

2. CÁLCULO CINETOSTÁTICO DE MECANISMOS PLANOS

2.1. DETERMINABILIDAD ESTÁTICA DE LAS CADENAS CINEMÁTICAS

Cuando resolvemos problemas de análisis de fuerzas en los mecanismos presuponemos conocida la ley de movimiento del eslabón de entrada; de la misma manera presuponemos conocidas las masas y los momentos de inercia de los eslabones del mecanismo. De esta manera siempre pueden ser determinadas las fuerzas de inercia necesarias para resolver el problema de análisis de fuerzas con ayuda de las ecuaciones de equilibrio estático.

Analicemos primero la pregunta sobre la determinación de las reacciones en los pares cinemáticos.

En los casos cuando no se toman en consideración las fuerzas de inercia dentro del conjunto de fuerzas dadas, el cálculo se denomina *estático*, cuando dichas fuerzas se toman en consideración el cálculo se denomina *cinetostático*. Ya que el método de cálculo para los dos casos es general, de ahora en adelante consideraremos que las fuerzas de inercia hacen parte de las condiciones iniciales del problema, y que son conocidas en magnitud, dirección y punto de aplicación (*en caso contrario dentro de las condiciones del problema deben estar las masas, momentos de inercia y los datos indispensables para la solución del problema cinemático del mecanismo*). Por el momento no tomaremos en consideración la influencia de las fuerzas de fricción en los pares.

Miremos cómo están dirigidas las reacciones en los distintos pares cinemáticos de los mecanismos planos. En un par giratorio de V clase la fuerza resultante de reacción $\vec{F}$ pasa por el centro de la articulación (fig.2.1). La magnitud y la dirección son desconocidas, ya que ellas dependen de la magnitud y la dirección de las fuerzas aplicadas a los eslabones del par.

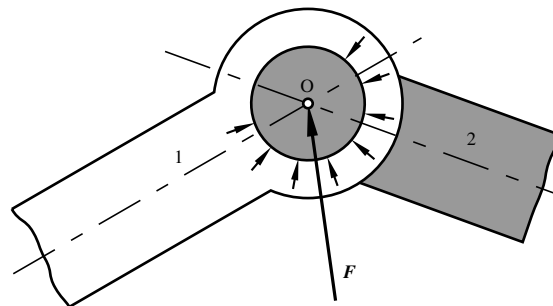


Fig. 2.1

En un par cinemático de deslizamiento de V clase (Fig. 2.2) la reacción es perpendicular al eje $x - x$ de desplazamiento del par. La reacción es de dirección conocida, pero su punto de aplicación y su magnitud son desconocidas.

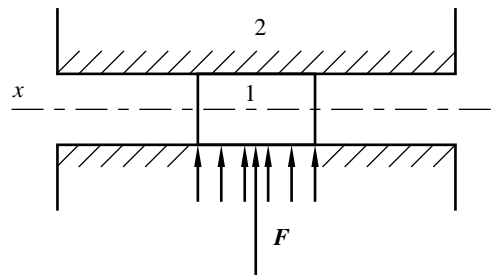


Fig. 2.2

Por último, en un par superior de IV clase (fig. 2.3) la reacción $\vec{F}$ está aplicada en el punto de contacto C de los eslabones 1 y 2 y está dirigida a lo largo de la normal común $n - n$, trazada con respecto a la tangente de los perfiles de los eslabones 1 y 2 en el punto C, es decir, en los pares superiores de IV clase se conocen la dirección y el punto de aplicación de la reacción.

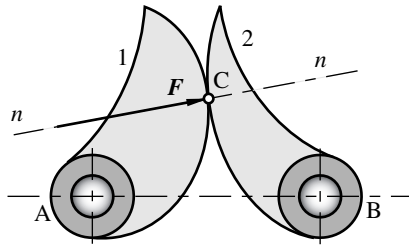


Fig. 2.3

Resumiendo, para determinar las reacciones en cada una de los pares de inferiores de V clase se necesita resolver de a dos incógnitas, y en los pares superiores de IV clase sólo una incógnita.

Designaremos el número de eslabones móviles de una cadena cinemática plano con la letra n , el número de pares de V clase con p_V y el número de pares de IV clase con p_{IV} .

Planteemos ahora la condición de equilibrio estático de las cadenas cinemáticas planas. Ya que para cada uno de los eslabones se pueden plantear tres ecuaciones de equilibrio, entonces el número de ecuaciones que podemos plantear para n eslabones es igual a $3n$. El número de incógnitas que se necesita determinar es de $2p_V$ (donde p_V es el número de pares de V clase en la cadena) y p_{IV} (donde p_{IV} es el número de pares de IV clase en la cadena).

En consecuencia la cadena cinemática será estáticamente determinada si se cumple la siguiente condición

$$3n = 2 p_V + p_{IV} . \quad (2.1)$$

Como se mostró en la lección N°3 cualquier mecanismo con pares de IV y V clases puede ser sustituido por un mecanismo que contenga sólo pares de V clase. Por esto nos podemos limitar a estudiar cadenas cuyos eslabones intervengan solamente en pares de V clase.

Entonces la fórmula (2.1) puede ser simplificada

$$3n = 2 p_V, \quad (2.2)$$

De donde

$$p_V = \frac{3}{2} n .$$

El número de eslabones y pares de una cadena cinemática estáticamente determinada están ligados entre sí por la relación (2.2). Ya que los números n y p_V deben ser enteros, entonces esta relación es cumplida por las siguientes combinaciones de número de eslabones y pares cinemáticos (tabla 1)

Tabla 1

No.	1	2	3	4	5	•
n	2	4	6	8	•	•
p_V	3	6	9	12	•	•

Como ya sabemos la primera combinación de eslabones y pares, es decir dos eslabones que hacen parte de tres pares, es lo que conocemos como grupo de II clase; la segunda combinación (cuatro eslabones que conforman seis pares) son los grupos de III clase con tres miembros de arrastre; y así sucesivamente.

