Estructuras Discretas

Teoría de Conjuntos.

Prof. Miguel Fagúndez

Definiciones Básicas:

Definición de Conjunto:
Un conjunto es una agrupación o colección bien definida de objetos, donde cada objeto es un elemento o miembro del conjunto y este cumple con alguna propiedad matemática.

Un conjunto se denota con una letra mayúscula A, B, C.. o enumerando sus elementos separados por comas y delimitándolos con llaves {}. Los elementos de un conjunto se denotan con letras minúsculas, amenos que dichos elementos sean a su vez conjuntos (Familia de Conjuntos).

Noción de pertenencia:
Sea x un elemento cualquiera y A un conjunto. Si es cierto que x es un elemento de A, se dice que x pertenece a A y se denota como $x \in A$. Si no es cierto, entonces se dice que x no pertenece a A y se denota como $\neg(x \in A)$ o $x \notin A$.

Definición de Cardinalidad:
El numero de elementos o tamaño de un conjunto A se llama Cardinalidad de A, y se denota como $|A|$.
$|A|$ = numero de elementos de A.

Conjunto Universal o Conjunto Universo:
Se llama universo o conjunto universal a aquel conjunto dado explícitamente o implícitamente del cal se toman los elementos para describir un conjunto particular de interés. El conjunto universal se denota convencionalmente como U.

Conjunto Vacío:
Se define conjunto vacío como el conjunto que no tiene elementos, el cual se denota como $\varnothing$. De esta definición podemos deducir que $\varnothing=\{\}$ y además $|\varnothing|=0$. Así, cada elemento que pertenece al universo no pertenece al vacío. Formalmente: $\forall x[x \in U \rightarrow x \notin \varnothing]$.

Descripción de un conjunto:
Un conjunto cualquiera A se puede describir por extensión o por comprensión. La descripción por extensión consiste en dar explícitamente los elementos que pertenecen al conjunto, esto es, enumerar los elementos del conjunto.

La descripción por comprensión consiste en dar una especificación implícita de los elementos del conjunto mediante una función proposicional y una variable libre. El conjunto así descrito, se define tomando aquellos elementos del universo del discurso que hacen la función proposicional verdadera.

Igualdad:
Dos conjuntos A y B son iguales si y solo si tienen los mismos elementos, es decir, si y solo si todo elemento de A es elemento de B y todo elemento de B es elemento de A. Expresado formalmente:

$A = B \leftrightarrow \forall x[x \in A \leftrightarrow x \in B]$

Inclusión:
Sean A y B conjuntos. Se dice que A es subconjunto de B y se denota como $A \subseteq B$, si y solo todo elemento de A es elemento de B. Para expresar inclusión también puede decirse que A esta incluido o contenido en B o B contiene a A. Formalmente:

$A \subseteq B \leftrightarrow \forall x[x \in A \rightarrow x \in B]$

Inclusión propia:
Sean A y B conjuntos. Se dice que A es subconjunto propio de B , y se denota $A \subset B$, si solo si todo elemento de A es elemento de B y existe al menos un elemento de B que no es elemento de A. Formalmente:

$A \subset B \leftrightarrow \{\forall x[x \in A \rightarrow x \in B] \wedge \exists x[x \in B \wedge x \notin A]\}$

Entonces, la inclusión propia plantea la situación de que $A \subseteq B$, pero $A \neq B$.

PROPIEDADES DE LOS CONJUNTOS.

Los siguientes teoremas expresan algunas propiedades con respecto ala igualdad e inclusión de conjuntos.

Teorema 1: Sean A y B subconjuntos de U, entonces $A=B$ si y solo si $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$.

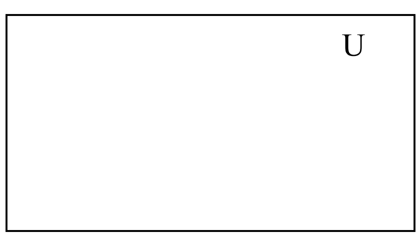
Teorema 2: Para cualquier conjunto A, se cumple que $\varnothing \subseteq A$.

Teorema 3: Sean A, B y C subconjuntos de U. Si $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$, entonces $A \subseteq C$.

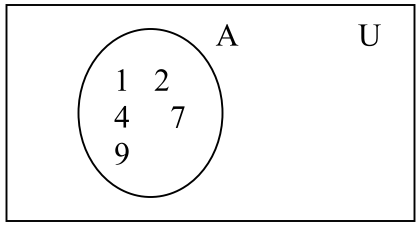
Demostrar todos estos teoremas!!

DIAGRAMAS DE VENN

Son esquemas que nos permiten hacer la representación grafica de los conjuntos. El conjunto universo U, se representa por un rectángulo o por un cuadrado.



Los conjuntos que se encuentran en el universo, se representan por líneas curvas cerradas. De este modo los elementos de un conjunto dado se pueden colocar dentro del área demarcada por la línea cerrada que define al conjunto.



