Universidad de San Andrés - Maestría en Marketing

# Métodos y técnicas de análisis cuantitativo y cualitativo

Profesor: Javier García - Cicco

Otoño 2004

Ejercitación - Soluciones

1. La situación descripta en el ejercicio puede representarse con una distribución binomial con parámetros $p$=2/3 y $n$=4. Es decir, tenemos a 4 jueces a los que se les pregunta que formula prefieren, el éxito está definido como elegir la formula A, y como dos de los tres vasos contienen esta formula, y las formulas son igualmente atractivas, entonces la probabilidad de que un juez elija la formula A es 2/3.

   (a) La función de distribución es

   | Nº de éxitos | Probabilidad | Probabilidad Acumulada |
   |---|---|---|
   | 0 | 0.0123 | 0.0123 |
   | 1 | 0.0988 | 0.1111 |
   | 2 | 0.2963 | 0.4074 |
   | 3 | 0.3951 | 0.8025 |
   | 4 | 0.1975 | 1.0000 |

   (b) La probabilidad de que al menos tres de los cuatro elijan la formula A es

   $$P(X = 3) + P(X = 4) = P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3) = 0.5926$$

   (c) La esperanza de una variable aleatoria binomial es

   $$E(X) = np = 4 * 2/3 = 8/3 = 2.6667$$

   (d) La varianza de una variable aleatoria binomial es

   $$Var(X) = np(1 - p) = 4 * 2/3 * 1/3 = 8/9 = 0.8889$$

2. Esta situación puede pensarse como una variable aleatoria binomial con parámetros $p$=0.1 y $n = 20$. Es decir, de cada una de las 20 unidades vemos si es defectuosa (exito) o no, y dado que en todo el cargamento hay 10% defectuosas y la muestra esta tomada al azar, entonces la probabilidad de que una pieza sea defectuosa es del 10%. Como se acepta el cargamente si como mucho una es defectuosa, entonces

   $$P(\text{Aceptar el Cargamento}) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0.1216 + 0.2702 = 0.3918$$

3. Esta situación puede pensarse como una variable aleatoria binomial con parámetros $p$=0.25 y $n = 15$. Es decir, éxito implica que liquiden los pagos completamente cada mes, y se le pregunta a 15 personas

   (a) La esperanza es $E(X) = np = 15 * 0.25 = 3.75$. La varianza es $Var(X) = np(1-p) = 15*0.25*0.75 = 2.8125$. Luego el $DesvEst = \sqrt{Var(X)} = 1.677$

   (b) Computando esto en Excel, o con la tabla, $P(X = 0) = 0.0134$

   (c) La media mas el desvío estandar es igual a 5.427. Luego, lo que queremos encontrar es $P(X >$5.427); como esta es una variable discreta, esto es lo mismo que $P(X \geq 6) = 1 - P(X < 6) = 1 - P(X \leq 5)$ =0.1484

4. Esta situación tambien puede ser representada con una binomial con parametro $p = 0.9$ y $n$ igual al numero de satélites

   (a) Con $n = 5$, la $P(X = 4) = 0.3285$ y $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 0.9999$

   (b) Usando el hecho que $P(A) = 1 - P(noA)$, podemos razonar de la siguiente manera: La probabilidad de al menos 1 radar de $n$ existentes detecte cuando la probabilidad de detectar de cada uno es 0.9 (llamemos a esto $A$), el lo mismo que 1 menos la probabilidad de que ningun radar de de $n$ existentes detecte cuando la probabilidad de detectar de cada uno es 0.9 (esto es $noA$). Si lo que nosotros queremos es encontrar el $n$ para que $P(A) = 0.999$, entonces esto es lo mismo que encontrar el $n$ tal que $P(noA) = 0.001$. Luego, buscamos en la tabla (o probamos con el excel lo que es lo mismo) cuál es el $n$ tal que la $P(X = 0) = 0.001$. Para este caso, si $n = 3$ luego $P(X = 0) = 0.001$

5. Lo que necesitamos calcular es $P(Z > 450) = 1 - P(Z < 450)$ para el caso en que $Z$ tiene una distribución normal con media 400 y varianza 400 (es decir, $20^2$). Esto da 0.0062

6. .