Es decir: **LOS GRUPOS DE ASSUR SON CADENAS CINEMÁTICAS ESTÁTICAMENTE DETERMINADAS.**

Por esta razón lo más razonable es estudiar los métodos de determinación de las reacciones en los pares cinemáticos de acuerdo a la clase y orden de grupo que conforman el mecanismo.

Cuando se realiza el análisis cinemático de un mecanismo éste se realiza en el mismo orden de formación del mecanismo. Es decir, primero se examina el grupo que está unido al eslabón o eslabones primarios, después se examina el siguiente grupo y así sucesivamente. El orden de cálculo en el análisis de fuerza es *contrario*, es decir *el análisis de fuerzas se empieza con el último grupo agregado al mecanismo (contando desde el eslabón de entrada) y se termina con el cálculo del eslabón inicial*.

Supongamos, por ejemplo, se requiera realizar el análisis de fuerzas del mecanismo de seis barras mostrado en la fig. 2.4. El mecanismo está formado de la siguiente manera: El eslabón inicial está unido con el bastidor, a él y al bastidor se une el primer grupo de II clase compuesto por los eslabones 3 y 4. Luego al eslabón 3 y al bastidor se une el segundo grupo de II clase compuesto por los eslabones 5 y 6. El cálculo de fuerzas se debe realizar empezando con el último grupo en unirse al mecanismo (grupo 5,6), después de esto se pasa al grupo compuesto por los eslabones 3, 4 y por último se hallan las fuerzas en el eslabón primario 2.

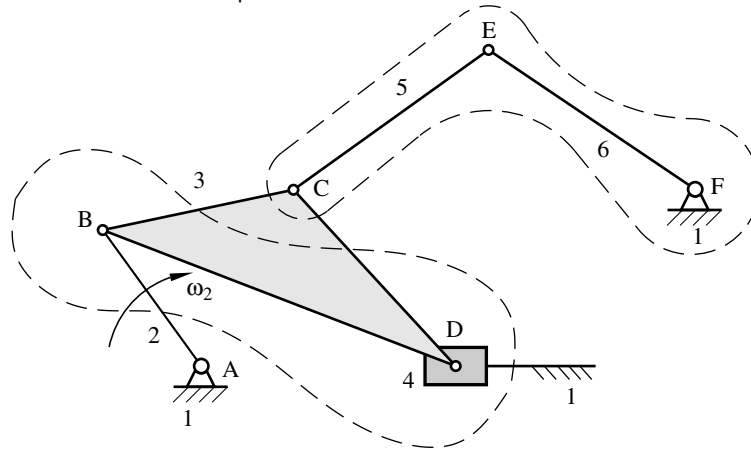


Fig. 2.4

2.2 DETERMINACIÓN DE LAS REACCIONES EN LOS PARES CINEMÁTICOS

2.2.1. DETERMINACIÓN DE LAS REACCIONES EN LOS PARES CINEMÁTICOS DE LOS GRUPOS DE II CLASE TIPO RRR

Estudiemos el problema de la determinación de las reacciones en los pares cinemáticos del grupo de II clase, *BCD* del tipo RRR mostrado en la fig. 2.5.

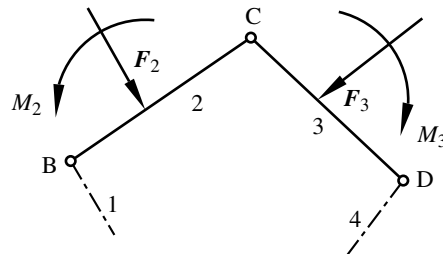


Fig. 2.5

Adaptaremos las siguientes convenciones: El eslabón al cual se une el eslabón *BC* lo llamaremos eslabón 1, *BC* se llamará eslabón 2, el eslabón *CD* se llamará eslabón 3, el eslabón al cual se une *CD* se llamará eslabón 4. La fuerza que actúa desde el eslabón *k* sobre el eslabón *l* la representaremos como $\vec{F}_{kl}$, el momento de la fuerza $\vec{F}_k$ con respecto al punto *A* lo representaremos como $M_A(\vec{F}_k)$, la distancia entre dos puntos cualesquiera *A* y *B* la representaremos como l_{AB} y por último el momento del par que actúa sobre el eslabón *k* se escribirá como M_k . Supongamos que el grupo de segunda clase (fig. 2.5) está cargado con las fuerzas $\vec{F}_2$ y $\vec{F}_3$ y pares con los momentos M_2 y M_3 . Se pide determinar las reacciones en los pares cinemáticos. Este problema puede ser resuelto por el método de los *planos de*

fuerza. En los puntos B y D aplicamos las reacciones (por el momento desconocidas) $\vec{F}_{12}$ y $\vec{F}_{43}$, y planteamos la ecuación de equilibrio del grupo BCD (fig. 2.6 a) igualando a cero la suma de todas las fuerzas. Tenemos

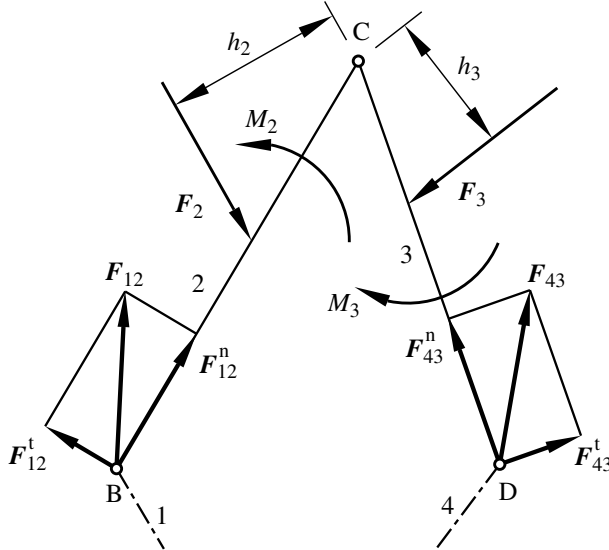


Fig. 2.6a

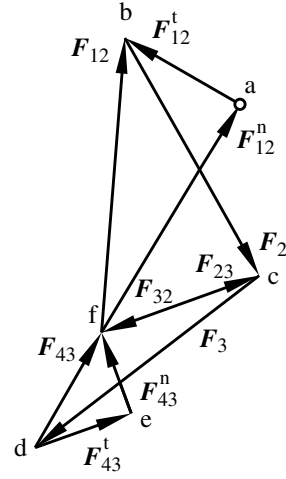


Fig. 2.6b

$$\vec{F}_{12} + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_{43} = 0 \quad (2.3)$$

