ANÁLISIS DINÁMICO DE MECANISMOS *red*
LECCIÓN N°3

REDUCCIÓN DE FUERZAS Y MASAS EN LOS MECANISMOS

3.1. FUERZAS Y MOMENTOS REDUCIDOS

Para el estudio del movimiento de un mecanismo bajo fuerzas dadas, resulta cómodo reemplazar todas las fuerzas que actúan sobre los eslabones por fuerzas aplicadas sobre uno de los eslabones del mecanismo. *Para esto es necesario que el trabajo observado en el desplazamiento virtual*[1] *o la potencia desarrollada por las fuerzas de reemplazo sean correspondientemente iguales a la suma de los trabajos o a las potencias desarrolladas por las fuerzas aplicadas a los eslabones del mecanismo estudiado*. Las fuerzas de reemplazo que cumplen la condición anterior son denominadas *fuerzas reducidas*. El eslabón del mecanismo al cual se aplican las fuerzas reducidas se denomina *eslabón de reducción* y el punto de aplicación de las fuerzas reducidas, *punto de reducción*. Si el mecanismo en cuestión posee un grado de libertad, entonces para el estudio de su movimiento es suficiente conocer la ley de movimiento de uno de sus eslabones (ley de variación de la coordenada generalizada).

Comúnmente se escoge como eslabón de reducción al mismo cuya coordenada generalizada se usó para el estudio del mecanismo. Entonces en vez de estudiar todo el conjunto de eslabones, se puede observar un solo eslabón, por ejemplo la manivela *AB* cuya coordenada generalizada es el ángulo φ (fig. 3.1)

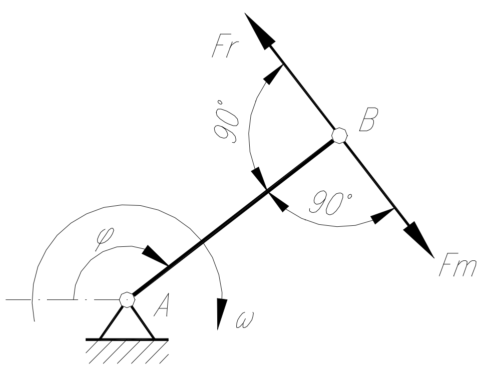


Fig. 3.1

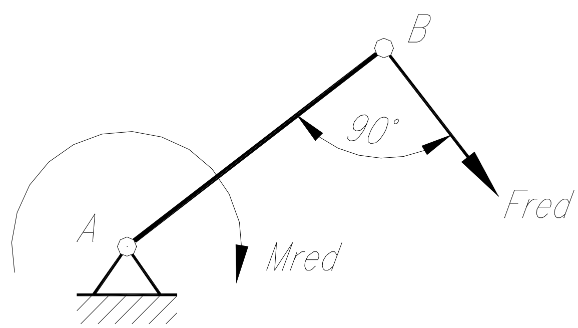


Fig. 3.2

En el punto *B* de este eslabón y perpendicular al eje de la manivela, se aplican dos fuerzas: la fuerza $\vec{F}_m$, fuerza reducida motriz; y la fuerza $\vec{F}_r$, fuerza reducida de resistencia. La fuerza $\vec{F}_m$ debe realizar un trabajo A_m igual al trabajo de todas las fuerzas motrices o lo que es lo mismo, desarrollar una potencia P_m igual a la potencia de todas las fuerzas motrices. De otro lado la fuerza $\vec{F}_r$ debe realizar un trabajo A_r, igual al de todas las fuerzas de resistencia o en otras palabras, desarrollar una potencia P_r igual a la potencia de todas las fuerzas de resistencia.

Para la determinación de las fuerzas o de los momentos reducidos se puede usar la siguiente igualdad:

$$P_{red} = \sum_{1}^{k} P_i \, . \tag{3.1}$$

[1] **Desplazamiento virtual**: Se entiende por *desplazamiento virtual de un punto el desplazamiento imaginario infinitamente pequeño (elemental) permitido, en el momento de tiempo dado, por las restricciones que se ejercen sobre el punto material*. El desplazamiento virtual no necesita tiempo para su realización. *Desplazamiento virtual de un sistema* se llama cualquier conjunto de desplazamientos virtuales (posibles) de los puntos del sistema. En el caso general el sistema puede poseer varios e incluso infinito número de desplazamientos virtuales. Como consecuencia de las restricciones aplicadas al sistema, no todos los desplazamientos son independientes. *El número de desplazamientos virtuales del sistema se denomina grado de libertad del sistema.*

En esta igualdad P_{red} es la potencia desarrollada por la fuerza o el momento reducido y P_i es la potencia desarrollada por las fuerzas o momentos aplicados al eslabón i, y que serán sujetos a reducción.

La potencia P_{red} puede ser también vista de la siguiente manera:

$$P_{red} = F_{red} v_B = M_{red} \omega \tag{3.2}$$

Donde F_{red} es la magnitud de la fuerza reducida al punto *B* del eslabón de reducción (fig. 3.2). Esta fuerza puede ser, en un caso particular o la fuerza reducida motriz $\vec{F}_m$, o la fuerza reducida de resistencias $\vec{F}_r$ (fig. 3.1); v_B es la velocidad del punto *B* del eslabón de reducción, M_{red} es el momento del par de fuerzas, el cual puede ser el momento reducido de las fuerzas motrices M_m, o el momento reducido de la fuerzas de resistencia M_r, ω es la velocidad angular del eslabón de reducción.

