

IRREGULARIDAD DEL MOVIMIENTO DE MECANISMOS Y MÁQUINAS

7.1 ASPECTOS GENERALES

Como se mostró en la lección anterior, en el caso general, la velocidad angular del eslabón inicial de un mecanismo durante el movimiento estacionario, es una magnitud no constante. La fluctuación de las velocidades de dicho eslabón suscitan en los pares cinemáticos presiones adicionales que bajan el rendimiento y la fiabilidad de la máquina. Además, dichas oscilaciones en algunos casos pueden causar vibraciones elásticas considerables en los eslabones del mecanismo o de la máquina, lo que es perjudicial desde el punto de vista de resistencia mecánica de estos, como desde el punto de vista de las pérdidas de potencia que se gasta en la realización de dichas vibraciones. Por último, las fluctuaciones de velocidad pueden perjudicar el proceso tecnológico de trabajo que ejecuta la máquina.

Si observamos las fluctuaciones de velocidad del eslabón inicial durante el tiempo del movimiento estacionario, podemos descubrir que estas oscilaciones son de dos tipos.

Como se demostró anteriormente, en la mayoría de mecanismos existe igualdad de trabajos de las fuerzas motrices y de las fuerzas de resistencia al cumplirse un ciclo de movimiento estacionario. Sin embargo dentro del ciclo mismo no se observa igualdad de estos trabajos y por consiguiente dentro del ciclo, el eslabón inicial se mueve irregularmente. Ya que a través de cada ciclo de movimiento estacionario la energía cinética del mecanismo recupera su valor inicial, las velocidades del eslabón inicial del mecanismo también se repiten siguiendo el mismo ciclo. A este tipo de fluctuaciones las llamaremos *periódicas*.

De esta manera, *se llaman fluctuaciones periódicas de la velocidad del mecanismo, a las fluctuaciones durante las cuales las velocidades de todos los eslabones del mecanismo poseen ciclos totalmente determinados, al finalizar los cuales dichas velocidades recuperan cada vez sus valores iniciales*

Además de las fluctuaciones periódicas en el mecanismo pueden presentarse fluctuaciones de velocidad aperiódicas, suscitadas por un cambio súbito de las cargas útiles o perjudiciales, por la aplicación al mecanismo de masas adicionales, etc. Un cambio súbito de carga en un mecanismo genera un aumento o disminución bruscos de la velocidad de su eslabón inicial y ya que estas fluctuaciones de velocidad en algunos casos no tienen un ciclo determinado dichas fluctuaciones de velocidad del eslabón inicial las llamaremos *aperiódicas*. En muchos mecanismos se observan ambos tipos de fluctuaciones de velocidad.

Las fluctuaciones de velocidad durante el movimiento estacionario pueden alcanzar magnitudes inapropiadas para las condiciones de trabajo del mecanismo. Se puede entonces plantear el problema sobre la regulación de dichas fluctuaciones dentro de límites dados con antelación. La tarea de regulación de las fluctuaciones de velocidad durante el movimiento estacionario es de gran importancia en la técnica, ya que en la mayoría de mecanismos este es el tiempo de trabajo durante el cual el mecanismo realiza su función de producción.

La regulación de las fluctuaciones periódicas durante el movimiento estacionario del mecanismo se realiza, por lo general, seleccionando adecuadamente las masas de sus eslabones. Dichas masas deben ser seleccionadas de tal manera que puedan acumular todos los incrementos de energía cinética que tienen lugar cuando los trabajos de las fuerzas motrices superan a los trabajos de las fuerzas de resistencia. Esta energía cinética acumulada por las masas de los eslabones debe ser entregada de vuelta en los intervalos cuando los trabajos de las fuerzas de resistencia superan a los trabajos de las fuerzas motrices.

En el caso de aperiodicidad de las fluctuaciones de velocidad del eslabón inicial durante el movimiento estacionario la selección adecuada de masas de los eslabones puede ayudar sólo en el caso de que dichas fluctuaciones no sean significativas. En el caso de fluctuaciones de velocidad aperiódicas y de gran magnitud el problema debe ser resuelto mediante la instalación de mecanismos complementarios adicionales tendientes

a regular la ley de variación de las fuerzas motrices o de las fuerzas de resistencia. Este tipo de mecanismos se denominan *reguladores*.

7.2. VELOCIDAD MEDIA DE LA MÁQUINA Y SU COEFICIENTE DE FLUCTUACIÓN DEL MOVIMIENTO

Para el estudio de las fluctuaciones periódicas de la velocidad durante el tiempo de movimiento estacionario (el estudio subsiguiente se realizará para este tiempo del movimiento del mecanismo o de la máquina), introduciremos el concepto de *velocidad media del eslabón inicial*.

Designaremos con s el camino recorrido por un punto B del eslabón inicial, durante un ciclo de su movimiento, desde la posición i hasta la posición k . Llamaremos *velocidad media real* $(v_{\text{med}})_{\text{real}}$ a la velocidad instantánea de cierto movimiento regular durante el cual un punto recorrería el camino s durante el mismo intervalo de tiempo t que se tomó el movimiento irregular.

Ya que $dt = \frac{ds}{v}$, entonces

$$t = t_k - t_i = \int_{si}^{sk} \frac{ds}{v},$$

teniendo en cuenta que $t_k - t_i = \frac{s}{(v_{\text{med}})_{\text{real}}}$, obtenemos

$$(v_{\text{med}})_{\text{real}} = \frac{s}{\int_{si}^{sk} \frac{ds}{v}}, \quad (7.1)$$

La velocidad media real por lo general es sustituida por la velocidad media aritmética v_{med} y se supone que

$$v_{\text{med}} \approx \frac{v_{\text{max}} + v_{\text{min}}}{2}, \quad (7.2)$$

donde $v_{\text{máx}}$ y $v_{\text{mín}}$ son los valores máximo y mínimo de la velocidad del punto B (fig. 7.1) Para los mecanismos con baja irregularidad de movimiento la diferencia entre estas dos magnitudes es despreciable, y por esto por lo general en calidad de velocidad media, se utiliza la que sea más cómoda para resolver el problema.

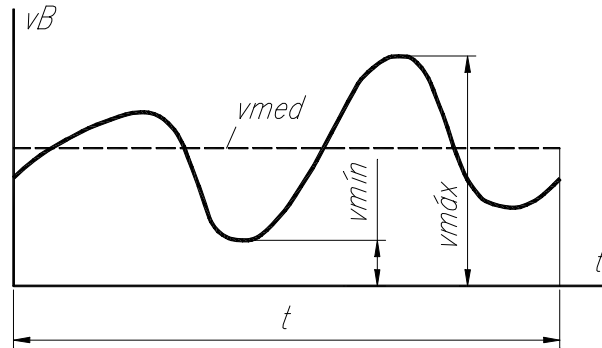


Fig. 7.1

.En las especificaciones técnicas de los motores o de las máquinas de trabajo por lo general se señala esta velocidad media convencional, la cual en estos casos, denominan velocidad nominal.

Para los mecanismos con alta irregularidad de movimiento es preferible usar la velocidad media real.

Si dividimos la diferencia entre los valores máximo y mínimo de la velocidad v_B del punto B por la velocidad media (fig. 7.1), obtenemos el llamado *coeficiente de irregularidad de movimiento del mecanismo o máquina*, el cual se representa con δ y es igual a

$$\delta = \frac{v_{\max} - v_{\min}}{v_{\text{med}}} . \quad (7.3)$$

Cuanto menos sea la diferencia entre $v_{\max}$ y $v_{\min}$ tanto más regularmente girará el eslabón inicial. El objetivo de la regulación del movimiento del mecanismo o de la máquina durante su movimiento estacionario se resume a la selección de una relación tal entre las masas de los eslabones y las fuerzas que actúan sobre ellos, para la cual el coeficiente de irregularidad δ no supere ciertos valores dados a priori. En la práctica la magnitud δ oscila entre límites muy significativos.

En la tabla 7.1 se muestran los coeficientes de irregularidad permitidos para ciertos tipos de máquinas.