En esta ecuación conocemos las fuerzas $\vec{F}_2$ y $\vec{F}_3$ en magnitud, dirección y punto de aplicación, en cuanto a las reacciones $\vec{F}_{12}$ y $\vec{F}_{43}$, de ellas sólo conocemos su punto de aplicación. Para determinar la magnitud de estas reacciones descomponemos cada una de ellas en dos componentes: una componente que actúe a lo largo del eje del eslabón ($\vec{F}_{kl}^n$) y otra que actúe perpendicular a dicho eje ($\vec{F}_{kl}^t$). De esta manera tenemos

$$\vec{F}_{12} = \vec{F}_{12}^n + \vec{F}_{12}^t, \quad \vec{F}_{43} = \vec{F}_{43}^n + \vec{F}_{43}^t \quad (2.4)$$

Las magnitudes de $\vec{F}_{12}^t$ y $\vec{F}_{43}^t$ pueden ser halladas a partir de las ecuaciones de equilibrio planteadas para cada uno de los eslabones 2 y 3 por separado. Para ello examinemos primero el equilibrio del eslabón 2. El eslabón 2 se encuentra bajo la acción de las siguientes fuerzas y pares: la fuerza $\vec{F}_2$, las componentes $\vec{F}_{12}^n$ y $\vec{F}_{12}^t$ de la reacción $\vec{F}_{12}$, la reacción $\vec{F}_{32}$ y el par con momento M_2 . Planteamos la ecuación de momentos de todas las fuerzas con respecto al punto C. Como no conocemos el signo de la fuerza $\vec{F}_{12}^t$, entonces para el planteamiento de la ecuación le asignamos al momento de esta fuerza un signo arbitrario. Si después de determinar la magnitud de esta fuerza resulta ser *negativa*, entonces su dirección real debe ser tomada *contraria*.

Tenemos

$$M_C(\vec{F}_2) + M_C(\vec{F}_{12}^t) + M_2 = 0$$

En esta ecuación los momentos de las fuerzas $\vec{F}_{12}^n$ y $\vec{F}_{32}$ no entran, ya que sus líneas de acción pasan a través del punto C, es decir

$$M_C(\vec{F}_{12}^n) = 0 \quad \text{y} \quad M_C(\vec{F}_{32}) = 0.$$

Luego, como

$$M_C(\vec{F}_{12}^t) = F_{12}^t \cdot l_{BC} \quad \text{y} \quad M_C(\vec{F}_2) = F_2 \cdot h_2 ,$$

La ecuación de momentos será

$$F_2 h_2 - F_{12}^t \cdot l_{BC} + M_2 = 0 ,$$

De donde podemos determinar la magnitud de la fuerza $\vec{F}_{12}^t$

$$F_{12}^t = \frac{F_2 h_2 + M_2}{l_{BC}} \quad (2.5)$$

De todas maneras el signo de la fuerza $\vec{F}_{12}^t$ está determinado por el signo del miembro derecho de la fórmula (2.5). De manera análoga partiendo de la condición de equilibrio del eslabón 3 obtenemos la ecuación de momentos

$$M_C(\vec{F}_3) + M_C(\vec{F}_{43}^t) + M_3 = 0 ,$$

Como

$$M_C(\vec{F}_{43}^n) = 0 \quad \text{y} \quad M_C(\vec{F}_{23}) = 0 .$$

Para la determinación de la magnitud de la fuerza $\vec{F}_{43}^t$ obtenemos

$$F_{43}^t = \frac{F_3 h_3 + M_3}{l_{DC}} \quad (2.6)$$

El signo de la fuerza $\vec{F}_{43}^t$ está determinado por el signo del miembro derecho de la fórmula (2.6). Las expresiones obtenidas para $\vec{F}_{12}^t$ y $\vec{F}_{43}^t$ se sustituyen en la ecuación (2.3):

$$\vec{F}_{12}^n + \vec{F}_{12}^t + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_{43}^n + \vec{F}_{43}^t = 0 .$$

En esta ecuación son desconocidas solamente las magnitudes de las componentes $\vec{F}_{12}^n$ y $\vec{F}_{43}^n$ de las reacciones $\vec{F}_{12}$ y $\vec{F}_{43}$, las cuales están dirigidas a lo largo de los ejes de los eslabones BC y DC . Las magnitudes de estas reacciones pueden ser halladas construyendo el plano de fuerzas. Para hacer esto a partir de un punto arbitrario a (fig. 2.6 b) trazamos un segmento que representa, en la escala escogida μ_F , la fuerza $\vec{F}_{12}^t$ (hallada por la fórmula (2.5), esta fuerza es perpendicular al eje del eslabón BC) y le agregamos los segmentos correspondientes a las fuerzas $\vec{F}_2$ y $\vec{F}_3$. Agregamos allí (punto d) la fuerza $\vec{F}_{43}^t$ (hallada por la fórmula (2.6), esta fuerza es perpendicular al eje del eslabón CD). Luego desde el punto a trazamos una recta paralela al eje BC y desde el punto e una recta paralela al eje CD . El punto f de intersección de estas dos rectas determina la magnitud de las componentes $\vec{F}_{12}^n$ y $\vec{F}_{43}^n$.

Las reacciones completas $\vec{F}_{12}$ y $\vec{F}_{43}$ pueden ser obtenidas como resultantes de acuerdo a las ecuaciones (2.4). La primera reacción se obtiene en el plano de fuerza si unimos el punto f y el punto b , y la segunda al unir el punto d con el punto f .