Las magnitudes de la fuerza reducida F_{red} y del momento reducido M_{red} pueden ser presentadas de la siguiente manera:

$$F_{red} = \frac{\sum_1^k P_i}{v_B} \tag{3.3}$$

$$M_{red} = \frac{\sum_1^k P_i}{\omega}. \tag{3.4}$$

La suma $\sum_1^k P_i$ puede desglosarse de la siguiente manera:

$$\sum_1^k P_i = \sum_1^k F_i v_i \cos\alpha_i + \sum_1^k M_i \omega_i \tag{3.5}$$

Donde F_i y M_i son la fuerza y el momento aplicadas al eslabón i, v_i es la velocidad del punto de aplicación de la fuerza F_i, ω_i es la velocidad angular del eslabón i, y α_i es el ángulo formado por la fuerza $\vec{F}_i$ y el vector de la velocidad $\vec{v}_i$.

Sustituyendo el valor $\sum_1^k P_i$ de la ecuación (3.5) en las ecuaciones (3.3) y (3.4) obtenemos

$$F_{red} = \sum_1^k F_i \frac{v_i \cos\alpha_i}{v_B} + \sum_1^k M_i \frac{\omega_i}{v_B} \tag{3.6}$$

$$M_{red} = \sum_1^k F_i \frac{v_i \cos\alpha_i}{\omega} + \sum_1^k M_i \frac{\omega_i}{\omega}. \tag{3.7}$$

De las ecuaciones (3.6) y (3.7) se deduce que si para cada posición del mecanismo se conocen las fuerzas y momentos aplicados a los eslabones, la fuerza reducida $\vec{F}_{red}$ y el momento reducido M_{red} dependerán solamente de la relación de las velocidades, las cuales sólo dependen de la posición de los eslabones, es decir, de la coordenada generalizada.

De las ecuaciones (3.6) y (3.7) también se deduce que si las fuerzas $\vec{F}_i$ y los momentos M_i están dados, la determinación de la fuerza reducida $\vec{F}_{red}$ y del momento reducido M_{red} no representa ninguna dificultad y puede ser realizada si se construyen los planos de velocidades para las posiciones del mecanismo exigidas, y las relaciones de las velocidades de las ecuaciones (3.6) y (3.7) se expresan como las relaciones de los segmentos correspondientes en dichos planos.

3.2. ENERGÍA CINÉTICA DE UN MECANISMO

La ecuación de la energía cinética aplicada a un mecanismo tiene la siguiente forma:

$$A_m - A_{res} = \sum \frac{mv^2}{2} - \sum \frac{mv_0^2}{2} \tag{3.8}$$

Donde

A_m Es el trabajo de las fuerzas motrices,

A_{res} Es el trabajo de las fuerza de resistencia,

$\sum \frac{mv^2}{2}$ Es la energía cinética del mecanismo y

v y v_0 son correspondientemente la velocidad al inicio y al final del desplazamiento observado.

Usando los métodos mostrados en los puntos anteriores se puede sustituir todas las fuerzas motrices por una sola fuerza reducida $\vec{F}_m$, aplicada en el punto *B* del eslabón de reducción escogido *AB* (fig. 3.3). De manera idéntica todas las fuerzas de resistencia pueden ser sustituidas por una sola fuerza reducida $\vec{F}_{res}$ aplicada en el mismo punto *B* del eslabón de reducción.

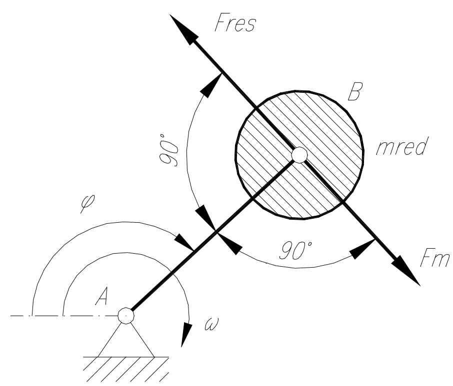


Fig. 3.3

Los momentos de las fuerzas motrices y de las fuerzas de resistencia M_m y M_{res} pueden ser, de la misma manera, sustituidos por momentos que actúen sobre el árbol *A*.

Determinadas ya las fuerzas y los momentos reducidos se puede plantear la ecuación de movimiento del mecanismo a través de la ecuación de energía cinética

$$A_{F_m} - A_{F_{res}} = \sum \frac{mv^2}{2} - \sum \frac{mv_0^2}{2}\,. \tag{3.9}$$

En la ecuación (3.9)

A_{F_m} Es el trabajo de la fuerza motriz reducida $\vec{F}_m$ y

$A_{F_{res}}$ Es el trabajo de la fuerza reducida de resistencia $\vec{F}_{res}$.

La parte izquierda de esta ecuación puede ser expresada a través del trabajo de los momentos reducidos. Tenemos

$$A_{M_m} - A_{M_{res}} = \sum \frac{mv^2}{2} - \sum \frac{mv_0^2}{2}. \tag{3.10}$$

En la ecuación (3.10)

A_{M_m} Es el trabajo del momento reducido M_m de las fuerzas motrices y

$A_{M_{res}}$ Es el trabajo del momento reducido M_{res} de las fuerzas de resistencia.

Denominaremos como

$$T = \sum \frac{mv^2}{2} \quad \text{y} \quad T_0 = \sum \frac{mv_0^2}{2}.$$

Entonces las ecuaciones (3.9) y (3.10) se pueden escribir de la siguiente manera

$$A_{F_m} - A_{F_{res}} = T - T_0 \tag{3.11}$$

y

$$A_{M_m} - A_{M_{res}} = T - T_0 \tag{3.12}$$

Si las fuerzas reducidas $\vec{F}_m$ y $\vec{F}_{res}$ ó los momentos M_m y M_{res} están dados en función del desplazamiento del punto de reducción o en función del ángulo de giro del eslabón de reducción, entonces no representa trabajo determinar los trabajos A_{F_m} y $A_{F_{res}}$ ó A_{M_m} y $A_{M_{res}}$ de estas fuerzas en el intervalo dado. De manera que siempre puede ser hallada la diferencia de trabajos del miembro izquierdo de las ecuaciones (3.11) y (3.12). Pasando a la parte derecha de estas ecuaciones, vemos que aquí están las magnitudes de las energías cinéticas del mecanismo para las posiciones dadas. Miremos cómo puede ser determinada la energía cinética del mecanismo.