Tabla 7.1

Tipo de máquina	Coeficiente de irregularidad de movimiento
Bombas	1/5 ... 1/30
Maquinaria agrícola	1/5 ... 1/50
Máquinas herramienta	1/20 ... 1/50
Telares, imprentas, molinos	1/10 ... 1/50
Molinos de papel	1/60 ... 1/100
Motores de barcos	1/20 ... 1/150
Motores de combustión interna	1/80 ... 1/100
Compresores	1/50 ... 1/100
Generadores de corriente continua	1/100 ... 1/200
Generadores de corriente alterna	1/200 ... 1/300
Motores de aviación	1/200 y menos
Turbogeneradores	1/200 y menos

Resulta cómodo expresar la velocidad media de la máquina o del mecanismo, como también su coeficiente de irregularidad del movimiento a través de los ángulos de giro y de la velocidad angular del eslabón inicial. Entonces, por analogía con las igualdades (7.1) ... (7.3) tendremos las expresiones para la velocidad angular media real (ω_{med})

$$(\omega_{\text{med}})_{\text{real}} = \frac{\varphi}{\int_{\varphi_i}^{\varphi_k} \frac{d\varphi}{\omega}} , \quad (7.4)$$

para la velocidad angular media aritmética

$$\omega_{\text{med}} = \frac{\omega_{\max} + \omega_{\min}}{2} \quad (7.5)$$

y para el coeficiente de irregularidad de movimiento

$$\delta = \frac{\omega_{\max} - \omega_{\min}}{\omega_{\text{med}}} \quad (7.6)$$

El coeficiente de irregularidad de movimiento caracteriza solamente el “salto” de la velocidad angular del eslabón inicial desde $\omega_{\min}$ hasta $\omega_{\max}$, pero no caracteriza la dinámica del movimiento de este eslabón dentro de un ciclo completo del movimiento estacionario.

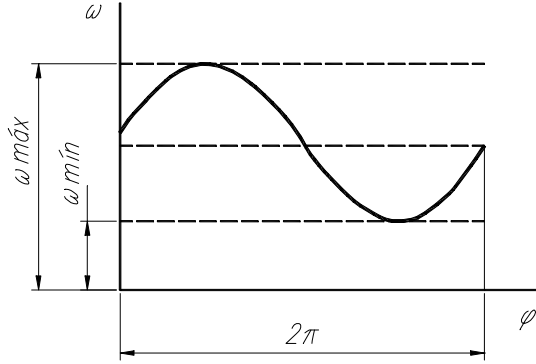


Fig. 7.2a

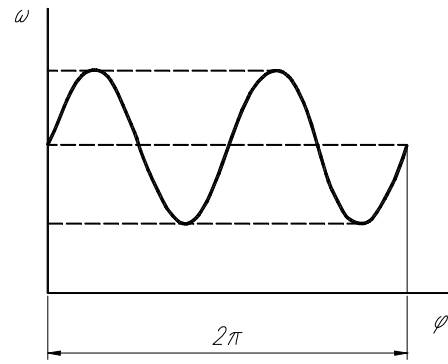


Fig. 7.2b

Así, en las fig. 7.2a y 7.2b se muestran dos gráficos de la función $\omega = \omega(\varphi)$, en las cuales $\omega_{\max}$ y $\omega_{\min}$ son iguales, pero las aceleraciones angulares ε para la fig. 7.2b son significativamente mayores que para la fig. 7.2a. Evidentemente las características dinámicas de ambos ciclos son distintas. La calificación comparativa de las propiedades dinámicas del mecanismo o máquina para el movimiento estacionario puede ser realizada con ayuda del *coeficiente de dinamicidad* K , en el cual se relacionan el valor extremo (más alto) de la aceleración angular ε_{ext} y el cuadrado de la velocidad angular media ω_{med}^2 :

$$K = \frac{\varepsilon_{\text{ext}}}{\omega_{\text{med}}^2} \quad (7.7)$$

Multiplicamos el numerador y el denominador de la expresión (7.7) por el valor del momento de inercia reducido medio $J_{\text{red med}}$. Obtenemos entonces

$$K = \frac{J_{\text{red med}} \varepsilon_{\text{ext}}}{J_{\text{red med}} \omega_{\text{med}}^2} = \frac{M_{\text{ext}}}{2T_{\text{med}}} \quad (7.8)$$

y de esta manera el coeficiente de dinamicidad del mecanismo es igual al momento extremo M_{ext} , aplicado al eslabón inicial; dividido por dos veces la magnitud de la energía cinética media T_{med} del mecanismo.

El coeficiente de dinamicidad K del régimen de movimiento del mecanismo de la fig. 7.2b es mayor que el del mecanismo cuyo régimen se muestra en la fig. 7.2a, para la misma magnitud del momento de inercia reducido medio $J_{\text{red med}}$.

Si construimos para todo el tiempo de trabajo del mecanismo el diagrama $T = T(J_{\text{red}})$ (ver lección 6), la determinación de la magnitud δ no representa ninguna dificultad. Para esto se tiene en cuenta el tramo del diagrama $T = T(J_{\text{red}})$ correspondiente al movimiento estacionario (fig. 7.3). Este tramo del diagrama $T =$

$T(J_{red})$, como se dijo anteriormente es una gráfica cerrada. De la fórmula (6.8)¹ se deduce que la velocidad angular máxima $\omega_{m\acute{a}x}$ corresponde al valor máximo de la tangente del ángulo $\psi_{m\acute{a}x}$, determinado por la fórmula (6.8), y que la velocidad angular mínima $\omega_{m\acute{i}n}$ corresponde al valor mínimo de la tangente del ángulo $\psi_{m\acute{i}n}$.

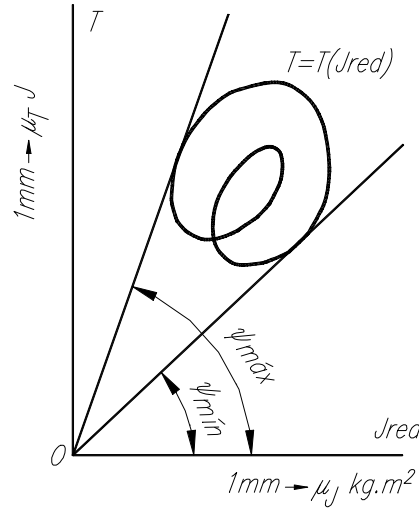


Fig. 7.3

Para la determinación de el valor máximo $\psi_{m\acute{a}x}$ y el valor mínimo $\psi_{m\acute{i}n}$ del ángulo ψ trazamos a partir del origen O en dirección al tramo cerrado de la curva $T = T(J_{red})$ dos tangentes. Una de ellas forma con el eje de las abscisas el ángulo máximo $\psi_{m\acute{a}x}$ y la otra el ángulo mínimo $\psi_{m\acute{i}n}$. Partiendo de la fórmula (6.7)² podemos escribir

$$\omega_{max}^2 = 2 \frac{\mu_T}{\mu_J} \tan \psi_{max}, \quad \omega_{min}^2 = 2 \frac{\mu_T}{\mu_J} \tan \psi_{min}. \quad (7.9)$$

Como se dijo anteriormente, el coeficiente de irregularidad del movimiento δ es

$$\delta = \frac{\omega_{max} - \omega_{min}}{\omega_{med}}. \quad (7.10)$$

Multiplicando el numerador y el denominador de la parte derecha de la ecuación (7.10) por $(\omega_{max} + \omega_{min})$, obtenemos

$$\delta = \frac{(\omega_{max} - \omega_{min})(\omega_{max} + \omega_{min})}{\omega_{med}(\omega_{max} + \omega_{min})} = \frac{\omega_{max}^2 - \omega_{min}^2}{2\omega_{med}^2}, \quad (7.11)$$

ya que $\omega_{max} + \omega_{min} = 2\omega_{med}$ (mirar fórmula (7.5)).

Sustituyendo en la fórmula (7.11) las expresiones para ω_{max}^2 y ω_{min}^2 obtenidas en la fórmulas (7.9), obtenemos

¹ Fórmula (6.8): $\omega_i = \sqrt{2 \frac{\mu_T}{\mu_J} \tan \psi_i}$

² Fórmula (6.7): $\omega_i^2 = 2 \frac{\mu_T}{\mu_J} \tan \psi_i$,

$$\delta = \frac{\mu_T}{\mu_{Jred}} \frac{\tan \psi_{\max} - \tan \psi_{\min}}{\omega_{\text{med}}^2}. \quad (7.12)$$

Los ángulos $\psi_{\max}$ y $\psi_{\min}$ pueden ser obtenidos directamente del dibujo, y la magnitud ω_{med} se determina por la fórmula (7.4).