Para determinar la reacción $\vec{F}_{23}$ del eslabón 2 sobre el eslabón 3 planteamos la ecuación de equilibrio de fuerzas que actúan sobre el eslabón 3;

$$\vec{F}_{43} + \vec{F}_3 + \vec{F}_{23} = 0 .$$

La única fuerza desconocida en magnitud y dirección en esta ecuación es $\vec{F}_{23}$. Su magnitud puede ser hallada construyendo según la ecuación el triángulo de fuerzas. Para esto basta unir en el plano de fuerzas (fig. 2.6) los puntos f

y c. Desde luego la reacción $\vec{F}_{32}$ es igual en magnitud a $\vec{F}_{23}$, pero contraria en dirección, y puede ser determinada con ayuda de la ecuación de equilibrio del eslabón 2.

$$\vec{F}_{12} + \vec{F}_2 + \vec{F}_{32} = 0.$$

En el plano de fuerzas el vector $\vec{F}_{32}$ está representado por el mismo segmento (cf) que la reacción $\vec{F}_{23}$, pero posee dirección contraria.

2.2.2 CÁLCULO CINETOSTÁTICO DEL ESLABÓN PRIMARIO DE UN MECANISMO

Miremos ahora como puede ser determinada en general la reacción en el par cinemático que conforman el eslabón inicial y el bastidor. Este eslabón por lo común conforma con el bastidor un par giratorio de V clase o un deslizante de la misma clase. Estudiaremos los dos casos por separado. De la fórmula (2.1) se deduce que bajo la acción de fuerzas arbitrarias dentro de las que se cuentan las de inercia, el eslabón de entrada de manera general no está en equilibrio, ya que si el número de eslabones móviles es uno y el número de pares de V clase también es uno, el número de ecuaciones que se pueden plantear difiere del número de incógnitas a hallar

$$3n - 2p_v = 3 - 2 = 1.$$

Para que el equilibrio se establezca, es necesario introducir una fuerza o un par de fuerzas, que compensen todas las fuerzas aplicadas al eslabón inicial. Esta fuerza y momento se denominan *fuerza compensadora* y *momento compensador*. De esta manera se llama *momento compensador* al momento de las fuerzas que actúan sobre el eslabón primario y que garantiza la ley de movimiento dada. De manera análoga se define la *fuerza compensadora*.

Representaremos con $\vec{F}_{com}$ a la fuerza compensadora y con $\vec{M}_{com}$ al momento compensador. Analicemos cuáles son los momentos y las fuerzas compensadoras en las máquinas.

Supongamos se esté analizando el cálculo de fuerzas de un mecanismo de manivela deslizador de un motor de un cilindro, el cual acciona una máquina cualquiera. Si tomamos como eslabón inicial el eslabón 1 del motor (fig. 2.7), entonces el grupo de segunda clase que se le une, consta de la biela 2 y el pistón 3. Después del análisis de fuerzas de este grupo se determina la reacción de la biela 2 sobre la manivela 1 $\vec{F}_{21}$. Además el eslabón está bajo la acción de la fuerza $\vec{F}_1$ y el par de fuerza con momento $\vec{M}_1$, que son las resultantes de las cargas externas y de las fuerzas de inercia. Bajo la acción de estas fuerzas y la reacción $\vec{F}_{01}'$ del bastidor, la manivela no estará en equilibrio. Para lograr el equilibrio es necesario aplicar una fuerza compensadora $\vec{F}_{com}$ o un momento compensador $\vec{M}_{com}$. Esta fuerza o momento compensadores es la fuerza o momento reactivo de parte de la máquina que es accionada por medio del motor en cuestión.

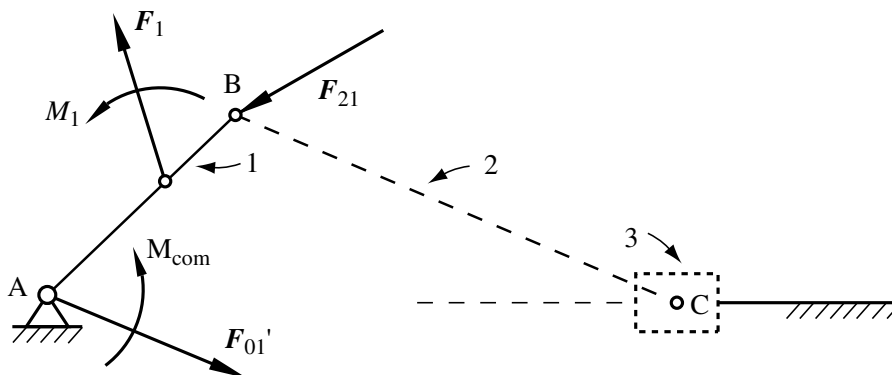


Fig. 2.7a

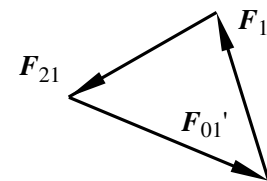


Fig. 2.7b

Si el cigüeñal del motor está unido al árbol principal de la máquina de trabajo por medio de un acople, entonces tendremos en calidad de momento compensador aplicado al árbol del motor el momento reactivo de las fuerzas de resistencia de la máquina de trabajo.

Si se tiene un momento compensador, entonces la magnitud del momento compensador M_{com} se determina a partir de la ecuación (2.7)

$$M_{com} = -[M_A(\vec{F}_1) + M_A(\vec{F}_{21}) + M_1]. \quad (2.7)$$

La reacción $\vec{F}_{01}'$ en el par cinemático A se determina a partir de la siguiente ecuación

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_{21} + \vec{F}_{01}' = 0. \quad (2.8)$$

El plano de fuerzas para la determinación de la reacción $\vec{F}_{01}'$ se muestra en la Fig. 2.7b.

Si el cigüeñal de la máquina está unido al árbol principal de la máquina de trabajo por medio de una transmisión dentada (por ejemplo), tendremos en calidad de fuerza compensadora aplicada a la rueda dentada que está sobre el árbol del motor, la fuerza reactiva de la máquina de trabajo Fig. 2.8.

