

Przemysław Chojecki, 2004

Celem niniejszego referatu jest przedstawienie nierówności tych bardziej jak i mniej znanych

Nierówności między średnimi

Niech:

$$A_n = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} - \text{średnia arytmetyczna}$$

$$G_n = (\prod_{i=1}^n x_i)^{\frac{1}{n}} - \text{średnia geometryczna}$$

$$H_n = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}} - \text{średnia harmoniczna}$$

$$Q_n = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n}} - \text{średnia kwadratowa}$$

zachodzi następująca nierówność: $H_n \leq G_n \leq A_n \leq Q_n$

Uogólniona nierówność między średnią arytmetyczną i geometryczną

$$\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & \dots & x_{2n} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & \dots & x_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{m1} & x_{m2} & x_{m3} & \dots & x_{mn} \end{bmatrix}$$

$G(x_i)$ to średnia geometryczna i $A(x_i)$ to średnia arytmetyczna. Jeśli G_i będzie oznaczać średnią

geometryczną wszystkich liczb z i -tej kolumny, a A_j wszystkich liczb z j -tego wiersza, to będzie zachodzić:

$$G(A_j) \geq A(G_i).$$

Nierówność Cauchy'ego-Schwarz'a

Dla rzeczywistych a_1, a_2, \dots, a_n i b_1, b_2, \dots, b_n , mamy

$$(\sum_{i=1}^n a_i^2)(\sum_{i=1}^n b_i^2) \geq (\sum_{i=1}^n a_i b_i)^2.$$

Nierownosc Cauchy'ego-Schwarz'a w formie Engela

Niech a_1, a_2, \dots, a_n to dodatnie liczby za b_1, b_2, \dots, b_n to liczby rzeczywiste. Zachodzi:

$$\frac{b_1^2}{a_1} + \frac{b_2^2}{a_2} + \dots + \frac{b_n^2}{a_n} \geq \frac{(b_1 + b_2 + \dots + b_n)^2}{a_1 + a_2 + \dots + a_n}.$$

Nierownosc Czebyszewa

Dla rzeczywistych $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \geq 0$ i $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n$ mamy

$$\frac{\sum_{i=1}^n a_i b_i}{n} \geq \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n} \frac{\sum_{i=1}^n b_i}{n}.$$

Nierownosc Minkowskiego

Dla rzeczywistych a_1, a_2, \dots, a_n i b_1, b_2, \dots, b_n , mamy

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2} \geq \sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2}$$

Nierownosc Holdera

Niech a_1, a_2, \dots, a_n i b_1, b_2, \dots, b_n beda dowolnymi liczbami dodatnimi, zas p i q liczbami rzeczywistymi takimi, ze $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Wowczas:

a) jesli liczby p i q sa dodatnie, to zachodzi nierownosc

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^n b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

b) jesli liczby p i q sa liczbami przeciwnych znakow ($p \cdot q < 0$ to zachodzi:

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \geq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^n b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

Nierownosc Jensena

Jesli f jest funkcja wypukla w pewnym przedziale to dla dowolnych liczb x_1, x_2, \dots, x_n ($n \geq 2$) z tego przedzialu oraz liczb nieujemnych $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ takich, ze $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 1$ zachodzi:

$$f\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i f(x_i)$$

Nierownosc Muirhead'a

Jesli $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ sa calkowite spelniajace warunki:

- 1) $a_1 + a_2 + \dots + a_k \geq b_1 + b_2 + \dots + b_k$ dla $n - 1 \geq k \geq 1$ i
- 2) $a_1 + a_2 + \dots + a_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n$ wtedy

$$\sum_{sym} x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_n^{a_n} \geq \sum_{sym} x_1^{b_1} x_2^{b_2} \dots x_n^{b_n} \text{ dla wszystkich } x_1, x_2, \dots, x_n \in R_+$$

Nierownosc Hardy'ego-Littlewood'a-Poly (zwana rowniez nierownoscia Karamaty)

Dla rzeczywistych $x_1 \geq x_2 \geq x_3 \dots \geq x_n$ i $y_1 \geq y_2 \geq y_3 \dots \geq y_n$ oraz $x_1 + x_2 + \dots + x_i \geq y_1 + y_2 + \dots + y_i$ dla $i = 1, 2, \dots, n - 1$ przy czym $x_1 + x_2 + \dots + x_n = y_1 + y_2 + \dots + y_n$ i $x_i, y_i \in X$ dla $i = 1, 2, \dots, n$ gdzie $f(x)$ jest wypukla i rosnaca w X .

$$\text{Zachodzi } f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n) \geq f(y_1) + f(y_2) + \dots + f(y_n) .$$

Nierownosc Popoviciu

$$f(x) + f(y) + f(z) + 3f\left(\frac{x+y+z}{3}\right) \geq 2f\left(\frac{x+y}{2}\right) + 2f\left(\frac{z+y}{2}\right) + 2f\left(\frac{x+z}{2}\right)$$

gdzie f jest wypukla w przedziale X , x, y, z sa z X .

Nierownosc Nesbitt'a

Dla dodatnich rzeczywistych a, b i c , mamy

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

Nierownosc Bernoullie'go

Jezeli a i b s takimi liczbami rzeczywistymi, e $a > -1$, $a \neq 0$, $b \neq 0$ i $b \neq 1$ to:

$$(1+a)^b < 1+ab \text{ gdy } 0 < b < 1$$

$$(1+a)^b > 1+ab \text{ gdy } b < 0 \text{ lub } b > 1$$

Nierownosc Schura

Dla dodatnich rzeczywistych a, b, c i rzeczywistego r mamy

$$a^r(a-b)(a-c) + b^r(b-a)(b-c) + c^r(c-a)(c-b) \geq 0$$

Uogolniona nierownosc Schura

$$f(a)(a-b)(a-c) + f(b)(b-a)(b-c) + f(c)(c-a)(c-b) \geq 0$$

gdzie f to nieujemna funkcja wypukla

Nierownosc Turkevici

Dla rzeczywistych $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$ zachodzi:

$$(n-1)(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) + n \sqrt[n]{(x_1 x_2 \dots x_n)^2} \geq (x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2$$

Nierownosc Huygens'a

Dla dowolnych nieujemnych liczb x_1, x_2, \dots, x_n zachodzi:

$$(1+x_1)(1+x_2)\dots(1+x_n) \geq (1 + \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n})^n$$

Nierownosc Kirana Kedlaya'i

Dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych a_i gdzie $i = 1, \dots, n$ zdefiniujemy:

$$A_k = \frac{\sum_{i=1}^k a_i}{k}$$

$$G_k = (\prod_{i=1}^k a_i)^{\frac{1}{k}}$$

dla $k = 1, \dots, n$.

Zachodzi nierownosc:

$$\frac{\sum_{k=1}^n G_k}{n} \leq (\prod_{k=1}^n A_k)^{\frac{1}{n}}$$

Bibliografia:

- [1] Lev Kourliatchik "Wedrowki po krainie nierownosci"
- [2] www.matematyka.org
- [3] www.mathlinks.ro