En el caso general del movimiento plano de un eslabón su energía cinética puede ser representada como la suma de la energía de su movimiento rectilíneo junto con su centro de masas y la energía de su movimiento de giro alrededor del centro de masas. Por esto, para el mecanismo, podemos escribir

$$T = \frac{1}{2}\sum_{1}^{n}\left(m_i v_i^2 + J_i \omega_i^2\right). \tag{3.13}$$

En la fórmula (3.13)

m_i Es la masa del eslabón i,

v_i Es la velocidad del centro de masas del eslabón i,

J_i Es su momento de inercia con respecto al eje que pasa por el centro de masas y

ω_i Es su velocidad angular.

Miremos cómo se calcula la energía cinética de los eslabones por separado, dependiendo de su forma de movimiento.

La energía cinética de un eslabón que se mueve rectilíneamente es

$$T = \frac{mv_S^2}{2} \tag{3.14}$$

En esta fórmula m es la masa del eslabón y v_S es la velocidad del centro de masas del eslabón con desplazamiento rectilíneo.

Para el eslabón con movimiento giratorio la energía cinética es igual a

$$T = \frac{J\omega^2}{2} \tag{3.15}$$

Donde J es el momento de inercia del eslabón con respecto a su eje de giro y ω es la velocidad angular del mismo.

Para el eslabón con movimiento plano complejo, la energía cinética puede ser expresada como

$$T = \frac{J_p\omega^2}{2} \tag{3.16}$$

Donde J_p es el momento de inercia del eslabón con respecto al eje que pasa a través del centro instantáneo de giro p y ω es la velocidad angular del eslabón. El momento de inercia J_p del eslabón con respecto al centro instantáneo de giro, puede ser expresado a través de momento de inercia J_S con respecto al eje que pasa a través del centro de masas del eslabón S:

$$J_p = J_S + ml_{pS}^2 \tag{3.17}$$

En esta igualdad l_{pS} es la distancia desde el centro de masas del eslabón S hasta el centro instantáneo de giro p. Sustituyendo la expresión de J_p de la igualdad (3.17) en la ecuación (3.16), y teniendo en cuenta que la velocidad lineal del centro de masas es:

$$v_S = \omega l_{pS},$$

Obtenemos la conocida fórmula de la energía cinética del eslabón en movimiento plano complejo de desplazamiento y giro:

$$T = \frac{J_S\omega^2}{2} + \frac{mv_S^2}{2} \tag{3.18}$$

Sumando algebraicamente las energías cinéticas de los eslabones por separado, con ayuda de la fórmula (3.13) obtenemos el valor de la energía cinética de todo el mecanismo.

3.3 MASA Y MOMENTO DE INERCIA REDUCIDOS DE UN MECANISMO

Un mecanismo con un grado de libertad posee un eslabón inicial, el cual puede ser escogido como eslabón de reducción. Supongamos que el mecanismo a estudiar está compuesto de *n* eslabones (fig. 3.4*a*) y posee un grado de libertad.

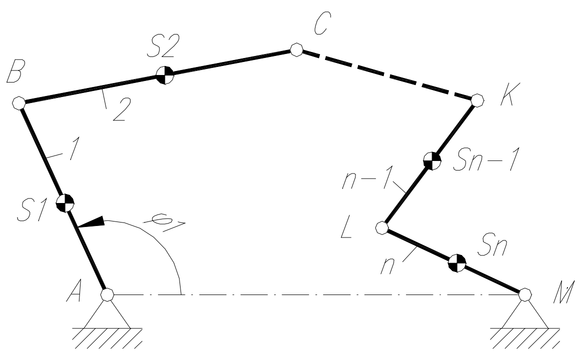


Fig. 3.4*a*

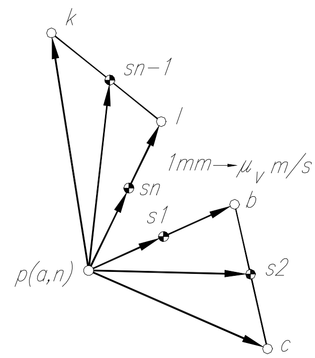


Fig. 3.4*b*

En este mecanismo escogemos un eslabón, por ejemplo el eslabón *AB*, en calidad de eslabón de reducción; y uno de sus puntos, por ejemplo el punto *B*, en calidad de punto de reducción. Desarrollaremos la ecuación (3.13), multiplicamos y dividimos el miembro derecho de la igualdad (3.13) por el cuadrado de la velocidad del punto de reducción v_B^2, y lo sacamos la magnitud v_B^2 fuera del paréntesis. Entonces la igualdad (3.13) puede ser expresada en la siguiente forma:

$$T = \frac{v_B^2}{2}\left[m_1\left(\frac{v_1}{v_B}\right)^2 + J_1\left(\frac{\omega_1}{v_B}\right)^2 + m_2\left(\frac{v_2}{v_B}\right)^2 + J_2\left(\frac{\omega_2}{v_B}\right)^2 + \cdots + m_n\left(\frac{v_n}{v_B}\right)^2 + J_n\left(\frac{\omega_n}{v_B}\right)^2\right] \quad (3.19)$$

Donde $v_1, v_2, ..., v_n$ son las velocidades de los centros de masa de los eslabones.

