R esta defina como:

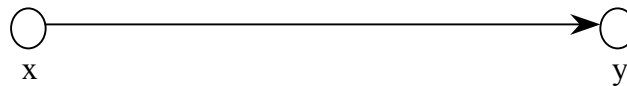
$$R = \{(x,y) / x, y \in \mathbb{Z} \wedge x - y = nk, k \in \mathbb{Z} \}$$

La relación de congruencia modulo n es una relación de equivalencia. **Demostrar!!!**

Representación Grafica y Matricial de las Relaciones.

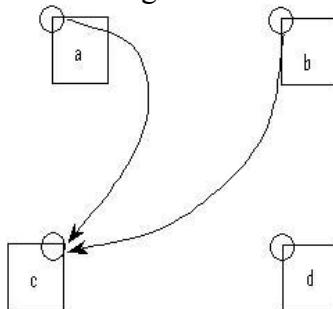
Grafos Dirigidos o Dígrafos:

Un dígrafo es un par $G = (A, R)$ donde A es un conjunto y R es una relación definida en A , donde cada elemento x de A se coloca en un vértice (nodo, punto) y por cada $(x, y) \in R$ se coloca un arco (línea, eje) dirigido que une a x con y .



$x \in A \wedge y \in A$, entonces $(x,y) \in R$.

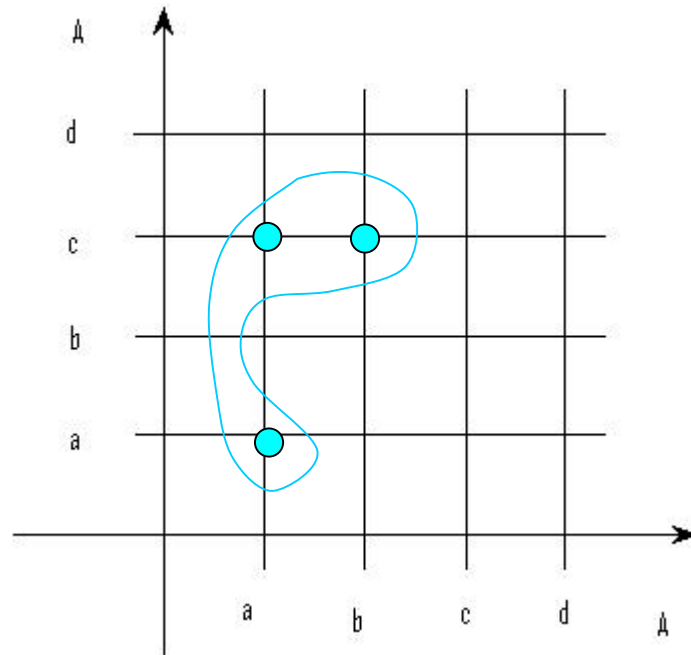
Ejemplo: Sean $A = \{a, b, c, d\}$ y $R \subseteq A \times A$, donde $R = \{(a,c), (b,c), (a,a)\}$ Una representación de R mediante Grafos Dirigidos es:



Gráficos Cartesianos:

Sea $R \subseteq A \times B$, la representación cartesiana de R se realiza colocando los elementos de A como abscisas y los elementos de B como ordenadas de un sistema de ejes cartesianos. Se trazan líneas horizontales y verticales desde cada elemento obteniendo los pares de $A \times B$. Se resaltan con puntos los elementos de R .

Ejemplo: Sean $A = \{a, b, c, d\}$ y $R \subseteq A \times A$, donde $R = \{(a, c), (b, c), (a, a)\}$. La representación de R mediante Gráficos Cartesianos es:



Matriz de la Relación:

Sea $R \subseteq A \times B$, la representación matricial de R en una matriz M se realiza colocando los elementos de A como filas y los elementos de B como columnas.

Luego, para la i -ésima fila y la j -ésima columna de M , denotada como $M(i, j)$, tenemos:

$$M(i, j) = \begin{cases} 1 & \text{Si } (i, j) \in R \\ 0 & \text{Si } (i, j) \notin R \end{cases}$$

Por lo tanto, M es de dimensión $m \times n$, con $m = |A|$ y $n = |B|$.

Ejemplo: Sean $A=\{a, b, c, d\}$ y $R\subseteq A\times A$, donde $R=\{(a,c), (b,c), (a,a)\}$ La representación de R mediante la Matriz de la Relación es:

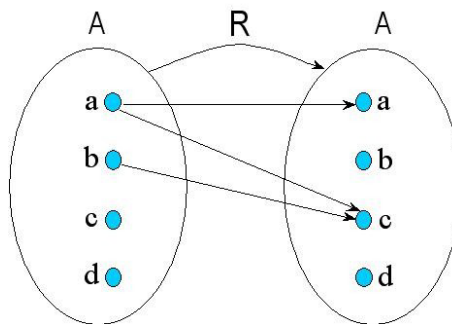
$$\begin{array}{c}
 \text{M} \\
 \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array}
 \end{array}
 \begin{pmatrix}
 & a & b & c & d \\
 a & 1 & 0 & 1 & 0 \\
 b & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 c & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 d & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{pmatrix}
 \begin{array}{c}
 A \\
 \\
 \\
 \\
 A
 \end{array}$$

4×4

Diagrama Sagital:

Sea $R\subseteq A \times B$, la representación en diagrama sagital de R se realiza representando los conjuntos A y B en diagrama de Venn. Luego, por cada par $(x, y)\in R$, se traza una línea de A a B .