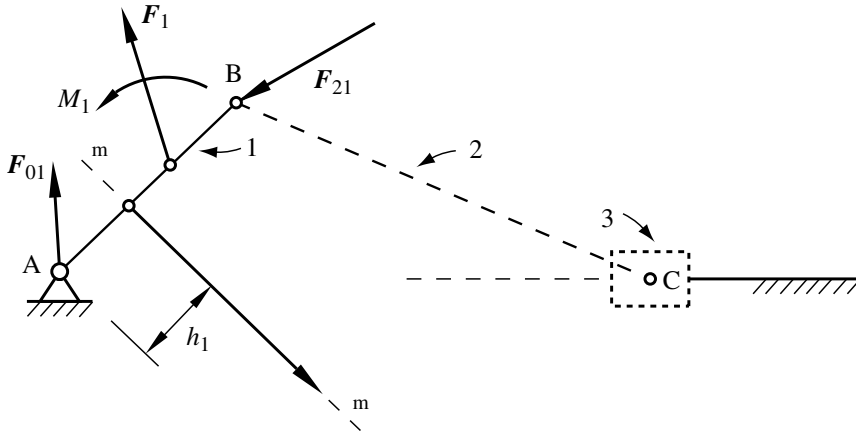


Fig. 2.8a

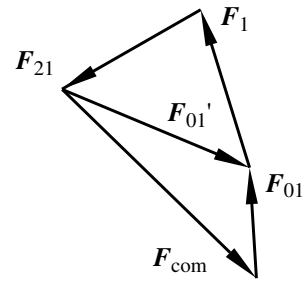


Fig. 2.8b

Evidentemente esta fuerza reactiva (si no se toma en cuenta la fricción en los perfiles conjugados de los dientes) está dirigida a largo de la normal de los perfiles de los dientes conjugados de la transmisión dentada. De manera que la línea de acción de la fuerza compensadora está determinada completamente por el mecanismo de transmisión de la máquina.

Supongamos que el eslabón primario 1 (fig. 2.7a) conforma con el bastidor un par giratorio A y que sobre este eslabón actúa la fuerza $\vec{F}_{21}$ la cual representa la reacción del eslabón 2 sobre el eslabón 1. La fuerza $\vec{F}_1$ y el par de fuerzas con momento M_1 están dados. Supongamos que la línea de acción de la fuerza compensadora $\vec{F}_{com}$ es la recta $m - m$.

Entonces la magnitud del momento $M_A(\vec{F}_{com})$ de la fuerza compensadora se puede hallar partiendo de la ecuación de momentos con respecto al punto A, de todas las fuerzas que actúan sobre el eslabón:

$$M_A(\vec{F}_{com}) + M_A(\vec{F}_1) + M_A(\vec{F}_{21}) + M_1 = 0 \quad (2.9)$$

De donde obtenemos la magnitud del momento $M_A(\vec{F}_{com})$

$$M_A(\vec{F}_{com}) = -[M_A(\vec{F}_1) + M_A(\vec{F}_{21}) + M_1] \quad (2.10)$$

El signo del momento se determina por las magnitudes y signos de los momentos $M_A(\vec{F}_1)$, $M_A(\vec{F}_{21})$ y M_1 . Si para la determinación de las fuerzas de inercia el movimiento del eslabón inicial fue tomado como regular entonces el momento $M_{com} = M_A(\vec{F}_{com})$ será el momento compensador. En el caso de que el eslabón primario no esté en movimiento regular (régimen establecido), es necesario tener en cuenta (agregar) el momento de las fuerzas de inercia.

La magnitud de la fuerza compensadora $\vec{F}_{com}$ se determina a partir de la condición

$$F_{com}h = M_A(\vec{F}_{com}),$$

Donde h es el brazo de la fuerza compensadora $\vec{F}_{com}$ (fig. 2.8a).

Entonces tenemos

$$\vec{F}_{com} = -\frac{[M_A(\vec{F}_1) + M_A(\vec{F}_{21}) + M_1]}{h}.$$

Ya que conocemos la magnitud y la dirección de la fuerza $\vec{F}_{com}$, entonces la reacción $\vec{F}_{01}$ en el par cinemático A, está determinada por la siguiente ecuación vectorial

$$\vec{F}_{com} + \vec{F}_{01} + \vec{F}_1 + \vec{F}_{21} = 0. \quad (2.11)$$

La solución gráfica de esta ecuación se muestra en la fig. 2.8b.

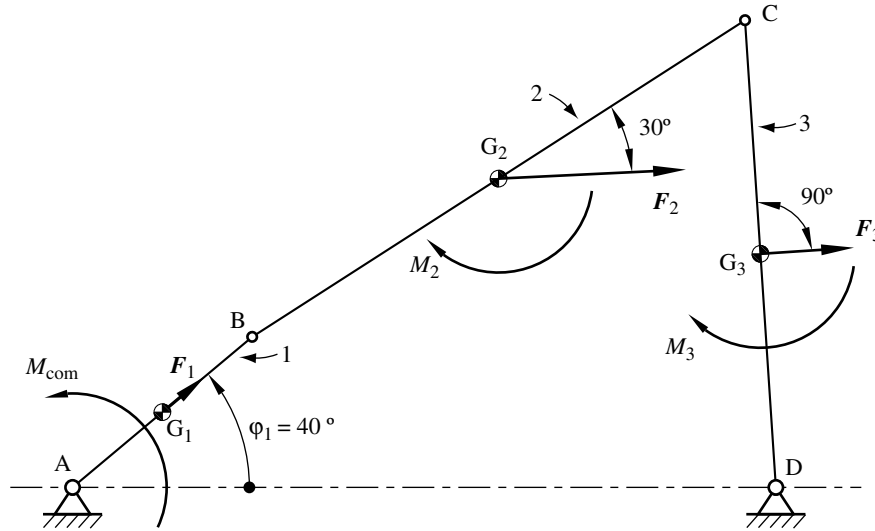


Fig. 2.7a

Ejemplo 2.1 Realizar el análisis de fuerzas del mecanismo de cuatro eslabones mostrado en la figura 2.8a, en la posición dada, cuando $\varphi_1 = 40^\circ$.