En la igualdad (3.19) la energía cinética T está expresada como función de la velocidad v_B del punto de reducción. La energía cinética puede ser también expresada en función de la velocidad angular ω del eslabón de reducción. Para esto multiplicamos y dividimos el miembro derecho de la ecuación (3.13) por el cuadrado de la velocidad angular ω_1^2 del eslabón *AB*. Obtendremos:

$$T = \frac{\omega_1^2}{2}\left[m_1\left(\frac{v_1}{\omega_1}\right)^2 + J_1\left(\frac{\omega_1}{\omega_1}\right)^2 + m_2\left(\frac{v_2}{\omega_1}\right)^2 + J_2\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2 + \cdots + m_n\left(\frac{v_n}{\omega_1}\right)^2 + J_n\left(\frac{\omega_n}{\omega_1}\right)^2\right] \quad (3.20)$$

Representaremos la magnitud incluida dentro de los corchetes en la ecuación (3.19) a través de m_{red}; y la magnitud incluida dentro de los corchetes en la ecuación (3.20) a través de J_{red}. Es decir:

$$m_{red} = m_1\left(\frac{v_1}{v_B}\right)^2 + J_1\left(\frac{\omega_1}{v_B}\right)^2 + m_2\left(\frac{v_2}{v_B}\right)^2 + J_2\left(\frac{\omega_2}{v_B}\right)^2 + \cdots + m_n\left(\frac{v_n}{v_B}\right)^2 + J_n\left(\frac{\omega_n}{v_B}\right)^2 \quad (3.21)$$

y

$$J_{red} = m_1\left(\frac{v_1}{\omega_1}\right)^2 + J_1\left(\frac{\omega_1}{\omega_1}\right)^2 + m_2\left(\frac{v_2}{\omega_1}\right)^2 + J_2\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2 + \cdots + m_n\left(\frac{v_n}{\omega_1}\right)^2 + J_n\left(\frac{\omega_n}{\omega_1}\right)^2 \quad (3.22)$$

En las igualdades (3.21) y (3.22) se observa que la magnitud m_{red} posee unidades de masa [kg], y que la magnitud J_{red} posee unidades de momento de inercia [kg·m^2]. De esta manera m_{red} representa cierta masa convencional concentrada en el punto *B*, *cuya energía cinética T en cada posición observada del mecanismo es igual a la energía* *cinética de los eslabones ABC... KLM.* (fig. 3.4*a*), es decir, igual a la suma de las energías cinéticas de todos sus eslabones. La masa m_{red} se denomina *masa reducida.*

De la igualdad (3.21) se deduce que en el caso general la masa reducida no es invariable (cambia para cada posición del mecanismo) y depende de los cuadrados de las relaciones de las velocidades lineales y angulares, es por esto que siempre tiene un valor positivo.

De manera análoga la magnitud J_{red} en la igualdad (3.22) representa el *momento de inercia* de los eslabones del mecanismo *reducido* al eslabón *AB.* Este es el momento de inercia de cierto cuerpo que gira junto con el eslabón *AB* cuya *energía cinética para cada posición observada del mecanismo, es igual a la suma de las energías cinéticas de todos sus eslabones.*

Sustituyendo en las fórmulas (3.19) y (3.20) los valores de m_{red} y J_{red} y además teniendo en cuenta la fórmula (3.13), obtenemos:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{1}^{n}\left(m_i v_i^2 + J_i \omega_i^2\right) = \frac{v_B^2}{2}\sum_{1}^{n}\left[m_i\left(\frac{v_i}{v_B}\right)^2 + J_i\left(\frac{\omega_i}{v_B}\right)^2\right] = \frac{m_{red} v_B^2}{2} \qquad (3.23)$$

y

$$T = \frac{1}{2}\sum_{1}^{n}\left(m_i v_i^2 + J_i \omega_i^2\right) = \frac{\omega_1^2}{2}\sum_{1}^{n}\left[m_i\left(\frac{v_i}{\omega_1}\right)^2 + J_i\left(\frac{\omega_i}{\omega_1}\right)^2\right] = \frac{J_{red}\omega_1^2}{2}\ . \qquad (3.24)$$

De las ecuaciones (3.23) y (3.24) se deduce que la masa reducida m_{red} y el momento de inercia reducido J_{red} están ligados por la condición:

$$m_{red} v_B^2 = J_{red}\omega_1^2\ ,$$

Pero como

$$v_B^2 = \omega_1^2 l_{AB}^2\ ,$$

Entonces

$$m_{red} = \frac{J_{red}}{l_{AB}^2}\ , \qquad (3.25)$$

Donde l_{AB} es la longitud del eslabón de reducción.

La masa reducida m_{red} y el momento de inercia reducido J_{red} pueden ser expresados a través de los segmentos correspondientes del plano de velocidades (fig. 3.4*b*). Tenemos

$$m_{red} = m_1\left(\frac{ps_1}{pb}\right)^2 + \frac{J_1}{l_{AB}^2}\left(\frac{ab}{pb}\right)^2 + m_2\left(\frac{ps_2}{pb}\right)^2 + \frac{J_2}{l_{BC}^2}\left(\frac{bc}{pb}\right)^2 + \cdots + m_n\left(\frac{ps_n}{pb}\right)^2 + \frac{J_n}{l_{LN}^2}\left(\frac{ln}{pb}\right)^2$$

y

$$J_{red} = m_1 l_{AB}^2\left(\frac{ps_1}{pb}\right)^2 + J_1\frac{l_{AB}^2}{l_{AB}^2}\left(\frac{ab}{pb}\right)^2 + m_2 l_{AB}^2\left(\frac{ps_2}{pb}\right)^2 + J_2\frac{l_{AB}^2}{l_{BC}^2}\left(\frac{bc}{pb}\right)^2 +$$
$$+ \cdots + m_n l_{AB}^2\left(\frac{ps_n}{pb}\right)^2 + J_n\frac{l_{AB}^2}{l_{LN}^2}\left(\frac{ln}{pb}\right)^2$$

Ya que $\quad v_{S1} = \mu_v(ps_1)\ ,\ v_{S2} = \mu_v(ps_2)\ ,\ \ldots,\ v_{Sn} = \mu_v(ps_n)\ ;$

$$\omega_1 = \mu_v \frac{(ab)}{l_{AB}}, \quad \omega_2 = \mu_v \frac{(bc)}{l_{BC}} \quad ,..., \quad \omega_n = \mu_v \frac{(ln)}{l_{LN}}$$

y

$$v_B = \mu_v (pb)$$

Donde μ_v es el coeficiente de escala del plano de velocidades.