Ejemplo: Sean $A=\{a, b, c, d\}$ y $R\subseteq A\times A$, donde $R=\{(a,c), (b,c), (a,a)\}$ La representación de R mediante Diagrama Sagital es:



Relación Inversa.

Sea una relación binaria R entre los conjuntos A y B , es decir,

$$R = \{(x, y) / x\in A \wedge y\in B \wedge P(x, y)\} \quad R \subseteq A\times B$$

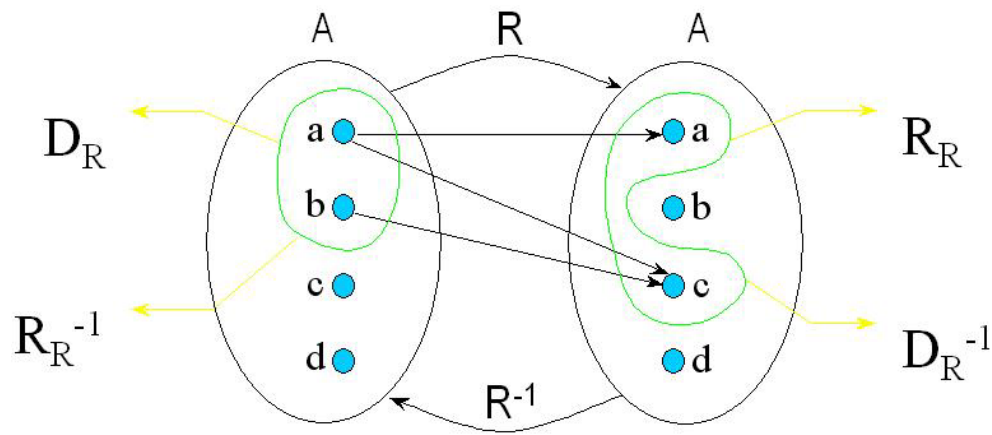
, se define la relación inversa como:

$$R^{-1} = \{(y, x) / (x, y)\in R\} \quad R^{-1} \subseteq B\times A$$

$$D_R = R_R^{-1}$$

$$R_R = D_R^{-1}$$

Ejemplo: Sean $A = \{a, b, c, d\}$ y $R \subseteq A \times A$, donde $R = \{(a,c), (b,c), (a,a)\}$, La representación de R mediante Diagrama Sagital es:



Composición de Relaciones.

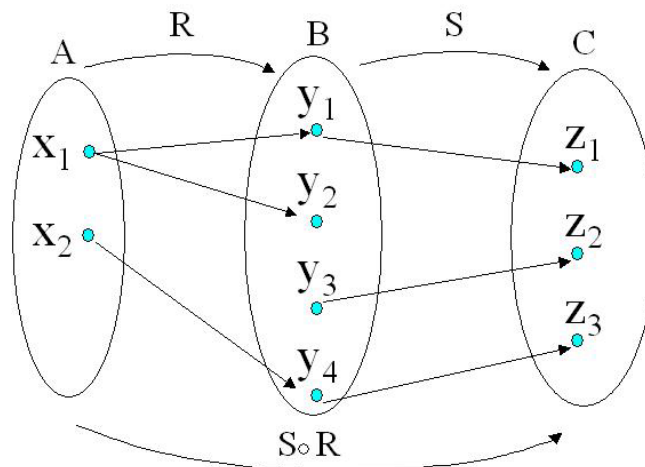
Idea Intuitiva:

Sean las relaciones $R: A \rightarrow B$ y $S: B \rightarrow C$, donde los conjuntos son: $A = \{x_1, x_2\}$, $B = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ y $C = \{z_1, z_2, z_3\}$. Supongamos que R y S son:

$$R = \{(x_1, y_1), (x_1, y_2), (x_2, y_4)\}$$

$$S = \{(y_1, z_1), (y_3, z_2), (y_4, z_3)\}$$

En Diagrama Sagital se tiene que:



$$S \circ R \subseteq A \times C$$

$$S \circ R = \{(x_1, z_1), (x_2, z_3)\}$$

Definición:

Sean A, B y C tres Conjuntos y sean $R: A \longrightarrow B$ y $S: B \longrightarrow C$, a partir de las relaciones R y S, es posible definir una relación entre A y C, llamada composición entre R y S, mediante:

$$S \circ R = \{(x, z) / x \in A \wedge z \in C \wedge \exists y \in B [(x, y) \in R \wedge (y, z) \in S]\}$$
$$x (S \circ R) z \leftrightarrow \exists y [xRy \wedge ySz]$$

Propiedades de la Composición de Relaciones.

Sean las relaciones R de A a B, S de B a C y T de C a D. Y sean además las relaciones S₁ y S₂ de B a C:

Asociatividad: $(T \circ S) \circ R = T \circ (S \circ R)$

Inversa: $(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}$

Distributiva:

- $(S_1 \cup S_2) \circ R = (S_1 \circ R) \cup (S_2 \circ R)$
- $(S_1 \cap S_2) \circ R \subseteq (S_1 \circ R) \cap (S_2 \circ R)$
- $T \circ (S_1 \cup S_2) = (T \circ S_1) \cup (T \circ S_2)$
- $T \circ (S_1 \cap S_2) \subseteq (T \circ S_1) \cap (T \circ S_2)$