Resolviendo simultáneamente las ecuaciones (7.5), (7.6) y (7.9), el coeficiente de irregularidad del movimiento δ es igual a

$$\delta = \frac{\omega_{\max} - \omega_{\min}}{\omega_{\text{med}}} = 2 \frac{\omega_{\max} - \omega_{\min}}{\omega_{\max} + \omega_{\min}} = 2 \frac{\sqrt{\tan \psi_{\max}} - \sqrt{\tan \psi_{\min}}}{\sqrt{\tan \psi_{\max}} + \sqrt{\tan \psi_{\min}}}. \quad (7.13)$$

El coeficiente de irregularidad del movimiento δ de un mecanismo puede ser también determinado directamente, si se tiene el diagrama de velocidades (por ejemplo fig.7.1). Para esto se determinan $v_{\max}$ y $v_{\min}$ a partir del diagrama y sus valores se sustituyen en las fórmulas (7.2) y (7.3).

7.3. CORRELACIÓN ENTRE EL MOMENTO DE INERCIA REDUCIDO, LAS FUERZAS REDUCIDAS Y EL COEFICIENTE DE IRREGULARIDAD DE MOVIMIENTO DEL MECANISMO.

Resolviendo las ecuaciones (7.5) y (7.6) con respecto a $\omega_{\max}$ y $\omega_{\min}$, encontramos

$$\omega_{\max} = \omega_{\text{med}} \left(1 + \frac{\delta}{2} \right) \quad \text{y} \quad \omega_{\min} = \omega_{\text{med}} \left(1 - \frac{\delta}{2} \right), \quad (7.14)$$

Elevando las partes derechas e izquierdas de estas ecuaciones al cuadrado, obtenemos

$$\begin{aligned} \omega_{\max}^2 &= \omega_{\text{med}}^2 \left(1 + \delta + \frac{\delta^2}{4} \right) \approx \omega_{\text{med}}^2 (1 + \delta) \\ \omega_{\min}^2 &= \omega_{\text{med}}^2 \left(1 - \delta + \frac{\delta^2}{4} \right) \approx \omega_{\text{med}}^2 (1 - \delta) \end{aligned} \quad (7.15)$$

Para valores pequeños del coeficiente δ , el miembro $\delta^2/4$ puede ser despreciado. Para mecanismos donde el coeficiente δ es considerable, dicho miembro debe ser tenido en cuenta. Sustituyendo en las ecuaciones (7.15) las expresiones para $\omega_{\max}$ y $\omega_{\min}$ de las fórmulas (7.9), obtenemos

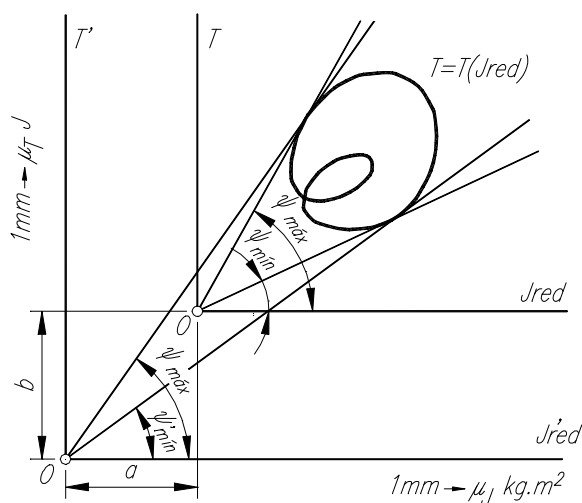
$$\begin{aligned} 2 \frac{\mu_T}{\mu_J} \tan \psi_{\max} &= \omega_{\text{med}}^2 \left(1 + \delta + \frac{\delta^2}{4} \right) \approx \omega_{\text{med}}^2 (1 + \delta), \\ 2 \frac{\mu_T}{\mu_J} \tan \psi_{\min} &= \omega_{\text{med}}^2 \left(1 - \delta + \frac{\delta^2}{4} \right) \approx \omega_{\text{med}}^2 (1 - \delta), \end{aligned}$$

de donde

$$\tan \psi_{\max} = \frac{\mu_J}{2\mu_T} \omega_{\text{med}}^2 \left(1 + \delta + \frac{\delta^2}{4} \right) \approx \frac{\mu_J}{2\mu_T} \omega_{\text{med}}^2 (1 + \delta),$$

$$\tan \psi_{\min} = \frac{\mu_J}{2\mu_r} \omega_{\text{med}}^2 \left(1 - \delta + \frac{\delta^2}{4} \right) \approx \frac{\mu_J}{2\mu_r} \omega_{\text{med}}^2 (1 - \delta).$$

Supongamos dado el diagrama $T = T(J_{red})$ para el movimiento estacionario de cierta máquina (fig. 7.4), supongamos también que el coeficiente de irregularidad es igual a δ para los valores dados de la energía cinética y del momento de inercia reducido. Las tangentes al gráfico $T = T(J_{red})$ bajo los ángulos $\psi_{\max}$ y $\psi_{\min}$ se intersectan en el origen de coordenadas O .



Supongamos el coeficiente δ debe cambiar de magnitud a δ' , entonces calculamos por las fórmulas (7.16) los valores correspondientes de los ángulos $\psi'_{\max}$ y $\psi'_{\min}$. Las tangentes a la curva $T = T(J_{red})$ deberán formar con el eje de las abscisas los ángulos $\psi'_{\max}$ y $\psi'_{\min}$ correspondientemente. Trazamos dichas tangentes a la curva $T = T(J_{red})$ (fig. 7.4) y encontramos su punto de intersección O' . El punto O' será un nuevo origen de coordenadas del diagrama $T = T(J_{red})$, es decir el cambio de coeficiente del valor δ al valor δ' , acarrea un cambio de los ejes de coordenadas de TOJ_{red} a los ejes paralelos TOJ'_{red} . Al realizar este cambio la energía cinética aumenta en una magnitud T_0 y el momento de inercia reducido en una magnitud J_0 . Los segmentos a y b medidas en unidades de longitud (o en unidades de CAD), representan en las escalas escogidas μ_l y μ_r , las magnitudes del momento de inercia J_0 y la energía cinética T_0 adicionales necesarias para que el mecanismo se mueva con el coeficiente de irregularidad escogido δ' .

$$J_0 = \mu_I a \quad \text{y} \quad T_0 = \mu_T b.$$

7

Así, el aumento de regularidad en el movimiento del eslabón inicial de un mecanismo puede ser logrado *aumentando el momento de inercia reducido del mismo*. En la práctica dicho aumento se logra instalando en uno de los árboles del mecanismo cierta pieza con el momento de inercia necesario. Esta pieza se denomina *volante*.

La forma de la volante, hablando en términos generales, puede ser arbitraria; pero partiendo de conceptos constructivos y tecnológicos la forma más idónea es la de un disco con una pesada llanta, con radios o de manera general una forma simétrica con respecto a los ejes de inercia. Esta es la manera más fácil de evitar cargas inerciales adicionales sobre el rodamiento de montaje de la volante.

7.4. DATOS PRINCIPALES NECESARIOS PARA LA DETERMINACIÓN DEL MOMENTO DE INERCIA DE LA VOLANTE.

Para la determinación del momento de inercia de la volante es necesario tener dadas las fuerzas reducidas o los momentos reducidos de las fuerzas motrices y de las fuerzas de resistencia para un ciclo completo del movimiento estacionario. Miremos el caso cuando dichas magnitudes dependen del ángulo de giro del eslabón inicial.