Como puede verse, la masa reducida m_{red} y el momento de inercia reducido J_{red} son funciones de la coordenada generalizada φ_1 (fig. 3.4), es decir

$$m_{red} = m_{red}(\varphi_1) \quad \text{y} \quad J_{red} = J_{red}(\varphi_1)\,.$$

Como se dijo anteriormente, en calidad de eslabón de reducción por lo general se toma el eslabón inicial (fig. 3.4*a*). De esta manera el eslabón *AB* se encontrará bajo la acción de las fuerzas $\vec{F}_m$ y $\vec{F}_{res}$, las cuales en el caso general no son invariables (es decir son cambiantes) y poseerá masa m_{red} concentrada en el punto *B*, la cual en el caso general también es no constante (fig. 3.3). Reduciendo todas las fuerzas que actúan sobre los eslabones del mecanismo y todas sus masas al eslabón *AB*, de manera convencional sustituimos el mecanismo por otro equivalente desde el punto de vista dinámico que posee una masa m_{red} y un momento de inercia J_{red}.

Ejemplo 1. Determinar la energía cinética, la masa y el momento de inercia reducidos del mecanismo mostrado (fig. 3.5*a*) para la posición que se muestra en el dibujo, si se conocen las masas y los momentos de inercia de todos los eslabones. Las velocidades de los centros de masas y las velocidades angulares de los eslabones están dadas por medio del plano de velocidades girado (fig. 3.5*b*). En calidad de eslabón de reducción se escogió el eslabón *AB*.

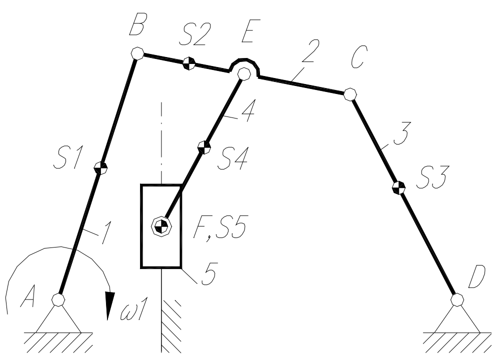


Fig. 3.5*a*

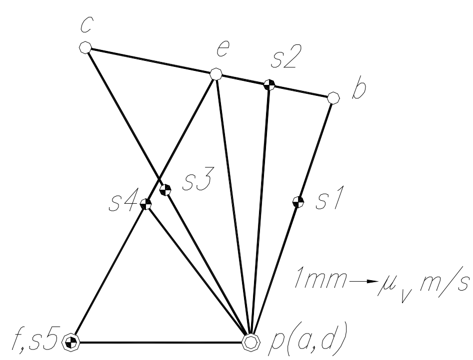


Fig. 3.5*b*

La energía cinética total T del mecanismo, de acuerdo a la fórmula (3.13) es igual a

$$T = \frac{1}{2}\sum_{1}^{n}\left(m_i v_i^2 + J_i \omega_i^2\right) = \frac{J_1\omega_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} + \frac{J_2\omega_2^2}{2} + \frac{J_3\omega_3^2}{2} + \frac{m_4 v_4^2}{2} + \frac{J_4\omega_4^2}{2} + \frac{m_5 v_5^2}{2}\,.$$

En esta fórmula

J_2 y J_4	son los momentos de inercia de los eslabones *2* y *4* con respecto a los ejes que pasan por los centros de masas S_2 y S_4;
J_1 y J_3	son los momentos de inercia de los eslabones *1* y *3* con respecto a los ejes que pasan por los puntos *A* y *D*;
ω_1, ω_2, ω_3, ω_4,	son las velocidades angulares de los eslabones *1*, *2*, *3*, *4*;
v_2, v_4, v_5,	son las velocidades de los centros de masas S_2, S_4, S_5, de los eslabones *2*, *4*, *5*; y

m_2, m_4, m_5, son las masas de los eslabones *2*, *4*, *5*.

Ya que se tomó en calidad de eslabón de reducción el eslabón *AB*, entonces la energía cinética *T* del mecanismo, de acuerdo a la fórmula (3.24) puede ser expresada así:

$$T = \frac{\omega_1^2}{2}\left[J_1 + m_2\left(\frac{v_2}{\omega_1}\right)^2 + J_2\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2 + J_3\left(\frac{\omega_3}{\omega_1}\right)^2 + m_4\left(\frac{v_4}{\omega_1}\right)^2 + J_4\left(\frac{\omega_4}{\omega_1}\right)^2 + m_5\left(\frac{v_5}{\omega_1}\right)^2\right] =$$

$$= \frac{J_{red}\,\omega_1^2}{2}$$

Donde J_{red} es la expresión que se encuentra entre corchetes.

