

Grafo Completo:

$$G = K_n, n = |V|, A = V \times V \text{ y } K_n |A| = \frac{n(n-1)}{2}$$

Si G_c es el grafo **complementario** de G , entonces:

$$|V_c| = |V| = p \text{ y } |A_c| = \frac{p(p-1)}{2} - |A|$$

Definición: Un Grafo G es Bipartito o Partible en Dos si se puede definir una partición en V , tal que $V_v, V_w \neq \emptyset$, y $V_v \cap V_w = \emptyset$, y $V_v \cup V_w = V$, siendo: $V_v \subseteq V$ y $V_w \subseteq V$, $\forall (A_v, A_w) \in A$ entonces $A_v \in V_v$ y $A_w \in V_w$. Si $|V_v| = n$ y $|V_w| = m$, el grafo bipartito completo se denota como $K_{n,m}$ y $|A| = nxm$.

* El grado del vértice se puede denotar como $\delta(V_i)$ y representa el numero de arcos que inciden sobre V .

Lema: Sea $G = (V, A)$ un grafo no dirigido. Se verifica que

$$\sum_{v \in V} (\delta(v)) = 2|A|$$

El número de vértices de grado impar es par, es decir, $|V_i| = 2k, k \in \mathbb{Z}$.

* Un grafo G es **Conexo** si existe una cadena (camino) entre cualesquiera par de vértices. En caso contrario a G se le conoce como **Disconexo**. Se dice que un camino es un **circuito** si es cerrado, esto es, empieza y termina en el mismo vértice, es decir, $a=b$. Si a dicho circuito no pasa dos veces por el mismo vértice (salvo el vértice inicial) se denomina **ciclo**.

Para determinar el numero de circuitos independientes de un grafo G cualquiera se aplica la siguiente formula: $P(G) = m - n + p$.

* Se dice que un camino es **simple** si no contiene a la misma arista o arco más de una vez. Un camino es **elemental** si no contiene a un mismo vértice mas de una vez.

Lema: Si un camino posee k arcos entonces es porque tiene $k+1$ vertices si y solo si el Camino es no elemental. (siendo $k \geq n$ y $n = |V|$).

Definición: Se dice que un grafo no dirigido es **euleriano** si y solo si contiene un circuito euleriano. (No se repiten arcos). Se dice que un grafo no dirigido es **hamiltoniano** si y solo si contiene un circuito hamiltoniano. (No se repiten vértices)

Teorema: Sea $G = (V, A)$ un grafo conexo. Si todos los vértices de G tienen grado par, entonces G posee un circuito euleriano.

Lema: Si un grafo $G=(V, A)$ conexo y no dirigido admite un camino euleriano no cerrado si y solo si posee exactamente 2 vértices de grado impar.

Teorema de Kuratowsky: Un grafo es planar si y solo si no contiene como subgrafo a un K_5 o $K_{3,3}$. Numero de Regiones: $R(G) = P(G) + 1$, siendo P el rango circuito de G .

Teorema de Euler: En un grafo planar conexo, se cumple que $n - m + R = 2$, siendo n los vértices, m los arcos y R el numero de regiones del grafo.

Corolario: Si $G = (V, A, R)$ es un grafo plano con k componentes conexas, entonces $n - m + R = k + 1$.

Teorema: En todo grafo planar se cumple que: $3R \leq 2m$. Y si cada región del grafo G esta acotada por lo menos por 4 arcos, entonces $4R \leq 2m$. En general, si para cada región esta acotado por lo menos por k arcos entonces $kR \leq 2m$.

Corolario: Si un árbol m ario de altura h tiene l hojas, entonces $h \geq \log_m(l)$.

Definición: Un **árbol** es un grafo no dirigido, conexo y sin circuitos.

Un árbol expandido de G es aquel tal que: T es subgrafo expandido de G ($V_1 = V$ y $A_1 \subseteq A$). Y si es mínimo es porque cumple que $CT_{\min} \leq C_r \forall T$ que sea árbol expandido de G .

Teorema de Caracterización Múltiple.

G es un Árbol.

G no posee circuitos y posee $n-1$ arcos.

G es conexo y posee $n-1$ arcos.

G es arcomaximal respecto a no poseer circuitos.

G es arcominimal respecto a ser conexo.

Cada par de vértices esta unido por un único camino.

Definición: $K(G)$ se define como el numero cromático de G , es decir, el mínimo numero de colores necesarios para colorear los vértices de un grafo de tal forma que vértices adyacentes posean diferentes colores.

Teorema: Si el vértice de mayor grado en un grafo G , posee grado z , entonces $K(G) \leq z + 1$.

Conjetura de los 4 Colores: Si G es un grafo planar entonces $K(G) \leq 4$.

Definición: Los grafos bipartitos y los árboles se pueden colorear con solo 2 colores.