   (a) Buscando en el Excel, $P(Z > 72) = 1 - P(Z < 72) = 0.8413$

   (b) Tenemos que buscar $K$ tal que $P(Z > K) = 1 - P(Z < K) = 0.1$. Con el Excel, podemos ver que $K = 85.6$

   (c) Tenemos que buscar $K$ tal que $P(Z > K) = 1 - P(Z < K) = 0.281$. Con el Excel, podemos ver que $K = 74.52$

7. El test es

$$
\begin{aligned}
H_0 &: m = 16 \\
H_A &: m \neq 16
\end{aligned}
$$

El estadístico que debemos construir es

$$Z_0 = \frac{14-16}{\frac{8}{\sqrt{100}}} = -2.5$$

Para encontrar el valor de corte, como el test es a dos colas, lo que tenemos que encontrar es el valor es $Z_{0.025}$ tal que $P(Z < Z_{0.025}) = 0.025$ (donde $Z$ es una variable con distribución normal estandar) Buscando en el Excel, $Z_{0.025} = -1.959$. Esto implica que rechazaremos la hipótesis si $Z_0 < -1.959$ o $Z_0 > 1.959$. Luego, rechazamos la hipótesis nula al 5%, esto es, tenemos evidencia para decir que se ha producido un cambio en la duración media de los préstamos. Para calcular el p-valor, como el test es a dos colas, entonces $p - valor = 2 * P(Z < -2.5) = 2 * 0.0062 = 0.0124$. Luego, como el p-valor es menor que el nivel de significatividad con el que trabajamos, entonces rechazamos la hipótesis nula.

8. El test es

$$\begin{aligned} H_0 &: m = 200 \\ H_A &: m < 200 \end{aligned}$$

El estadístico que debemos construir es

$$Z_0 = \frac{195-200}{\frac{10}{\sqrt{30}}} = -2.738$$

Para encontrar el valor de corte lo que tenemos que encontrar es el valor es $Z_{0.1}$ tal que $P(Z < Z_{0.1}) = 0.1$ (donde $Z$ es una variable con distribución normal estandar). Buscando en el Excel, $Z_{0.1} = -1.281$. Esto implica uqe rechazaremos la hipótesis si $Z_0 < -1.281$. Luego, rechazamos la hipótesis nula al 5%. Para calcular el p-valor, como el test es a una cola a la izquierda, entonces $p - valor = P(Z < -2.738) = 0.0030$. Luego, como el p-valor es menor que el nivel de significatividad con el que trabajamos, entonces rechazamos la hipótesis nula. Finalmente, para encontrar el máximo precio promedio para rechazar $H_0$ lo que tenemos que hacer es encontrar $m_0$ tal que

$$\frac{m_0 - 200}{\frac{10}{\sqrt{30}}} = -1.281$$

Luego, $m_0 = (-1.281) * \frac{10}{\sqrt{30}} + 200 = 197.66$.

9. Si el individuo no tiene facultades especiales (esto es, tira resultados al azar), la probabilidad de acertar una respuesta es 0.5. Luego, este es un test de una proporción, donde la proporción es 32/50=0.64, y las hipótesis son

$$\begin{aligned} H_0 &: p = 0.5 \\ H_A &: p > 0.5 \end{aligned}$$

Luego, el estadistico es

$$Z = \frac{0.64 - 0.5}{\sqrt{\frac{0.5*0.5}{50}}} = 1.979$$

Para encontrar el valor de corte, como el test es a una cola derecha, lo que tenemos que encontrar es el valor es $Z_{0.01}$ tal que $P(Z > Z_{0.01}) = 1 - P(Z < Z_{0.01}) = 0.01$. Usando el Excel, este valor es $Z_{0.01} = 2.3263$. Esto implica que rechazaremos la hipótesis si $Z_0 > 2.3263$. Luego, no rechazamos la hipótesis nula al 1%, por lo que no tenemos evidencia para decir que el individuo tiene facultades especiales. Para calcular el p-valor, como el test es a una cola a la derecha, entonces $p - valor = P(Z > 1.979) = 1 - P(Z > 1.979) = 0.0238$. Luego, como el p-valor es mayor que el nivel de significatividad con el que trabajamos, entonces no rechazamos la hipótesis nula. Por último, primero tenemos que hacer es encontrar $p_0$ tal que

$$\frac{p_0 - 0.5}{\sqrt{\frac{0.5*0.5}{50}}} = 1.979$$

Luego, $p_0 = 0.6399$. Para encontrar la cantidad de aciertos mínima, multiplicamos esta propoción por 50, lo cual da 32.