La magnitud del momento de inercia reducido J_{red} puede ser expresada a través de los segmentos correspondientes en el plano de velocidades (fig. 3.5*b*). Para esto calculamos todos los valores de las velocidades lineales y angulares que entran en la expresión de la energía cinética. Tenemos

$$\omega_1 = \mu_v\,\frac{(pb)}{l_{AB}}, \qquad \omega_2 = \mu_v\,\frac{(bc)}{l_{BC}}, \qquad \omega_3 = \mu_v\,\frac{(pc)}{l_{DC}}, \qquad \omega_4 = \mu_v\,\frac{(fe)}{l_{FE}}$$

$$v_2 = \mu_v\,(ps_2)\,, \qquad v_4 = \mu_v\,(ps_4)\,, \qquad v_5 = \mu_v\,(ps_5)\,.$$

Sustituyendo estas expresiones en la fórmula para el momento reducido J_{red} obtenemos su expresión para el mecanismo

$$J_{red} = J_1 + m_2 l_{AB}^2\left(\frac{ps_2}{pb}\right)^2 + J_2\,\frac{l_{AB}^2}{l_{BC}^2}\left(\frac{bc}{pb}\right)^2 + J_3\,\frac{l_{AB}^2}{l_{DC}^2}\left(\frac{pc}{pb}\right)^2 +$$

$$+ m_4 l_{AB}^2\left(\frac{ps_4}{pb}\right)^2 + J_4\,\frac{l_{AB}^2}{l_{FE}^2}\left(\frac{fe}{pb}\right)^2 + m_5 l_{AB}^2\left(\frac{ps_5}{pb}\right)^2.$$

La energía cinética del mecanismo puede ser expresada también a través de la masa reducida m_{red} , como punto de reducción puede ser tomado cualquier punto del eslabón. Si tomamos como punto de reducción el punto *B*, entonces la fórmula de la energía cinética toma la siguiente forma:

$$T = \frac{m_{red}\,v_B^2}{2}\,.$$

Ya que según la fórmula (3.25) $m_{red} = \dfrac{J_{red}}{l_{AB}^2}$, entonces dividiendo la parte derecha de la ecuación del momento de inercia J_{red} por l_{AB}^2 , obtenemos el valor de la masa reducida

$$m_{red} = \frac{J_1}{l_{AB}^2} + m_2\left(\frac{ps_2}{pb}\right)^2 + \frac{J_2}{l_{BC}^2}\left(\frac{bc}{pb}\right)^2 + \frac{J_3}{l_{DC}^2}\left(\frac{pc}{pb}\right)^2 + m_4\left(\frac{ps_4}{pb}\right)^2 + \frac{J_4}{l_{FE}^2}\left(\frac{fe}{pb}\right)^2 + m_5\left(\frac{ps_5}{pb}\right)^2.$$

Las magnitudes de los segmentos tomados del plano de velocidades pueden ser sustituidos directamente en milímetros (o en unidades de CAD) sin multiplicarlos por el coeficiente de escala μ_v ya que esta magnitud se elimina al dividir un segmento entre otro.

Ejemplo 2. Para el mecanismo de manivela deslizador (fig. 3.6*a*) encontrar la fuerza reducida $\vec{F}_{red}$ al eje de la junta *B*, perpendicular a la línea *AB*, debida a la fuerza F_3 = 1000 N, aplicada al eslabón *3* (pistón), como también la masa m_{red} reducida al mismo punto debida a todas las masas del mecanismo. Realizar el cálculo para la posición del eslabón de reducción φ_1 = 45°. Las dimensiones de los eslabones y coordenadas de los centros de masas son : l_{AB} = 65 mm, l_{BC} =

320 mm, la coordenada l_{BS2} del centro de masas del eslabón *2* es l_{BS2} = 60 mm, el centro de masas del eslabón *1* está en el eje de la junta *A*. La masa del eslabón *2* m_2 = 0,4 kg, el momento de inercia del eslabón *2* con respecto al eje que pasa por el centro de masas es $J_2 = 6 \cdot 10^{-3}$ kgm^2, la masa del eslabón *3* m_3 = 0,5 kg, el momento de inercia del eslabón *1* con respecto al eje que pasa por el centro de masas es $J_1 = 12 \cdot 10^{-3}$ kgm^2.

Solución. 1) Construimos el plano de posición en escala μ_l = 1 m/UnCAD.

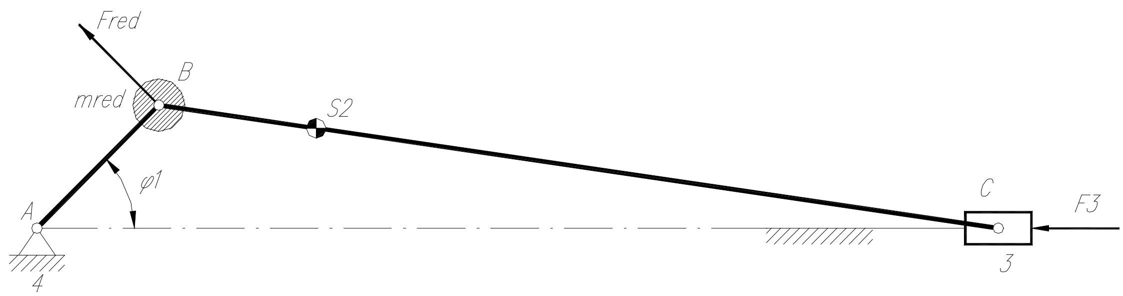


Fig. 3.6*a*

2) Construimos el plano de velocidades (fig.3.6*b*) según el sistema de ecuaciones $\begin{cases} \vec{v}_C = \vec{v}_B + \vec{v}_{CB}; \\ \vec{v}_C = \vec{v}_{C4} + \vec{v}_{CC4}. \end{cases}$