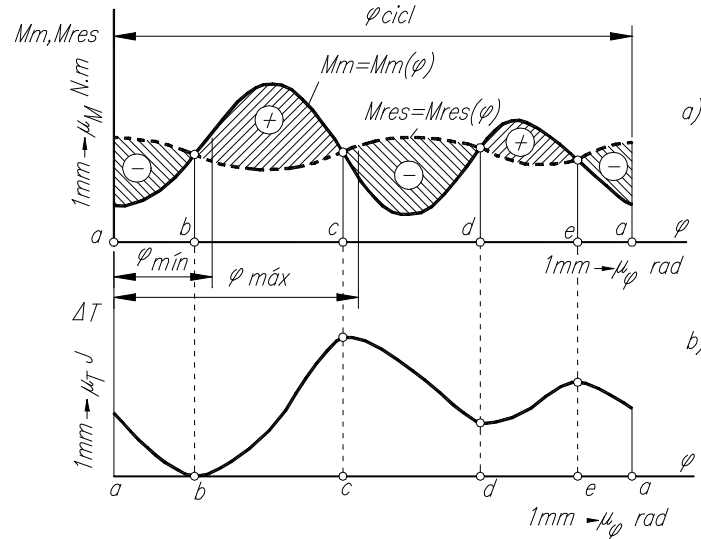


Fig. 7.5

En la fig. 7.5 se dan los gráficos $M_m = M_m(\varphi)$ y $M_{res} = M_{res}(\varphi)$ correspondientes a un ciclo completo del movimiento estacionario de cierto mecanismo. Ya que el momento de inercia de la volante se desconoce y es lo que se pretende calcular, no podemos construir el diagrama de Wittenbauer $T = T(J_{red})$. Si no tenemos datos sobre la variación de los momentos M_m y M_{res} para el tiempo de arranque del mecanismo o la máquina y desconocemos la magnitud total del momento de inercia reducido J_{red} de los eslabones del mecanismo, no podemos determinar la energía cinética de arranque T_{arr} (fig. 7.6) que posee el mecanismo en el momento de iniciar su movimiento estacionario. De otro lado, el cambio de energía cinética ΔT dentro de un ciclo completo del movimiento estacionario puede ser siempre determinado a partir de los diagramas $M_m = M_m(\varphi)$ y $M_{res} = M_{res}(\varphi)$ fig. 7.5a.

La construcción del diagrama $\Delta T = \Delta T(\varphi)$ (fig. 7.5b) la realizaremos midiendo las áreas incluidas dentro de las curvas $M_m = M_m(\varphi)$ y $M_{res} = M_{res}(\varphi)$, de manera análoga como se hizo en el punto 6.3 (en la fig. 7.5a estas áreas están achuradas). Por comodidad empezaremos la construcción de $\Delta T = \Delta T(\varphi)$ desde la posición b. En el intervalo bc la energía cinética va en aumento, en el intervalo cd va en disminución, etc. La suma de todas las áreas con signo “más” debe igualarse a la suma de todas las áreas con signo “menos”, ya que para un ciclo completo de movimiento estacionario el incremento de energía cinética es igual a cero. De esta manera la energía cinética total T_i en una posición i cualquiera del eslabón de reducción será igual a (fig. 7.6).

$$T_i = T_{arr} + \Delta T_i. \quad (7.17)$$

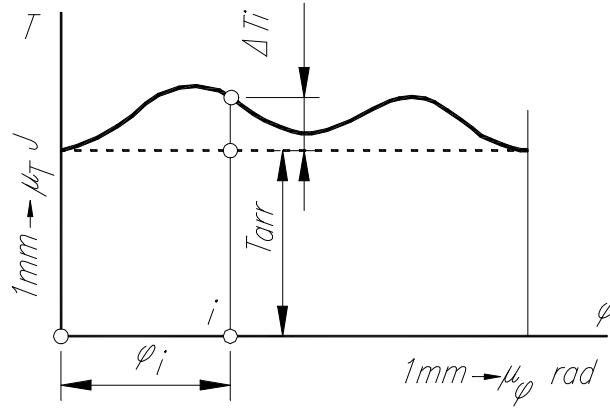


Fig. 7.6

Recuérdese que el primer miembro de la expresión (7.17) es desconocido, pero el segundo puede ser construido a partir de los diagramas dados de $M_m = M_m(\varphi)$ y $M_{res} = M_{res}(\varphi)$.

La magnitud del momento de inercia reducido J_{red} del mecanismo o la máquina agrupa tres componentes: momento de inercia de la volante J_{vol} , momento de inercia del eslabón de reducción J_0 y el momento de inercia de los eslabones J_{esl} . De esta manera el momento de inercia reducido total $J_{red.i}$ para una posición i (fig. 7.7) es igual a

$$J_{red.i} = J_{vol} + J_0 + J_{esl.i}, \quad (7.18)$$

Las primeras dos componentes son siempre constantes pero la última, en el caso general, depende del ángulo de giro $J_{esl} = J_{esl}(\varphi)$. El momento de inercia de la volante J_{vol} es lo que se pretende determinar.

La magnitud $\Delta J_{esl.i} = J_0 + J_{esl}$ puede ser determinada por el método descrito en el punto 5.5 para todo un ciclo de movimiento estacionario. El diagrama de $\Delta J_{red} = \Delta J_{red}(\varphi)$ se muestra en la fig. 7.8. El diagrama de $J_{red} = J_{red}(\varphi)$ de acuerdo a la ecuación (7.18) se muestra en la fig. 7.7.

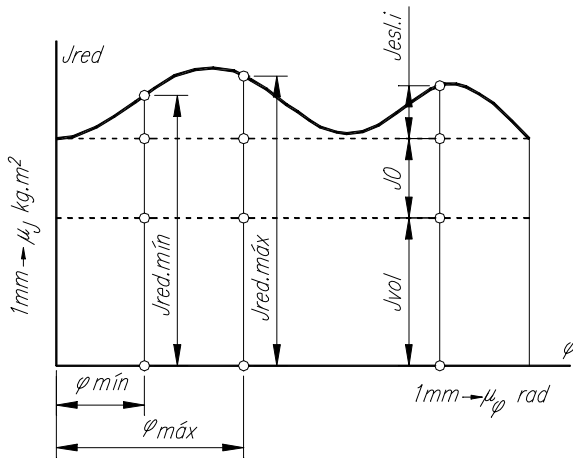


Fig. 7.7

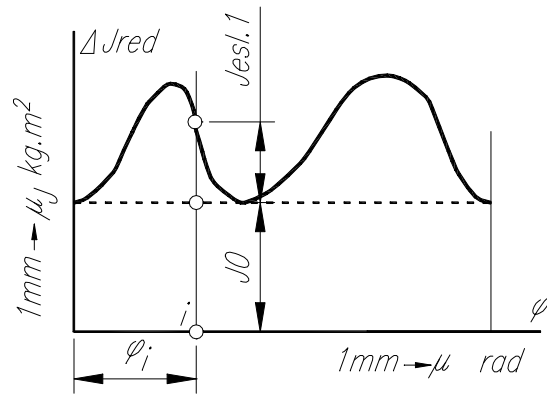


Fig. 7.8

Para la determinación del momento de inercia de la volante J_{vol} , es necesario tener la velocidad media dada ω_{med} del eslabón de reducción. Este se toma igual a la velocidad angular lineal que aparece en la placa del motor, de la máquina o mecanismo de trabajo:

$$\omega_{med} = \frac{\pi n}{30},$$

donde n es la rapidez de giro del eslabón de reducción en r.p.m.

Luego, para la elección de la volante es necesario escoger un valor para el coeficiente de irregularidad idóneo para la máquina (fórmula 7.10). Teniendo una velocidad angular ω_{med} y un coeficiente de irregularidad δ dados, se puede determinar con las fórmulas (7.14) las velocidades angulares máxima y mínima $\omega_{\text{máx}}$ y $\omega_{\text{mín}}$. Tenemos

$$\omega_{\text{máx}} = \omega_{\text{med}} \left(1 + \frac{\delta}{2} \right) \quad \text{y} \quad \omega_{\text{mín}} = \omega_{\text{med}} \left(1 - \frac{\delta}{2} \right), \quad (7.19)$$

y, luego

$$\begin{aligned} \omega_{\text{máx}}^2 &= \omega_{\text{med}}^2 \left(1 + \delta + \frac{\delta^2}{4} \right) \approx \omega_{\text{med}}^2 (1 + \delta) \\ \omega_{\text{mín}}^2 &= \omega_{\text{med}}^2 \left(1 - \delta + \frac{\delta^2}{4} \right) \approx \omega_{\text{med}}^2 (1 - \delta) \end{aligned} \quad (7.20)$$

