

Estructuras Discretas
Induccion Completa
Prof Miguel Fagundez

Repaso: **Factorial de un Numero**

El factorial de un número natural n , es el producto de todos los naturales consecutivos desde 1 hasta n . Se designa o se denota por $n!$. Tambien se puede definir como: Es una función discreta $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$

$f(n) = n!$, para $n \in \mathbb{N}$. Usualmente se escribe como: $n! = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$. NOTA: $0! = 1$.

Repaso: **Sumatoria.**

Si n es un entero positivo y a_1, a_2, \dots, a_n son n números a ser sumados, entonces la suma de ellos, se puede escribir como:

$$\sum_{i=1}^n a_i = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

Y se lee: "sumatoria de a_i , desde $i = 1$ hasta $i = n$ ".

La utilidad de la sumatoria surge cuando a_i es una expresión matemática en términos del índice i , de forma tal que cuando i toma uno de sus valores (entre 1 y n), se obtiene el i -ésimo término de la suma. La notación de sumatoria permite simplificar la escritura de suma de números.

Propiedades de la Sumatoria:

1.
$$\sum_{i=1}^n 1 = n$$

2.
$$\sum_{i=1}^n c = cn$$

3.
$$\sum_{i=1}^n (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n b_i$$

4.
$$\sum_{i=1}^n (a_i - b_i) = \sum_{i=1}^n a_i - \sum_{i=1}^n b_i$$

5.
$$\sum_{i=1}^n ca_i = c \sum_{i=1}^n a_i$$

Identidades:

1.
$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

2.
$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{(2n+1)(n+1)n}{6}$$

Repaso: **Productoria.**

Si n es un entero positivo y a_1, a_2, \dots, a_n son n números a ser multiplicados, entonces el producto de ellos, se puede escribir como:

$$\prod_{i=1}^n a_i = a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n$$

Y se lee: "productoria de a_i , desde $i = 1$ hasta $i = n$ ".

La utilidad de la productoria surge cuando a_i es una expresión matemática en términos del índice i , de forma tal que cuando i toma uno de sus valores (entre 1 y n), se obtiene el i -ésimo término del producto. La notación de productoria permite simplificar la escritura del producto de números.

Propiedades de la Productoria:

1.
$$\prod_{i=1}^n 1 = 1$$

2.
$$\prod_{i=1}^n c = c^n$$

3.
$$\prod_{i=1}^n (a_i \cdot b_i) = \left(\prod_{i=1}^n a_i \right) \cdot \left(\prod_{i=1}^n b_i \right)$$

4.
$$\prod_{i=1}^n \frac{a_i}{b_i} = \frac{\prod_{i=1}^n a_i}{\prod_{i=1}^n b_i}$$

5.
$$\prod_{i=1}^n c a_i = c^n \prod_{i=1}^n a_i$$

Definiciones Básicas:

1. Axiomas o Postulados:

Son enunciados, propiedades o relaciones entre conceptos primitivos, puestas a priori (es decir no son deducidas de otras), las cuales se admiten sin demostración.

2. Teoremas:

Son enunciados demostrables dentro de la teoría que se desarrolla. Se reserva la palabra Teorema para los resultados de gran importancia, de demostración a veces difícil y larga.

3. Lema:

Es frecuentemente usado como un enunciado previo a la demostración de un Teorema y cuya demostración no tiene mucho interés en sí misma, sino servir de base para demostrar el teorema que le seguirá.

4. Corolario:

Es un enunciado fácil de demostrar, que surge como consecuencia inmediata de un teorema.

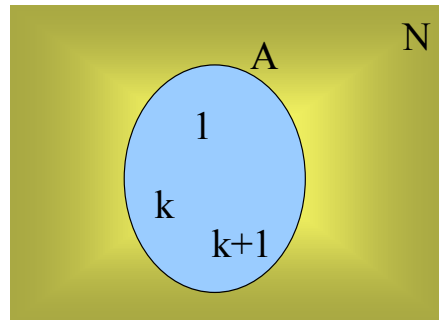
TEOREMA DE INDUCCIÓN COMPLETA (Inducción Matemática).