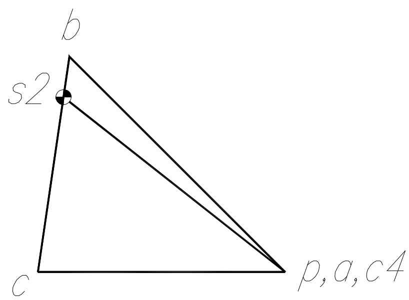


Fig. 3.6*b*

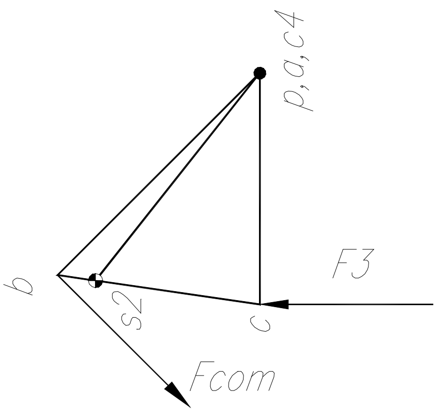


Fig. 3.6*c*

3) La fuerza reducida $\vec{F}_{red}$ la calculamos según la fórmula

$$F_{red} = \sum_1^k F_i \frac{v_i \cos\alpha_i}{v_B} + \sum_1^k M_i \frac{\omega_i}{v_B} = F_3 \frac{v_c}{v_B} = F_3 \frac{(pc)}{(pb)} = \frac{1000 \cdot 0{,}052633}{0{,}065} = 809{,}738\,\mathrm{N}$$

donde (*pc*) y (*pb*) se tomaron del plano de velocidades.

A los mismos cálculos lleva la utilización de la palanca rígida de Zhukovski. Girando el plano de velocidades 90° y trasladando todas las fuerzas a sus puntos homónimos obtenemos la fig. 3.6*c*. Planteamos luego la ecuación del equilibrio de momentos con respecto al polo *p*.

$$F_{com} \cdot (pb) - F_3 \cdot (pc) = 0\ ;$$

de donde

$$F_{com} = F_3 \frac{(pb)}{(pc)} = 809{,}738\,\mathrm{N}\,,$$

Atendiendo a la condición

$$\vec{F}_{com} = -\vec{F}_{red} .$$

4) La masa reducida m_{red} la determinamos por la relación

$$T = \frac{m_{red} v_B^2}{2} ,$$

De donde
$$m_{red} = \frac{2T}{v_B^2} .$$

Aquí:

T es la energía cinética total de todos los eslabones del mecanismo.

v_B es la velocidad del punto de reducción.

Es decir
$$m_{red} = \frac{2(T_1 + T_2 + T_3)}{v_B^2} ,$$

Donde T_1, T_2, T_3 son las energías cinéticas de los eslabones *1, 2, 3*. Escribimos las expresiones para estas energías:

$$T_1 = \frac{J_1 \omega_1^2}{2} = \frac{J_1 v_B^2}{2 l_{AB}^2} ,$$

$$T_2 = \frac{J_{S2} \omega_2^2}{2} + \frac{m_2 v_{S2}^2}{2} = \frac{J_{S2} v_{CB}^2}{2 l_{BC}^2} + \frac{m_2 v_{S2}^2}{2} ,$$

$$T_3 = \frac{m_3 v_C^2}{2} .$$

En los valores de T_1 y T_2 las velocidades angulares ω_1 y ω_2 están expresadas a través de sus correspondientes velocidades lineales v_B y v_{CB}, es decir $\omega_1 = \dfrac{v_B}{l_{AB}}$, $\omega_2 = \dfrac{v_{CB}}{l_{BC}}$. Sustituyendo en la fórmula para m_{red} los valores de las energías cinéticas T_1, T_2, T_3 para cada eslabón y sustituyendo en éstas los valores de las velocidades por los segmentos correspondientes del plano de velocidades, obtenemos.

$$m_{red} = \frac{J_1}{l_{AB}^2} + \frac{J_{S2}}{l_{BC}^2}\left(\frac{bc}{pb}\right)^2 + m_2\left(\frac{ps_2}{pb}\right)^2 + m_3\left(\frac{pc}{pb}\right)^2 =$$

$$= \frac{12 \cdot 10^{-3}}{(0{,}065)^2} + \frac{6 \cdot 10^{-3}}{(0{,}320)^2}\left(\frac{0{,}046443}{0{,}065}\right)^2 + 0{,}4\left(\frac{0{,}060197}{0{,}065}\right)^2 + 0{,}5\left(\frac{0{,}052633}{0{,}065}\right)^2 = 3{,}541\,\text{kg}.$$

Donde (pb), (bc), (ps_2) y (pc) se tomaron del plano de velocidades.

Ejemplo 3. Para el reductor en línea mostrado en la fig. 3.7 encontrar el momento M_{red} reducido al árbol O_1 de la rueda *1* y el momento de inercia J_{red} reducido al mismo árbol, debido a la masa de la rueda *3* si dicha rueda está sometida al momento M_3 = 4 N·m, y el momento de inercia de la rueda *3* con respecto a su eje de giro es J_3 = 0,04 kg·m^2; los números de dientes de las ruedas son z_1 = 30, z_2 = 20, z_3 = 60.