La correlación entre la energía cinética T , el momento de inercia reducido J_{red} las velocidades angulares máxima y mínima $\omega_{\text{máx}}$ y $\omega_{\text{mín}}$ puede ser obtenida a partir de la ecuación de movimiento del mecanismo (ver fórmula (6.3))

$$A_{Mm} - A_{Mres} = \frac{J_{\text{redmax}} \omega_{\text{máx}}^2}{2} - \frac{J_{\text{redmin}} \omega_{\text{mín}}^2}{2}, \quad (7.21)$$

en la ecuación (7.21) el trabajo A_{Mm} es igual a

$$A_{Mm} = \int_{\varphi_{\text{mín}}}^{\varphi_{\text{máx}}} M_m d\varphi,$$

y el trabajo A_{Mres} es igual a

$$A_{Mres} = \int_{\varphi_{\text{mín}}}^{\varphi_{\text{máx}}} M_{res} d\varphi,$$

donde $\varphi_{\text{máx}}$ y $\varphi_{\text{mín}}$ son los ángulos correspondientes a la velocidad angular máxima $\omega_{\text{máx}}$ y a la velocidad angular mínima $\omega_{\text{mín}}$ del eslabón de reducción. Si estos ángulos se conocen, entonces la determinación de la diferencia de trabajos $A = A_{Mm} - A_{Mres}$ se reduce a la determinación de la correspondiente área S (mm^2 ó UnCAD^2), confinada entre las curvas $M_m = M_m(\varphi)$ y $M_{res} = M_{res}(\varphi)$ (fig. 7.5a) y limitada por las ordenadas correspondientes a los ángulos $\varphi_{\text{máx}}$ y $\varphi_{\text{mín}}$. Entonces la diferencia de trabajos puede ser expresada así:

$$A = \mu_M \mu_\varphi S.$$

En la ecuación (7.21) J_{redmax} y J_{redmin} son los momentos de inercia reducidos correspondientes a los ángulos $\varphi_{\text{máx}}$ y $\varphi_{\text{mín}}$ (fig. 7.7)

Es necesario anotar que en el caso general los valores de los momentos de inercia J_{redmax} y J_{redmin} no coinciden con los valores absolutos máximo y mínimo de J_{red} .

Sustituimos en la ecuación (7.21) los valores de J_{redmax} y J_{redmin} de acuerdo a la ecuación (7.18) y los valores de $\omega_{\text{máx}}$ y $\omega_{\text{mín}}$ de acuerdo a (7.20):

$$A = \frac{[J_{vol} + J_0 + J_{esl.max}]\omega_{med}^2(1+\delta)}{2} - \frac{[J_{vol} + J_0 + J_{esl.min}]\omega_{med}^2(1-\delta)}{2}. \quad (7.22)$$

Resolviendo la ecuación (7.22) con respecto a J_{vol} obtenemos :

$$J_{vol} = \frac{A}{\omega_{med}^2 \delta} - J_0 - \frac{J_{esl.max}(1+\delta) - J_{esl.min}(1-\delta)}{2\delta}, \quad (7.23)$$

De la ecuación (7.23) se deduce que si se conocen ángulos φ_{max} y φ_{min} para los cuales el eslabón de reducción alcanza los valores $\omega_{máx}$ y $\omega_{mín}$ de velocidad angular, la determinación del momento de inercia de la volante J_{vol} no ofrece ninguna dificultad, ya que las magnitudes A , J_0 , $J_{esl.max}$ y $J_{esl.min}$ pueden ser siempre determinadas, y las magnitudes de ω_{med} y δ son dadas para las condiciones del problema. Más adelante se mostrará cómo determinar los ángulos φ_{max} y φ_{min} .

Si el momento de inercia reducido de los eslabones J_{esl} es constante, la ecuación (7.23) toma la siguiente forma

$$J_{vol} = \frac{A}{\omega_{med}^2 \delta} - (J_0 + J_{esl}). \quad (7.24)$$

Para ciertos cálculos prácticos, cuando la magnitud $(J_0 + J_{esl})$ es muy pequeña con relación al primer miembro de la ecuación (7.24), para la determinación del momento de inercia de la volante se usa la siguiente fórmula aproximada

$$J_{vol} \approx \frac{A}{\omega_{med}^2 \delta}. \quad (7.25)$$

Si usamos las fórmulas (7.24) y (7.25), entonces la determinación de los ángulos φ_{max} y φ_{min} no representa ninguna dificultad. En realidad si el momento de inercia J_{esl} es constante la velocidad angular máxima $\omega_{máx}$ coincide con el máximo valor $T_{máx}$ de la energía cinética e igual para los valores mínimos. Por ejemplo en la fig. 7.5 la velocidades angular mínima corresponde a la posición b , y la velocidad angular máxima a la posición c , ya que en estas posiciones la energía cinética alcanza sus valores mínimo y máximo. Por esto en la fórmula (7.25) la magnitud A que debe ser sustituida es igual a

$$A = \int_{\varphi b}^{\varphi c} M_m d\varphi - \int_{\varphi b}^{\varphi c} M_{res} d\varphi = \mu_M \mu_\varphi S_{bc},$$

donde S_{bc} es el área entre las gráficas $M_m = M_m(\varphi)$ y $M_{res} = M_{res}(\varphi)$ (fig. 7.5a) en el intervalo bc .

Si el momento de inercia $J_{esl} = J_{esl}(\varphi)$ es no constante entonces para la determinación del momento de inercia de la volante se debe utilizar la fórmula (7.23). En este caso los valores máximos y mínimos de la velocidad angular no coinciden con los valores máximos y mínimos de la energía cinética sino que están desplazados con respecto a estas posiciones como se muestra de manera esquemática en la fig. 7.5. En este caso el cálculo del momento de inercia puede realizarse con ayuda del diagrama de Wittenbauer.

7.5. DETERMINACIÓN DEL MOMENTO DE INERCIA DE LA VOLANTE POR MEDIO DEL DIAGRAMA $T = T(J_{red})$.

Para la determinación del momento de inercia de la volante con ayuda de la ecuación de la energía cinética deben estar dados el coeficiente de irregularidad δ del mecanismo y su velocidad angular media ω_{med} . También deben estar dados los diagramas de los momentos reducidos de las fuerzas motrices y de las fuerzas de resistencia en función del ángulo de giro del eslabón reducido. Es necesario subrayar que para el cálculo de

la volante con ayuda del diagrama $T = T(J_{red})$ las fuerzas de inercia no deben entrar en los diagramas de las fuerzas motrices ni de las fuerzas de resistencia. Los diagramas de los momentos de las fuerzas motrices y las fuerzas de resistencia se presentan sólo para el tiempo de movimiento estacionario.

Como se mostró antes la determinación de las diferencias de áreas confinadas entre estas dos curvas permite determinar solamente la variación de la energía cinética $\Delta T = \Delta T(\varphi)$ y no del valor absoluto de ésta. De otra parte como se desconoce el valor del momento de inercia de la volante, solamente podemos determinar la variación del momento de inercia reducido de los eslabones del mecanismo ΔJ_{red} (ver fórmula (7.18)). Esta magnitud variable de ΔJ_{red} se determina con los valores dados de las masas y momentos de inercia de los eslabones con ayuda de los planos de velocidades del mecanismo (ver punto 5.5).

Para construir el diagrama $\Delta T = \Delta T(\Delta J_{red})$ para un ciclo completo de movimiento estacionario del mecanismo (fig. 7.9) consignamos los valores obtenidos de la variación de la energía cinética ΔT sobre el eje de ordenadas a partir del origen O , el valor de la variación del momento de inercia reducido ΔJ_{red} se consigna a partir del mismo punto O sobre el eje de las ordenadas. Uniendo con una curva suave los puntos a, b, c , etc. obtenemos el diagrama $\Delta T = \Delta T(\Delta J_{red})$ para un ciclo completo de movimiento estacionario.

