

Maestría en Marketing
Métodos y técnicas de análisis cuantitativo y cualitativo

Probabilidad, Variables Aleatorias y
Distribuciones

- Referencia: PR Caps 13, 15, 16.1, 16.2, 18.1, 18.2

Otoño 2003

Experimentos aleatorios y sucesos

- La teoría de la probabilidad se basa en que los datos que tenemos están generados por *experimentos aleatorios*. Éstos tienen 3 características:
 - Todos los posibles resultados del experimento son conocidos
 - No se puede predecir perfectamente el resultado del experimento
 - El experimento puede repetirse en condiciones idénticas
- Cada resultado posible se denomina *suceso*
- El conjunto de todos los sucesos posibles se denomina *espacio muestral*

Ejemplos

- Lanzar una moneda y ver si sale cara (C) o ceca (S). En este caso, el espacio muestral es $E=\{C,S\}$
- Si lanzamos dos veces una moneda, entonces $E=\{CC,CS,SC,SS\}$, es decir, hay 4 eventos posibles.
 - El suceso “sale al menos una cara” tiene 3 elementos
 $A=\{CC,CS,SC\}$
 - El suceso “en la primer tirada sale cara” tiene 2 elementos
 $A=\{CC,CS\}$
 - El suceso “no sale ninguna cara” tiene 1 elemento $A=\{SS\}$

Probabilidad

- La probabilidad de que un suceso A ocurra se define como la proporción del número de eventos posibles de ese suceso en relación al número de eventos en el espacio muestral, es decir:

$$P(A) = \frac{\# A}{\# E}$$

- Para nuestro ejemplo de tirar 2 veces una moneda, la probabilidad de que salga al menos una cara es 0.75

Propiedades de las probabilidades

- La probabilidad de cualquier suceso es siempre un número entre 0 y 1
- La probabilidad de todo el espacio muestral es uno, es decir $P(E)=1$
- La probabilidad del suceso “que ocurra A o B ”

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

- La probabilidad del suceso “que no ocurra A ” es

$$P(\text{no}A) = 1 - P(A)$$

Variables Aleatorias

- Una variable aleatoria es un valor numérico que corresponde al resultado de un experimento aleatorio
- Las variables aleatorias pueden ser *discretas* o *continuas*.

Distribución de variables aleatorias discretas I

- La distribución de una variable aleatoria es la colección de valores que puede tomar la variable y las probabilidades de ocurrencia de cada uno de estos valores. A esta función la denotamos $p_i = P(x = x_i)$
- Ejemplo: x es una variable aleatoria que expresa el número de caras al lanzar 4 veces una moneda. De esta manera, x puede tomar cuatro valores $x=0, x=1, x=2, x=3$ y $x=4$.

$$p_0 = P(x = 0) = 1/16 = 0.0625$$

$$p_1 = P(x = 1) = 4/16 = 0.25$$

$$p_2 = P(x = 2) = 6/16 = 0.375$$

$$p_3 = P(x = 3) = 4/16 = 0.25$$

$$p_4 = P(x = 4) = 1/16 = 0.0625$$

Métodos y técnicas de análisis cuantitativo y cualitativo

7

Distribución de variables aleatorias discretas II

- Conocer la distribución de una variable es útil porque también nos permite calcular otras probabilidades. Por ejemplo, si quiere saber cuál es la probabilidad que salgan como máximo 3 caras lo calculamos como

$$\begin{aligned} P(x \leq 3) &= P(x = 0) + P(x = 1) + P(x = 2) + P(x = 3) = \\ &= 0.0625 + 0.25 + 0.375 + 0.25 = 0.9375 \end{aligned}$$

- En términos generales,

$$P(a \leq x \leq b) = P(x = a) + P(x = a+1) + \dots + P(x = b-1) + P(x = b) = \sum_{i=a}^b P(x = x_i)$$

Métodos y técnicas de análisis cuantitativo y cualitativo

8

Distribución de variables aleatorias discretas III

- La representación gráfica de estas funciones de distribución para variables discretas es el histograma.
- Las probabilidades p_i de la distribución de una variable aleatoria tienen dos propiedades:
 - Son no negativas
 - La suma de todas ellas es igual a 1
- La distribución acumulada es la probabilidad de que la variable tome valores menores o iguales a un determinado valor

Esperanza o media de una variable aleatoria discreta

- La esperanza de una variable aleatoria es el promedio de los valores que puede tomar la variable, ponderado por la probabilidad de ocurrencia de cada valor.

$$E(x) = \sum_{i=1}^N x_i p_i$$

- La media tiene 3 propiedades:
 - $E(x + y) = E(x) + E(y)$
 - $E(a) = a$
 - $E(ax) = aE(x)$

Varianza y Desvío Estandar de una variable aleatoria discreta

- La varianza es un promedio ponderado de las desviaciones con respecto a la media al cuadrado. Esto es,

$$Var(x) = \sum_{i=1}^N [x_i - E(x)]^2 p_i$$

- El desvío estandar es la raíz cuadrada de la varianza
- La varianza tiene la siguiente propiedad

$$Var(ax) = a^2 Var(x)$$

Distribución de Bernoulli

- Una variable aleatoria tiene distribución de Bernoulli si puede tomar sólo dos valores (1 y 0, o éxito y fracaso) y la distribución de las probabilidades es:

$$P(x = 1) = p$$

$$P(x = 0) = 1 - p$$

- La esperanza es $E(x) = 1 \cdot p + 0 \cdot (1 - p) = p$
- La varianza es $Var(x) = (1 - p)^2 p + (0 - p)^2 (1 - p) = p(1 - p)$

Distribución Binomial

- Si un experimento con dos posibles resultados (éxito o fracaso) se repite n veces de manera independiente, entonces el número de éxitos en las n repeticiones es una variable aleatoria con distribución binomial.