10. El test es

$$\begin{aligned} H_0 &: p = 1/3 \\ H_A &: p > 1/3 \end{aligned}$$

Luego, el estadistico es

$$Z = \frac{0.4 - 0.333}{\sqrt{\frac{0.333*0.667}{1000}}} = 4.4721$$

El valor de corte para el 5% de un test a una cola derecha es $Z_{0.05}$ tal que $P(Z > Z_{0.05}) = 0.05$, lo cual es $Z_{0.05} = 1.645$. Como $1.645 < 4.4721$, entonces podemos rechazar la hipótesis nula, por lo que podemos decir que hay evidencia suficiente para creer que la gente tiene preferencia por el color A.

11. Queremos testear

$$\begin{aligned} H_0 &: m_A - m_B = 0 \\ H_A &: m_A - m_B \neq 0 \end{aligned}$$

donde $A$ y $B$ son lso dos servicios. El estadístico que usaremos es

$$Z = \frac{\overline{X}_A - \overline{X}_B - 0}{\sqrt{\frac{S_A^2}{n_A} + \frac{S_B^2}{n_B}}} = \frac{0.26 - 0}{\sqrt{\frac{1.43^2/2}{100} + \frac{1.43^2/2}{100}}} = 1.8181$$

Notemos que, si bien el dato es la varianza de la diferencia, esto es equivalente a suponer que la varianza de ambos es la misma e igual a la mitad de la varianza de la diferencia. Si testeamos, por ejemplo, a un 5% de significatividad, como el test es a dos colas el valor de corte es el valor es $Z_{0.025}$ tal que $P(Z < Z_{0.025}) = 0.025$, lo cual da $Z_{0.025} = -1.959$. Luego, aceptamos la hipótesis nula si $-1.959 < Z < 1.959$. En este caso entonces aceptamos la hipótesis de que el promedio de satisfacción es el mismo para ambos servicios.

12. Estes es un test de diferencias de proporciones. las hipótesis son

$$\begin{aligned} H_0 &: p_A - p_B = 0 \\ H_A &: p_A - p_B > 0 \end{aligned}$$

donde $A$ representa a que no habian recibido la promción y $B$ a los que sí. El estadístico para estos casos es

$$Z_0 = \frac{\widehat{p}_A - \widehat{p}_B - 0}{\sqrt{\frac{p_T(1-p_T)}{n_A} + \frac{p_T(1-p_T)}{n_B}}}$$

donde $p_T = \frac{n_A\widehat{p}_A + n_B\widehat{p}_B}{n_A + n_B}$. En este caso, $p_T = 0.2758$, por lo que el estadístico es $Z_0 = 8.5732$. Con este estadístico, el $p - valor = 0.000$, por lo que para todo nivel de significatividad rechazamos $H_0$ por lo que podemos decir que tenemos evidencia para afirmar la repetición en la compra es mayor para los que compraron sin verse influídos por la promoción.

13. Este también es un un caso de test de diferencias de proporciones. Las hipótesis son

$$\begin{aligned} H_0 &: p_A - p_B = 0 \\ H_A &: p_A - p_B > 0 \end{aligned}$$

donde $A$ representa a los que respondieron la encuesta que no incluía la pregunta de la raza y $B$ a los que respondieron y sí le habían preguntaron. El estadístico en este caso es $Z_0$ =0.1602, por lo que el p-valor es 0.4364. De esta manera, para nivel de significatividad menores a 43% no tenemos evidencia para rechazar la hipótesis nula, es decir, no parecería haber diferencias en encuestas donde se pregunta por la raza y en las que no.