OPERACIONES CON CONJUNTOS.

Unión:
La unión de A y B se define como el conjunto de los elementos que pertenecen a A o a B o a ambos conjuntos a la vez. El operador de la unión se denota como $\cup$. Formalmente se define como:

$A\cup B = \{x / x\in A \vee x\in B\}$, expresado de otra forma:

$\forall x[x \in (A\cup B) \leftrightarrow (x\in A \vee x\in B)]$.

Intersección:
La intersección de A y B se define como el conjunto de los elementos que pertenecen a ambos conjuntos a la vez. Se denota como $\cap$. Formalmente:

$A\cap B = \{ x / x\in A \wedge x\in B \}$, expresado de otra forma:

$\forall x[x \in (A\cap B) \leftrightarrow (x\in A \wedge x\in B)]$. Los conjuntos A y B cuya intersección es el conjunto vacío se denominan *conjuntos disjuntos*.

FAMILIA DE CONJUNTOS.

Una familia o coleccion de conjunto es un conjunto cuyos elementos son conjuntos. Una familia indexada (o indizada) de conjuntos es aquella que dado un conjunto discreto de indices I, tal que $i\in I$ se define el conjunto Ai, entonces $F = \{Ai / i\in I\}$ es una familia indexada de conjuntos, donde I es el conjunto de índices de la familia.

GENERALIZACIÓN DE LA UNION Y DE LA INTERSECCIÓN DE CONJUNTOS.

Sea F una familia de subconjuntos de un U, entonces

- La union de los elementos de F, denotada $\bigcup_{i\in I} A_i$ es el conjunto:

$\bigcup_{i\in I} A_i$ = {x / ∃i[i∈I ∧ Ai∈F ∧ x∈Ai]}, es decir, un elemento x de U pertenece a la union de los Ai, si existe al menos un subconjunto Ai perteneciente a la familia F que contiene a x.

- La interseccion de los elementos de F, denotada $\bigcap_{i\in I} A_i$, es el conjunto:

$\bigcap_{i\in I} A_i$ = {x / ∀i[(i∈I ∧ Ai∈F) → x∈Ai]}, es decir, un elemento x de U pertenece a la interseccion de los Ai, si todo subconjunto Ai perteneciente a la familia F contiene a x.

CONJUNTO POTENCIA O CONJUNTO DE LAS PARTES.

Para A⊆U, el conjunto potencia de A o conjunto de las partes de A, denotado como P(A), es la familia de conjuntos formado por todos los subconjuntos de A. Se define formalmente como:

P(A) = {Ai / Ai⊆A, i∈I}, I = {i / i∈Z^+, i ≤ | P(A) | }, con | P(A) | = $2^{|A|}$.

Los elementos de P(A) serán todos los subconjuntos posibles de A de 0 elementos, 1 elemento, 2 elementos, ..., | A | elementos.

CONJUNTO PARTICIÓN.

Para A⊆U, un conjunto partición de A, denotado como Π(A), es una familia de conjuntos formada por subconjuntos de A, según el siguiente criterio:

Π(A) = {Ai / Ai ⊆ A, i∈I}, tal que:

i) ∀i∈I: Ai ≠ ∅
ii) ∀i∀j: i ≠ j → Ai ∩ Aj = ∅ i,j∈I (Ai y Aj son subconjuntos disjuntos)
iii) $\bigcup_{i\in I} A_i$ = A

La definición anterior establece que los elementos de una partición deben ser diferentes de ∅, que todo par de elementos diferentes deben ser subconjuntos disjuntos y que la unión de todos los elementos de la partición debe dar el conjunto original A. Note que Π(A) ⊂ P(A), es decir, Π(A)es subconjunto propio de P(A).

PRODUCTO DE CONJUNTOS.

Producto Cartesiano:
El conjunto formado por la agrupación de elementos pares, donde el primer elemento del par siempre pertenece aun mismo conjunto A y el segundo a un mismo conjunto B, se denomina producto cartesiano de AxB.

Muchas veces se utiliza el producto cartesiano de un conjunto A por el mismo, es decir, AxA, teniendo pares de la forma (a,b), con $a,b \in A$.

Formalmente un producto cartesiano queda como:

Dados los conjuntos A_1 x A_2 x...x A_n. El conjunto de todas las n-uplas (x1,x2,…,xn) tal que $x_1 \in A_1$ y $x_2 \in A_2$ y ... y $x_n \in A_n$, se denomina producto cartesiano de A1 hasta An y se denota como:

A_1 x A_2 x...x A_n o también de forma indexada como:

$X_{i=1}^{n} A_i = A_1 \text{ x } A_2 \text{ x...x } A_n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) / x_1 \in A_1 \text{ y } x_2 \in A_2 \text{ y ... y } x_n \in A_n,\}$