- Para conocer la función de distribución:

- Tabla

- Excel `DISTR.BINOM(k,n,p ,FALSO)`

- La esperanza es $E(x) = np$

- La varianza es $Var(x) = np(1 - p)$

- Ejemplo 1: infección por enfermedades ($p=0.5$)

Infectados	distribución	distribución acumulada
0	0.0010	0.0010
1	0.0098	0.0107
2	0.0439	0.0547
3	0.1172	0.1719
4	0.2051	0.3770
5	0.2461	0.6230
6	0.2051	0.8281
7	0.1172	0.9453
8	0.0439	0.9893
9	0.0098	0.9990
10	0.0010	1.0000

- Ejemplo 2: Control de cargamento

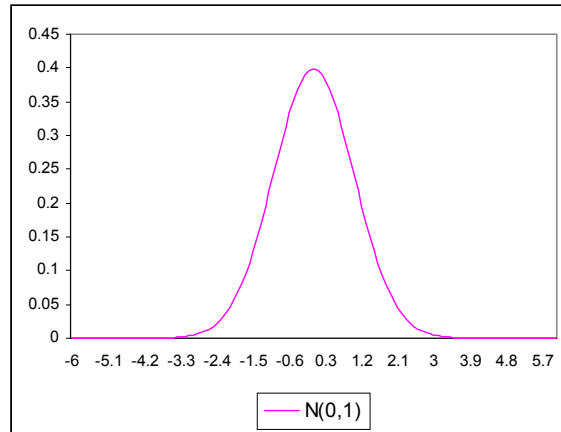
	Proporción de defectuosos		
	10%	20%	30%
0	0.1216	0.0115	0.0008
1	0.2702	0.0576	0.0068
	0.3917	0.0692	0.0076

Variables aleatorias continuas

- Como puede tomar valores en un intervalo de números, puede tomar infinitos valores. Luego, la probabilidad que la variable tome un determinado valor es siempre cero.
- De esta forma, caracterizaremos a estas variables por su función de distribución acumulada. Es decir, lo que miraremos será $P(z < k)$.

Distribución Normal

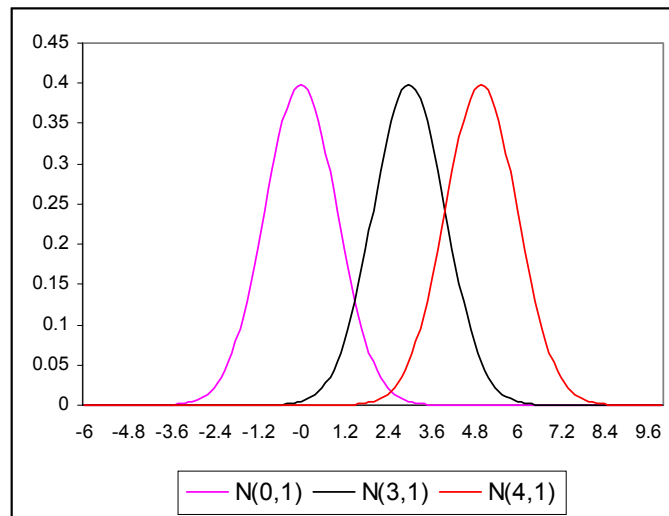
- La característica distintiva de una variable que tiene distribución normal es que su distribución puede describirse totalmente con su media y con su desvío estandar



Métodos y técnicas de análisis cuantitativo y cualitativo

17

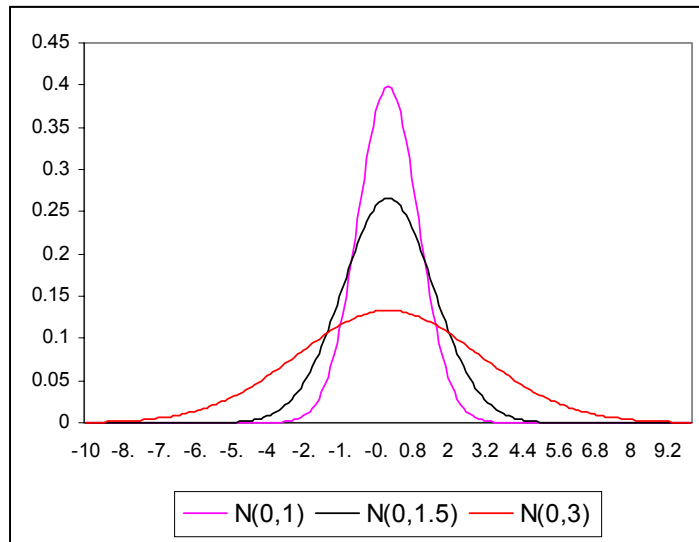
- Qué pasa cuando cambia la media?



Métodos y técnicas de análisis cuantitativo y cualitativo

18

- Qué pasa cuando cambia el desvío estándar?



- Qué tipo de información me da el desvío estándar?