Datos: longitud de los eslabones $l_{AB} = 0,100$ m; $l_{BC} = 0,250$ m; $l_{CD} = 0,200$ m; $l_{AD} = 0,300$ m; $l_{AS1} = 0,050$ m;

$l_{BS2} = 0,125$ m; $l_{CS3} = 0,100$ m;

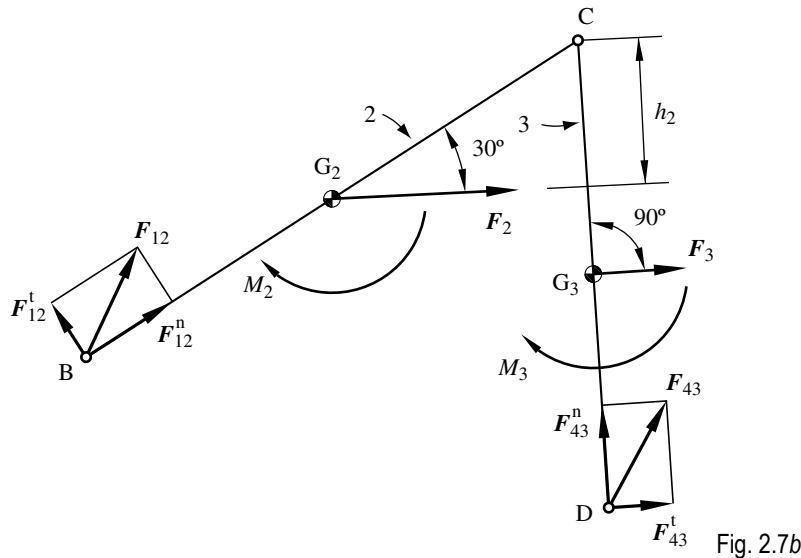
Cargas sobre los eslabones del mecanismo: $F_1 = 6$ N, dirigida a lo largo del eslabón 1; $F_2 = 40$ N está dirigida bajo un ángulo de -30° con respecto al eslabón 2; $F_3 = 20$ N aplicada perpendicularmente al eslabón 3;

$M_2 = 0,4$ N·m; $M_3 = 0,7$ N·m. La dirección de los momentos se muestra en el esquema.

El momento compensador M_{com} está aplicado al eslabón 1.

Solución:

- 1) Todas las fuerzas externas que actúan sobre los eslabones son dadas. Primer paso resuelto
- 2) El momento compensador M_{com} actúa según las condiciones sobre el eslabón 1, el eslabón 1 se considera conductor.
- 3) El mecanismo se compone de un eslabón primario y un grupo de Assur de segunda clase primer tipo.
- 4) Planteamos la ecuación de equilibrio para el grupo compuesto por los eslabones 2 y 3 (ver figura 2.7b)



$$\vec{F}_{12} + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_{43} = 0.$$

En esta ecuación están contenidas cuatro incógnitas: las direcciones y las magnitudes de las reacciones $\vec{F}_{12}$ y $\vec{F}_{43}$ para poder resolver esta suma vectorial geoméricamente descomponemos las reacciones $\vec{F}_{12}$ y $\vec{F}_{43}$ en sus dos componentes normal y tangencial:

$$\vec{F}_{12} = \vec{F}_{12}^n + \vec{F}_{12}^t, \quad \vec{F}_{43} = \vec{F}_{43}^n + \vec{F}_{43}^t$$

Las magnitudes de $\vec{F}_{12}^t$ y $\vec{F}_{43}^t$ pueden ser determinadas a partir de las ecuaciones de equilibrio planteadas para cada eslabón por separado:

Para el eslabón 2

$$\sum M_{C2} = 0,$$

La cual de manera explícita es

$$-F_{12}^t \cdot l_{BC} - M_2 + F_2 h_2 = 0,$$

De donde

$$F_{12}^t = \frac{-M_2 + F_2 h_2}{l_{BC}} = \frac{-0,4 + 40 \cdot 0,0625}{0,25} = 8,4 N$$

La magnitud de h_2 se toma del plano de posiciones

Para el eslabón 3

$$\sum M_{C3} = 0,$$

La cual de manera explícita es

$$F_{43}^t \cdot l_{CD} - M_3 + F_3 l_{CS3} = 0,$$

De donde

$$F_{43}^t = \frac{M_3 - F_3 l_{CS3}}{l_{CD}} = \frac{0,7 - 20 \cdot 0,1}{0,2} = -6,5N$$

El hecho de que esta magnitud resultara negativa nos indica que el vector posee una dirección contraria a la supuesta en un principio, esto debe ser tomado en cuenta en la construcción del plano de fuerzas

El plano de fuerzas lo construiremos siguiendo la ecuación

$$\vec{F}_{12}^n + \vec{F}_{12}^t + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_{43}^n + \vec{F}_{43}^t = 0$$

Ver fig. 2.7c

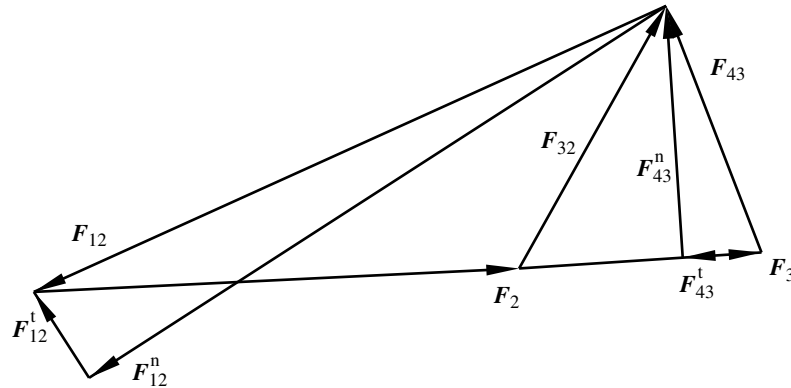


Fig. 2.7c

El plano de fuerza se puede construir en CAD tomando como factor de escala de fuerzas $\mu_F = 1N/\text{unidadCAD}$. De esta manera los resultados pueden ser tomados del plano en su magnitud real.