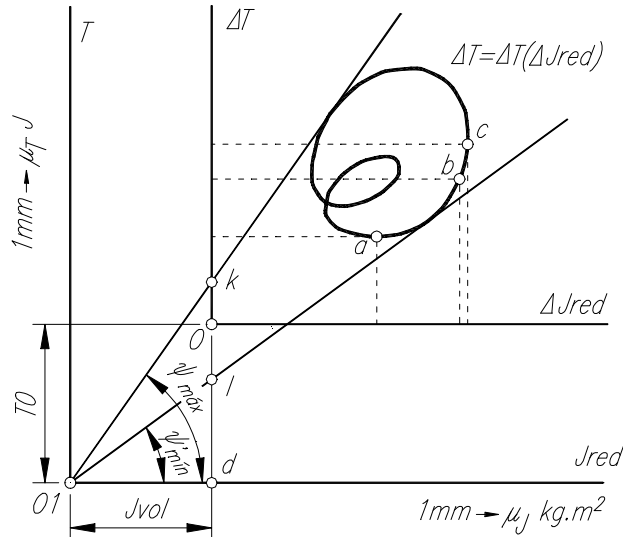


Fig. 7.9

Para la determinación de J_{vol} momento de inercia reducido de la volante utilizaremos las fórmulas (7.16). Tenemos

$$\tan \psi_{\max} = \frac{\mu_J}{2\mu_T} \omega_{\text{med}}^2 \left(1 + \delta + \frac{\delta^2}{4} \right) \approx \frac{\mu_J}{2\mu_T} \omega_{\text{med}}^2 (1 + \delta), \quad (7.26)$$

$$\tan \psi_{\min} = \frac{\mu_J}{2\mu_T} \omega_{\text{med}}^2 \left(1 - \delta + \frac{\delta^2}{4} \right) \approx \frac{\mu_J}{2\mu_T} \omega_{\text{med}}^2 (1 - \delta). \quad (7.27)$$

Sustituyendo los valores dados para ω_{med} y δ en las fórmulas (7.26) y (7.27) y determinamos los ángulos $\psi_{\max}$ y $\psi_{\min}$. Trazamos luego una tangente a la curva $\Delta T = \Delta T(\Delta J_{red})$ bajo el ángulo $\psi_{\max}$ y luego otra bajo el ángulo $\psi_{\min}$ y determinamos el sitio de intersección O_1 de estas tangentes (fig. 7.9). El punto O_1 representa el origen de coordenadas del diagrama de la energía cinética total del mecanismo en función del momento de inercia reducido total $T = T(J_{red})$. El momento de inercia reducido de la volante será entonces igual a

$$J_{vol} = \mu_J (O_1 d)$$

Si la volante se instala sobre el árbol del eslabón reducción, su momento de inercia puede ser reducido en la magnitud del momento de inercia del eslabón de reducción con respecto al mismo eje.

Ya que la volante se ejecuta por lo general en forma de disco con una pesada llanta, unido con la manzana por medio de radios, los momentos de inercia de estas partes de unión por lo general se desprecian y de manera aproximada se considera que la masa de la volante se distribuye de manera uniforme en un radio R el cual es el lugar geométrico de los centroides de las secciones transversales de la llanta. En este caso el momento de inercia de la volante puede ser expresado así

$$J_{vol} = mR^2 = m \frac{D^2}{4}, \quad (7.28)$$

donde D es el diámetro de la circunferencia de los centroides de las secciones de la llanta y m es la masa de la volante

$$mD^2 = 4J_{vol} = 4\mu_J(O_1d)$$

el producto de la masa de la llanta de la volante por el cuadrado del diámetro se denomina *momento de volante* o *característica de la volante*. La característica de la volante tiene como unidades $[\text{kg}\cdot\text{m}^2]$. Con esta característica se puede determinar la masa de la volante si su diámetro está dado, magnitud que en la mayoría de los casos está dictada por razones constructivas.

Si la volante no se instala sobre el árbol del eslabón de reducción sino sobre un eslabón giratorio cualquiera i de la máquina, entonces se debe garantizar la condición de igualdad de las energías cinéticas.

$$\frac{J_{vol}\omega^2}{2} = \frac{J_{vol,i}\omega_i^2}{2}, \quad (7.29)$$

donde $J_{vol,i}$ es el momento de inercia de la volante instalada en el eslabón i , y ω_i es la magnitud de la velocidad angular de dicho eslabón. De la igualdad (7.29) se deduce :

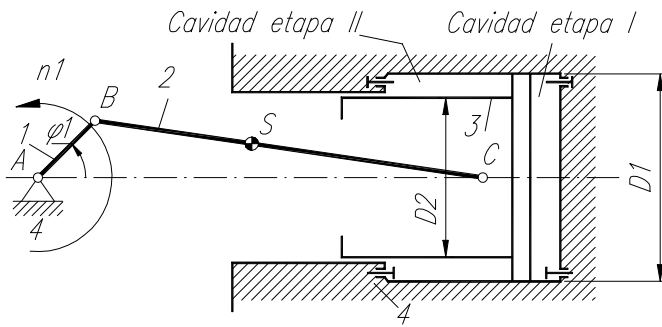
$$J_{vol,i} = J_{vol} \left(\frac{\omega}{\omega_i} \right)^2. \quad (7.30)$$

Esto significa que mientras más elevada sea la velocidad angular del eslabón i más pequeña podrá ser la masa de la volante instalada. De aquí también se deduce que es necesario que la relación de transmisión ω/ω_i debe ser constante, lo que significa que las volantes pueden ser sólo instaladas en los eslabones unidos con el eslabón de reducción por una relación de transmisión constante (transmisiones dentadas, por ejemplo). En estos casos se debe poner atención a la rigidez torcional de la cadena cinemática intermedia, ya que si ésta posee una rigidez baja las oscilaciones elásticas pueden llegar a ser tan altas que evitarían que la volante ejecutara su papel.

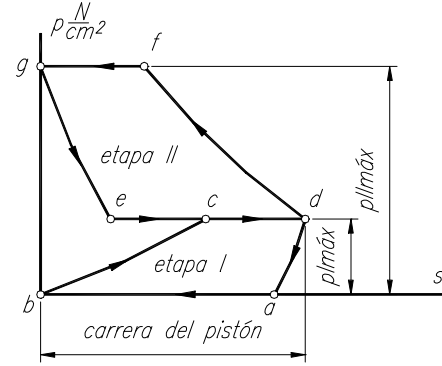
Ejemplo. Para el mecanismo de manivela deslizador de un compresor de dos etapas (fig.7.10a) determinar la magnitud del momento de inercia de la volante que se debe instalar sobre el árbol A de la manivela AB , para que el coeficiente de irregularidad de movimiento de la manivela sea $\delta = 0,0125$.

Datos : $l_{AB} = 0,05 \text{ m}$; $l_{BC} = 0,25 \text{ m}$; coordenada del centro de masas S de la biela $l_{BS} = 0,10 \text{ m}$; diámetro del cilindro $D_1 = 0,13 \text{ m}$; diámetro del vástago $D_2 = 0,11 \text{ m}$; masa de la biela $m_2 = 1,8 \text{ kg}$; masa del pistón $m_3 = 2,2 \text{ kg}$; momento de inercia de la biela con respecto al eje que pasa por su centro de masas S igual $J_2 = 0,025 \text{ kgm}^2$, momento de inercia de la manivela junto con las masas reducidas a ésta de los eslabones del reductor y del motor eléctrico $J_0 = 0,07 \text{ kgm}^2$. La presión de el gas sobre el pistón está dada en forma de diagrama de

indicador (fig. 7.10b); la máxima presión sobre el pistón en la primera etapa es $p_{I\text{máx}} = 2,25 \cdot 10^5 \text{ Pa}$; la máxima presión sobre el pistón en la segunda etapa es $p_{II\text{máx}} = 6,75 \cdot 10^5 \text{ Pa}$; El momento reducido al eslabón AB de las fuerzas motrices es constante en todo el ciclo del movimiento estacionario del compresor, dicho ciclo corresponde a una revolución del eslabón AB . La velocidad angular media del eslabón AB es $n_1 = 800 \text{ r.p.m.}$



7.10a



7.10b

Solución :

1) Construimos el plano de posiciones del mecanismo del compresor correspondiente a ocho posiciones de la manivela AB (fig. 7.11a) en escala $\mu_l = 1 \text{ m/UnCAD}$.