Si $A \subseteq \mathbb{N}$, tal que:

- i) $1 \in A$
- ii) $k \in A \Rightarrow (k+1) \in A$

Entonces $A = \mathbb{N}$

Graficamente:



Principio de Inducción Completa.

Sea $P(n)$ una función proposicional, con $n \in \mathbb{N}$, entonces:

$P_1: P(1) \equiv v$ (Base de la inducción)

$P_2: \forall k [P(k) \rightarrow P(k+1)] \equiv v$ (Paso Inductivo)

$Q: \forall n \in \mathbb{N} [P(n)] \equiv v$

Para demostrar que una propiedad $P(n)$ (depende de $n \in \mathbb{N}$), es verdadera para cualquier valor de n , debemos hacer lo siguiente:

- (1) Probar $P(n)$ para $n = 1$ (Caso Base)
- (2) Asumiendo cierto que se cumple $P(n)$ para $n = k$ (Hipótesis Inductiva), verificar que se cumpla para $n = k+1$ (Tesis Inductiva)
- (3) Al cumplirse los dos pasos anteriores, concluimos que $P(n)$ se cumple $\forall n \in \mathbb{N}$

Corolario del Teorema de Inducción Matemática.

Sea $n_0 \in \mathbb{Z}^+$ y $M = \{n / n \in \mathbb{Z}^+ \wedge n \geq n_0\}$

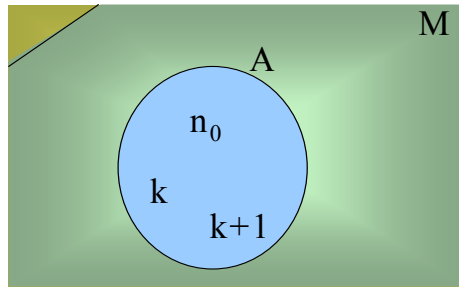
Sea $A \subseteq M$, tal que:

- i) $n_0 \in A$
- ii) $k \in A \Rightarrow (k+1) \in A$

Entonces $A = M$

Graficamente:

$$\mathbb{Z}^+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$$



Principio de Inducción Completa resultante del Colorario.

Sea $P(n)$ una función proposicional, con $n \in \mathbb{Z}^+$, entonces:

$P_1:$	$P(n_0)$	$\equiv v$	(Base de la inducción)
$P_2:$	$\forall k \geq n_0 [P(k) \rightarrow P(k+1)]$	$\equiv v$	(Paso Inductivo)
$Q:$	$\forall n \geq n_0 [P(n)]$	$\equiv v$	(Conclusión)

Forma Fuerte de Inducción Matemática.

Si $A \subseteq \mathbb{N}$, tal que:

- i) $1 \in A$
- ii) Para $k \geq 1$, Si cada elemento $\in A$ en $[1, k] \Rightarrow k+1 \in A$

Entonces $A = \mathbb{N}$

Formalmente podemos decir que:

Si $A \subseteq \mathbb{N}$, tal que:

- i) $1 \in A$
- ii) Para $k \geq 1$, Si $\forall r [(r \in A \wedge 1 \leq r \leq k) \Rightarrow k+1 \in A]$

Entonces $A = \mathbb{N}$

Segundo Principio de Inducción Completa.

Sea $P(n)$ una función proposicional, con $n \in \mathbb{N}$, entonces:

$P_1:$	$P(1)$	$\equiv v$
$P_2:$	$\forall k \geq 1 [(P(1) \wedge P(2) \wedge \dots \wedge P(k)) \rightarrow P(k+1)]$	$\equiv v$
$Q:$	$\forall n \in \mathbb{N} [P(n)]$	$\equiv v$