Para determinar la reacción $\vec{F}_{32}$ planteamos, por ejemplo, el equilibrio del eslabón 2

$$\vec{F}_{12} + \vec{F}_2 + \vec{F}_{32} = 0$$

Es decir $\vec{F}_{32}$ se puede hallar en el plano de fuerzas, ya construido, uniendo el final de $\vec{F}_2$ con el inicio de $\vec{F}_{12}$

5) Planteamos la ecuación de equilibrio para el eslabón primario

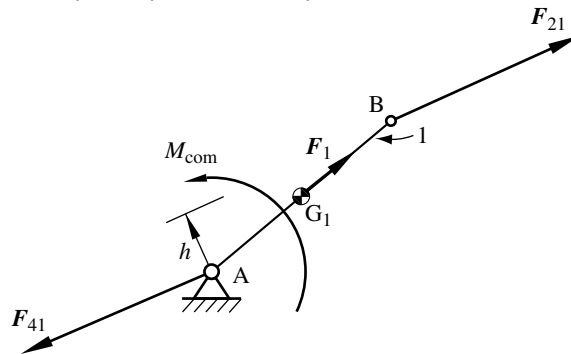


Fig. 2.7d

$$\vec{F}_{41} + \vec{F}_1 + \vec{F}_{21} = 0$$

Para determinar la reacción $\vec{F}_{41}$ construimos el plano de fuerzas según la ecuación anterior (Fig. 2.7e)

6) Para determinar la magnitud del momento compensador planteamos la ecuación de momentos del eslabón primario con respecto al punto A

$$\sum M_{A/1} = 0,$$

Que de manera explícita es

$$M_{com} - F_{21} \cdot h_1 = 0 ;$$

de donde

$$M_{com} = F_{21} \cdot h_1 = 57,12 \cdot 0,027 = 1,54 \text{ N}\cdot\text{m}$$

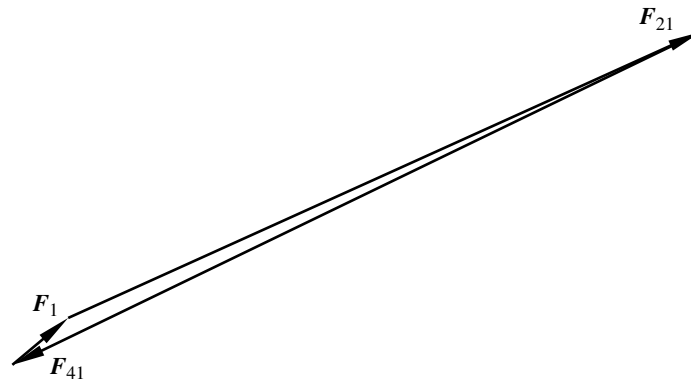


Fig. 2.7e

Resultados

Reacciones: Se toman directamente del plano de fuerzas

$$R_A = F_{41} = 62,5 \text{ N}$$

$$R_B = F_{12} = 57,1 \text{ N}$$

$$R_C = F_{32} = 24,7 \text{ N}$$

$$R_D = F_{43} = 21,7 \text{ N}$$

Momento compensador

$$M_{com} = 1,54 \text{ N}\cdot\text{m}$$

2.2.3 DETERMINACIÓN DE LAS REACCIONES EN LOS PARES CINEMÁTICOS DE LOS GRUPOS DE II SEGUNDA CLASE DEL TIPO RRP

Pasemos ahora a estudiar los grupos de II clase del tipo RRP (Fig. 2.8a)

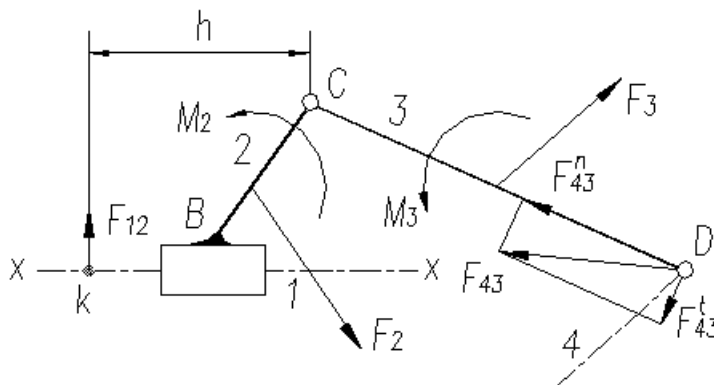


Fig. 2.8a

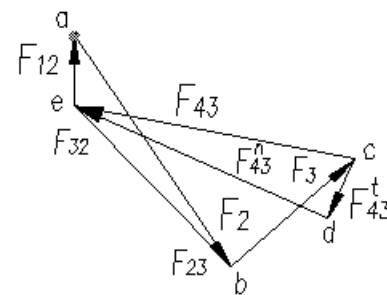


Fig. 2.8b

Este tipo de grupos poseen un par extremo de deslizamiento B sobre el eje $x - x$. Sobre el grupo actúan las fuerzas externas $\vec{F}_2$ y $\vec{F}_3$ y pares con los momentos M_2 y M_3 . Las reacciones en los pares se pueden determinar por el método de los *planos de fuerzas*. La ecuación vectorial de equilibrio de todas las fuerzas que actúan sobre el grupo tiene la siguiente forma:

$$\vec{F}_{12} + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_{43} = 0 \quad (2.10)$$

La reacción $\vec{F}_{12}$ es de dirección conocida (perpendicular al eje $x - x$) ahora, su punto de aplicación y magnitud son desconocidos. Para la reacción $\vec{F}_{43}$ se conoce su punto de aplicación, pero se desconocen su magnitud y su dirección.