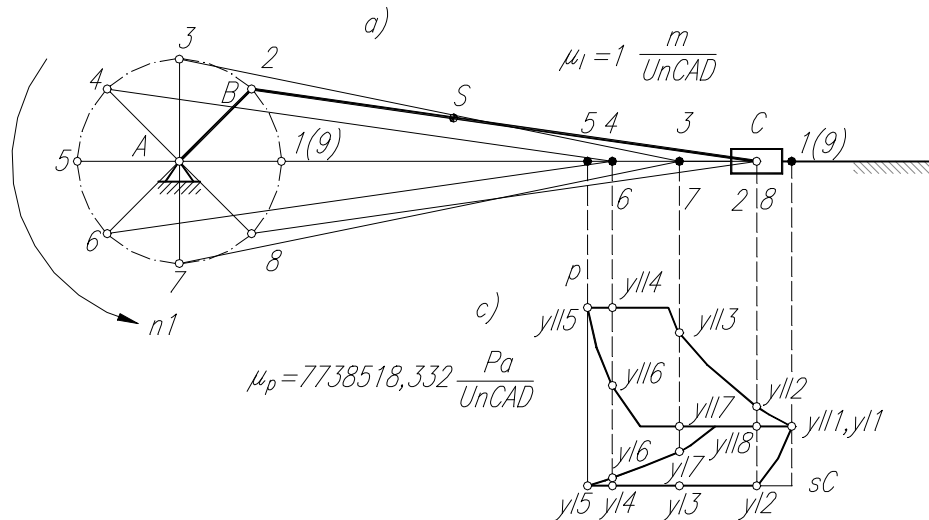


Fig. 7.11 a, b

2) Construimos ocho planos de análogos de velocidades, correspondientes a las ocho posiciones del mecanismo (fig. 7.11b) $\mu_v = 1 \text{ m/UnCAD}$, según el siguiente sistema de ecuaciones vectoriales.

$$\begin{cases} \vec{v}_C = \vec{v}_B + \vec{v}_{CB} \\ \vec{v}_C = \vec{v}_{C4} + \vec{v}_{CC4} \end{cases}$$

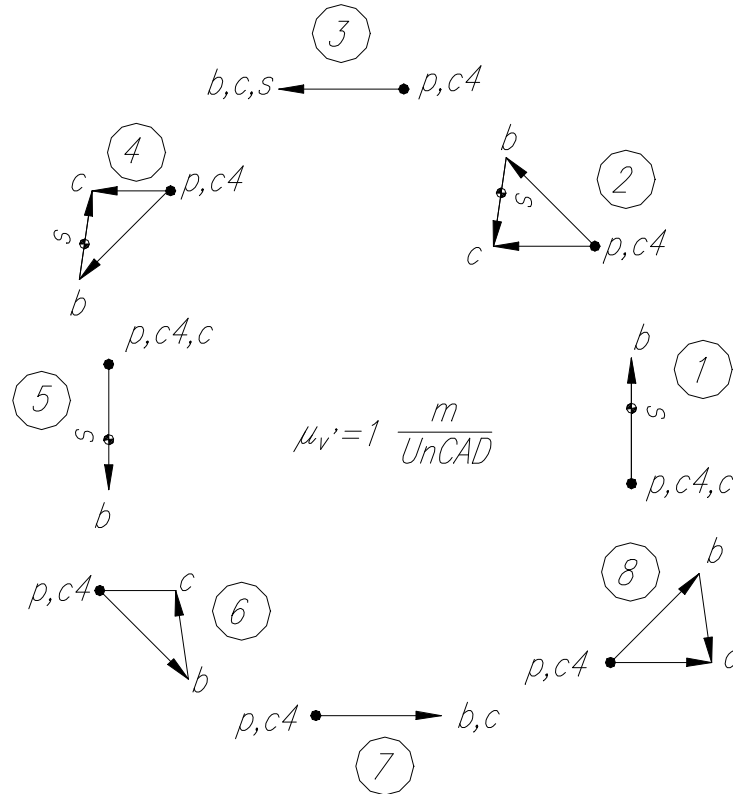


Fig. 7.11b

3) Construimos el diagrama de indicador (Fig. 7.11c) y señalamos los puntos correspondientes a cada posición del punto C (pistón) para cada un de las ocho posiciones del mecanismo. Encontramos las ordenadas y_I e y_{II} del diagrama, las cuales expresan la presión del gas sobre el pistón en las cavidades primera y segunda para cada posición del mecanismo.

4) Calculamos la fuerza resultante F_3 aplicada al pistón ; esta fuerza es igual a

$$\vec{F}_3 = \vec{F}_I + \vec{F}_{II}$$

donde $\vec{F}_I$ es la fuerza aplicada a la parte derecha del pistón y

$\vec{F}_{II}$ es la fuerza aplicada a la parte izquierda del pistón.

Estas fuerzas se calculan según las fórmulas

$$F_I = \mu_p \cdot \frac{\pi}{4} \cdot D_1^2, \quad F_{II} = \mu_p \cdot \frac{\pi}{4} \cdot (D_1^2 - D_2^2)$$

donde μ_p es el coeficiente de escala de presiones en el diagrama de indicador

Los resultados los consignamos en la siguiente tabla

Tabla 1

Nº	y_I , UnCAD	p_I , Pa	F_I , N	y_{II} , UnCAD	p_{II} , Pa	F_{II} , N	$F_3 = F_I + F_{II}$, N
1	0,029075	224997,42	2986,43976	0,029075	224997,42	-848,219575	2138,22018
2	0	0	0	0,038767	299999,14	-1130,96916	-1130,96916
3	0	0	0	0,07495	580001,949	-2186,55399	-2186,55399
4	0	0	0	0,087226	675000	-2544,6879	-2544,6879

5	0	0	0	0,087226	675000	-2544,6879	-2544,6879
6	0,00388	30025,4511	-398,534351	0,049105	379999,943	1432,56482	1034,03047
7	0,01675	129620,182	-1720,4769	0,029075	224997,42	848,219575	-872,257326
8	0,029075	224997,42	-2986,43976	0,029075	224997,42	848,219575	-2138,22018

nota : A la magnitud de la fuerza F_3 le asignamos signo “menos” si su dirección es contraria a la velocidad $\vec{v}_C$ del pistón.

5) Reducimos las fuerzas al eslabón AB

a) El momento reducido de las fuerzas de resistencia lo calculamos por la siguiente fórmula

$$M_{red} = \sum_1^k F_i \frac{v_i \cos \alpha_i}{\omega} + \sum_1^k M_i \frac{\omega_i}{\omega} ;$$

es decir

$$M_{res} = F_3 \frac{v_C}{\omega_1} = F_3 \cdot l_{AB} \cdot \frac{(pc)}{pb}$$

donde M_{res} es el momento reducido de las fuerzas de resistencia cuyo signo coincide con el de la fuerza $\vec{F}_3$. Los resultados los consignamos en la tabla 2.

Tabla 2

Nº	F_3 , N	l_{AB} , m	(pc) UnCAD	(pb) UnCAD	$(pc)/(pb)$	M_{res} , N·m
1	2138.22018	0.05	0	0.05	0	0
2	-1130.96916	0.05	0.040406	0.05	0.80812	-45,7
3	-2186.55399	0.05	0.05	0.05	1	-109,3
4	-2544.6879	0.05	0.030305	0.05	0.6061	-77,1
5	-2544.6879	0.05	0	0.05	0	0
6	1034.03047	0.05	0.030305	0.05	0.6061	31,3
7	-872.257326	0.05	0.05	0.05	1	-43,6
8	-2138.22018	0.05	0.040406	0.05	0.80812	-86,4

En la fig. 7.11d está construido el gráfico del momento de las fuerzas de resistencia $M_{res} = M_{res}(\varphi)$. Los coeficientes de escala del gráfico son :

por el eje de las ordenadas $\mu_M = 2 \frac{N \cdot m}{\text{UnCAD}}$ y

por el eje de las abscisas $\mu_\varphi = \frac{2\pi}{80} = \frac{\pi}{40} \frac{\text{rad}}{\text{UnCAD}}$, ya que el segmento de las abscisas correspondiente al giro del eslabón AB en un ángulo $\varphi = 2\pi$ es igual a $x_{cicl} = 80$ UnCAD.

b) Calculamos la magnitud del momento constante de las fuerzas motrices M_m . Ya que el trabajo del momento reducido de las fuerzas motrices es igual al trabajo del momento reducido de las fuerzas de resistencia realizados en un ciclo de movimiento estacionario, y que el momento M_m es constante, la ordenada y_m en el gráfico de momentos la encontramos a partir de la condición :

$$y_m = \frac{A}{x_{cicl}} = \frac{1570,72}{80} = 19,634 \text{ UnCAD},$$

donde A es el área bajo la curva $M_{res} = M_{res}(\varphi)$ y x_{cicl} es la abscisa correspondiente a un giro $\varphi = 2\pi$. El gráfico $M_m = \text{const}$ se muestra en la fig. 7.11d como un segmento de recta horizontal.