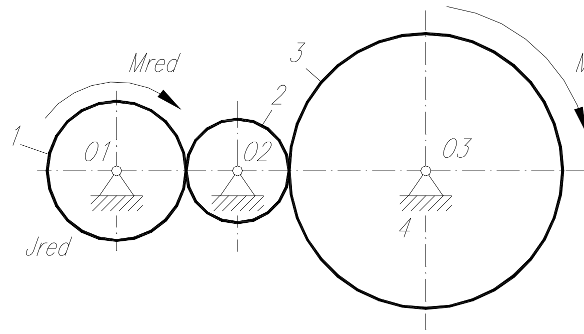


Fig. 3.7

Solución: 1) aplicando la fórmula determinamos el momento reducido M_{red} .

$$M_{red} = \sum_1^k F_i \frac{v_i \cos\alpha_i}{\omega} + \sum_1^k M_i \frac{\omega_i}{\omega} = M_3 \frac{\omega_3}{\omega_1} = M_3 i_{31} = M_3 \frac{z_1}{z_3} = 4\frac{30}{60} = 2\,\text{Nm}$$

La potencia del momento reducido (M_{red}) es igual en magnitud y signo a la potencia del momento a reducir (M_3). Aquí el momento M_{red} tiene el mismo signo que el momento M_3 ya que i_{31} es positivo.

2) Hallamos el momento de inercia reducido J_{red} partiendo de la relación

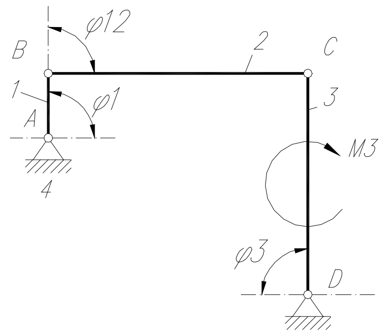
$$T = \frac{J_{red}\omega_1^2}{2}$$

Donde T (energía cinética) está expresada como $T_3 = \frac{J_3\omega_3^2}{2}$. Sustituyendo

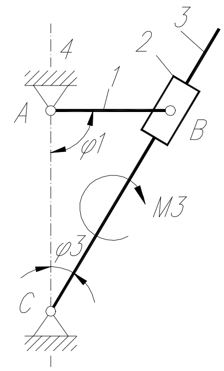
$$J_{red} = J_3\left(\frac{\omega_3}{\omega_1}\right)^2 = J_3 i_{31}^2 = 0{,}04\left(\frac{30}{60}\right)^2 = 0{,}01\,\text{kgm}^2 .$$

Problema 1. Para el mecanismo de cuatro eslabones mostrado encontrar el momento reducido M_{red} al árbol A del eslabón AB del momento M_3 = 40 N·m aplicado al balancín *3*. Determinar también el momento de inercia reducido J_{red} de la masa del mismo balancín, si el momento de inercia de dicho eslabón con respecto al eje D es J_D = 0,016 kg·m^2. Las dimensiones de los eslabones son: l_{AB} = 100 mm, $l_{BC} = l_{CD}$ = 400 mm. Los ángulos son $\varphi_1 = \varphi_{12} = \varphi_3$ = 90°.
Respuesta: M_{red} = 10 N·m ; J_{red} = 0,001 kg·m^2

Problema 2. Para el mecanismo de colisa mostrado encontrar el momento reducido M_{red} al árbol A del eslabón AB del momento M_3 = 10 N·m aplicado a la colisa *3*. Determinar también el momento de inercia reducido J_{red} de la masa de la misma colisa, si el momento de inercia de dicho eslabón con respecto al eje C es J_C = 0,016 kg·m^2. Las dimensiones de los eslabones son: l_{AB} = 100 mm. Los ángulos son φ_1 = 90°, φ_3 = 30°
Respuesta: M_{red} = 2,5 N·m ; J_{red} = 0,001 kg·m^2



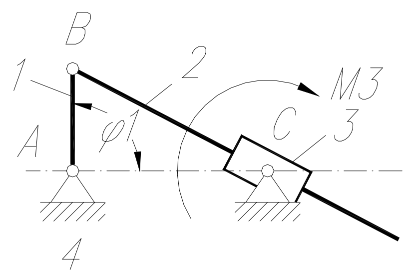
Problema 1



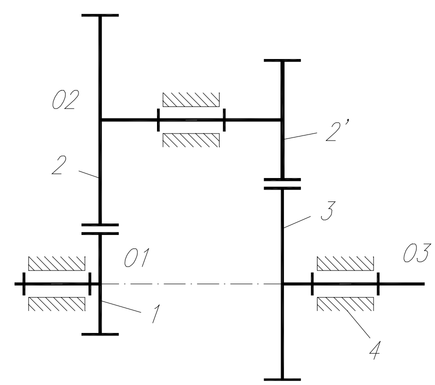
Problema 2

Problema 3. Para el mecanismo de corredera oscilante mostrado encontrar el momento reducido M_{red} al árbol A del eslabón AB del momento M_3 = 4 N·m aplicado a la corredera *3*. Determinar también el momento de inercia reducido J_{red} de la masa de la misma corredera, si el momento de inercia de dicho eslabón con respecto al eje C es J_C = 0,004 kg·m^2. Las dimensiones de los eslabones son : l_{AB} = 100 mm, l_{AC} = 300 mm. Los ángulos son φ_1 = 180°.
Respuesta: M_{red} = 1,0 N·m; J_{red} = 0,00025 kg·m^2.

Problema 4. Para el reductor coaxial mostrado determinar el momento reducido M_{red} al árbol O_1 de la rueda *1* del momento M = 4 N·m aplicado al árbol O_3 de la rueda *3*. Si los números de dientes son $z_1 = z_{2'}$ =20, $z_2 = z_3$ =40.
Respuesta: M_{red} = 1,0 N·m.



Problema 3



Problema 4

BIBLIOGRAFÍA

Artobolevski I.I. Teoría de mecanismos y máquinas. Moscú. Nauka 1988.
Artobolevski I.I., Edelstein B.V. Problemas de Teoría de mecanismos y máquinas. Moscú. Nauka 1973.
Levitskaya O.N, Levitski N.I. Curso de teoría de mecanismos y máquinas. Moscú. Visshaya shkola 1985.
Nikitin N.N. Curso de Mecánica teórica. Moscú. Visshaya shkola 1990.