6) Calculamos el momento de inercia reducido J_{esl} de los eslabones

$$J_{esl} = J_2 \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} \right)^2 + m_2 \left(\frac{v_S}{\omega_1} \right)^2 + m_3 \left(\frac{v_C}{\omega_1} \right)^2 = J_2 \frac{l_{AB}^2}{l_{BC}^2} \left(\frac{bc}{pb} \right)^2 + m_2 l_{AB}^2 \left(\frac{ps}{pb} \right)^2 + m_3 l_{AB}^2 \left(\frac{pc}{pb} \right)^2.$$

Los resultados de los cálculos se consignan en la tabla 3

Tabla 3

N°	bc (UnCAD)	pb (UnCAD)	ps (UnCAD)	pc (UnCAD)	(bc/pb) ²	(ps/pb) ²	(pc/pb) ²	Jesl kg.m ²
1	0,05	0,05	0,03	0	1	0,36	0	0,00262
2	0,035714	0,05	0,042976	0,040406	0,51019592	0,73877463	0,65305793	0,00743
3	0	0,05	0,05	0,05	0	1	1	0,01
4	0,035714	0,05	0,039512	0,030305	0,51019592	0,62447926	0,36735721	0,00534
5	0,05	0,05	0,03	0	1	0,36	0	0,00262
6	0,035714	0,05	0,042976	0,030305	0,51019592	0,73877463	0,36735721	0,00586
7	0	0,05	0,05	0,05	0	1	1	0,01
8	0,035714	0,05	0,039512	0,040406	0,51019592	0,62447926	0,65305793	0,00691

En la fig. 7.11e se muestra el gráfico construido y girado -90°, del momento de inercia reducido de los eslabones J_{esl} en función del ángulo de giro φ del eslabón AB. El coeficiente de escala de las ordenadas de este gráfico es $\mu_J = 0,0002 \text{ kgm}^2/\text{UnCAD}$.

7) Construimos el gráfico de la energía cinética $T = T(\varphi)$. Achuramos en el gráfico de momentos (fig. 7.11d) las áreas proporcionales a la suma de los trabajos del momento de las fuerzas motrices y del momento de las fuerzas de resistencia, encontramos las magnitudes de estas áreas y las consignamos en la tabla 4.

Tabla 4

N°	1	2	3	4	5	6
área UnCAD ²	291,49	-0,37	-191,70	-325,67	-48,59	48,42
N°	7	8	9	10	11	12
área UnCAD ²	325,91	178,89	-0,44	-240,83	-75,85	38,75

Es recomendable realizar una comprobación que consiste en que la suma algebraica de las áreas debe ser igual a cero. En nuestro caso la comprobación tiene éxito aceptable, ya que la suma es igual a 0,01 UnCAD². Con los datos de la tabla 4 construimos el gráfico $T = T(\varphi)$ (fig. 7.11f) su coeficiente de escala es igual

$$\mu_T = \mu_A \cdot \mu_M \cdot \mu_\varphi = 15 \cdot 2 \cdot \frac{\pi}{40} = 2,3562 \frac{\text{J}}{\text{UnCAD}}$$

donde μ_A es la escala de áreas escogida $\mu_A = 15 \frac{\text{UnCAD}^2}{\text{UnCAD}}$.

8) Construimos el diagrama de Wittenbauer $T = T(J_{esl})$ (fig. 7.11g).

9) Determinamos los ángulos de las tangentes al diagrama de Wittenbauer :

$$\tan \psi_{\max} = \frac{\mu_J}{\mu_T} \cdot \frac{\omega_{med}^2 (1 + \delta)}{2} = \frac{0,0002}{2,3562} \cdot \frac{83,7758^2 (1 + 0,0125)}{2} = 0,3016 \Rightarrow \psi_{\max} = 16^\circ 46' 59''$$

$$\tan \psi_{\min} = \frac{\mu_J}{\mu_T} \cdot \frac{\omega_{med}^2 (1 - \delta)}{2} = \frac{0,0002}{2,3562} \cdot \frac{83,7758^2 (1 - 0,0125)}{2} = 0,29414 \Rightarrow \psi_{\min} = 16^\circ 23' 28''$$

donde $\omega_{med} = \frac{\pi \cdot n_1}{30} = \frac{\pi \cdot 800}{30} = 83,7758 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$.

10) Trazamos las tangentes al diagrama $T = T(J_{esl})$ bajo los ángulos $\psi_{max} = 16^\circ 46' 59''$ y $\psi_{min} = 16^\circ 23' 28''$ y las extendemos hasta encontrar su intersección en el punto O_1 , luego medimos la distancia desde O_1 hasta d (eje de las ordenadas de $T = T(J_{esl})$). $O_1d = 4376,9 \text{ UnCAD}$.

11) Calculamos la magnitud del momento de inercia de la volante J_{vol} con ayuda de la fórmula :

$$J_{vol} = \mu_J \cdot (O_1d) - J_0 = 0,0002 \cdot 4376,9 - 0,07 = 0,8054 \text{ kgm}^2.$$

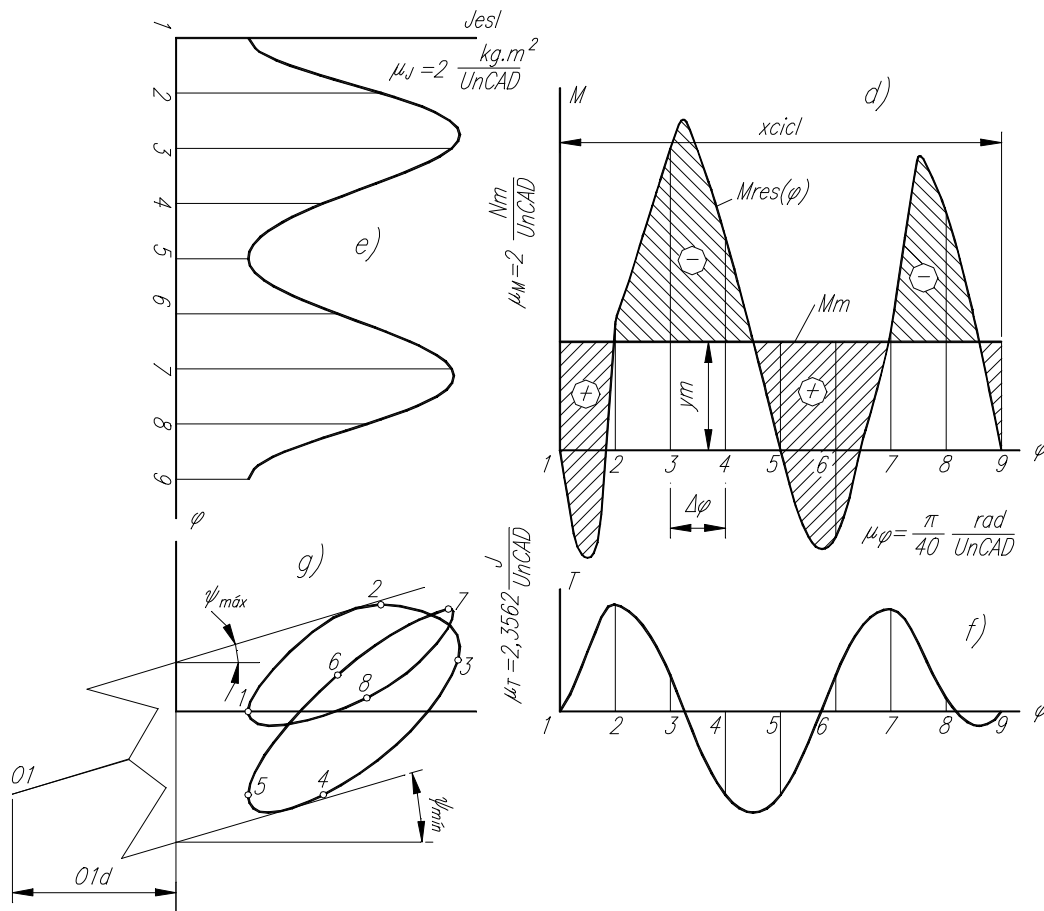


Fig. 7.11 d,e,f,g

BIBLIOGRAFÍA

Artobolevski I.I. Teoría de mecanismos y máquinas. Moscú, Nauka 1988,

Artobolevski I.I., Edelstein B.V. Problemas de Teoría de mecanismos y máquinas. Moscú, Nauka 1973.