Descomponemos la reacción $\vec{F}_{43}$ en dos componentes: una normal $\vec{F}_{43}^n$ dirigida a lo largo del eje del eslabón DC y otra tangencial $\vec{F}_{43}^t$ perpendicular al mismo. Obtenemos

$$\vec{F}_{43} = \vec{F}_{43}^n + \vec{F}_{43}^t$$

La magnitud de $\vec{F}_{43}^t$ se determina a partir de la ecuación de momentos de todas las fuerzas que actúan sobre el eslabón 3 con respecto a C . Tenemos

$$M_C(\vec{F}_3) + M_C(\vec{F}_{43}^t) + M_3 = 0$$

Como

$$M_C(\vec{F}_{43}^n) = 0 \quad \text{y} \quad M_C(\vec{F}_{23}) = 0.$$

Para la determinación de la magnitud de la fuerza $\vec{F}_{43}^t$ obtenemos

$$F_{43}^t = - \left[\frac{M_C(\vec{F}_3)}{l_{DC}} + \frac{M_3}{l_{DC}} \right].$$

El signo de la fuerza $\vec{F}_{43}^t$ está determinado por la suma de los momentos $M_C(\vec{F}_3)$ y M_3 .

Sustituyendo la expresión obtenida en (2.10) tenemos

$$\vec{F}_{12} + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_{43}^n + \vec{F}_{43}^t = 0.$$

En esta ecuación son desconocidas sólo las magnitudes de las fuerzas $\vec{F}_{12}$ y $\vec{F}_{43}^n$. Las magnitudes de estas fuerzas se pueden determinar construyendo el plano de fuerzas. A partir de un punto arbitrario a (fig. 2.8 b) trazamos un segmento que representa, en la escala escogida μ_F , la fuerza $\vec{F}_2$. En la misma escala le adicionamos la fuerza $\vec{F}_3$. Desde el punto c consignamos la fuerza conocida $\vec{F}_{43}^t$, perpendicular al eje del eslabón DC , desde el punto d trazamos una recta en la dirección de la fuerza $\vec{F}_{43}^n$, paralela al eje del eslabón DC . Luego desde el punto a trazamos una recta en dirección de la fuerza $\vec{F}_{12}$, perpendicular al eje $x - x$. El punto e de intersección de estas dos rectas determina las magnitudes de las reacciones $\vec{F}_{43}$ y $\vec{F}_{12}$. La reacción $\vec{F}_{43}$ está representada en escala μ_F por el segmento ce , y la reacción $\vec{F}_{12}$ por el segmento ea . Partiendo de las ecuaciones de equilibrio de los eslabones 2 y 3

$$\vec{F}_{12} + \vec{F}_2 + \vec{F}_{32} = 0, \quad \vec{F}_{43} + \vec{F}_3 + \vec{F}_{23} = 0$$

Podemos determinar las reacciones $\vec{F}_{32}$ y $\vec{F}_{23}$, ellas son iguales pero de dirección contraria y están representadas en el plano de fuerzas por el segmento be .

Nos resta determinar el punto k de aplicación de la fuerza $\vec{F}_{12}$ sobre el eje $x-x$ de la directriz (fig. 2.8a). Para esto planteamos la ecuación de momentos de las fuerzas que actúan sobre el eslabón 2 con respecto al punto C . Tenemos

$$M_C(\vec{F}_2) + M_C(\vec{F}_{12}') + M_2 = 0,$$

Ya que $M_C(\vec{F}_{32}) = 0$.

En esta ecuación sólo desconocemos el brazo h de la fuerza $\vec{F}_{12}$ (Fig. 2.8a), el cual puede ser determinado a partir de esta ecuación. Obtenemos entonces

$$h = - \left[\frac{M_C(\vec{F}_2)}{\vec{F}_{12}} + \frac{M_2}{\vec{F}_{12}} \right]. \quad (2.11)$$

La posición del punto k con respecto al punto C está determinada por el signo del miembro derecho de la ecuación (2.11).

Como en la figura 2.8 el deslizador B se muestra de manera esquemática, el punto k de aplicación de la fuerza $\vec{F}_{12}$ pareciera estar fuera del deslizador. En la realidad la fuerza $\vec{F}_{12}$ está aplicada dentro de la zona de contacto de los eslabones 1 y 2. Si, por ejemplo, el deslizador tiene forma real de un paralelepípedo de longitud l , y que se desliza a lo largo de la directriz $q-q$ (Fig. 2.9), se puede trasladar el punto de aplicación de la fuerza $\vec{F}_{12}$ al punto O (centro del deslizador) (Fig. 2.9). Entonces sobre el deslizador actuará la fuerza $\vec{F}_{12}$ y un par de fuerzas con momento M , de magnitud

$$M = F_{12} h',$$

Donde h' es la distancia desde el punto k al punto O . El par de fuerzas con momento M se puede representar de manera más cómoda en forma de dos fuerzas $\vec{F}_{12}^O$ y $-\vec{F}_{12}^O$ aplicadas en los extremos N y L del deslizador.

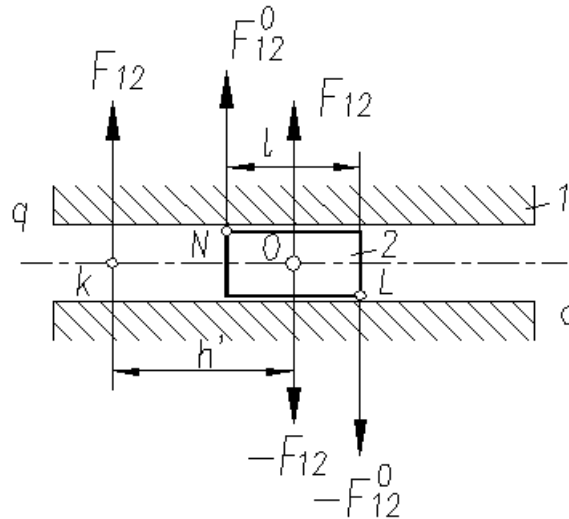


Fig. 2.9

La magnitud de la fuerza $\vec{F}_{12}^O$ es igual

$$F_{12}^O = \frac{M}{l} = F_{12} \frac{h'}{l}$$

De esta manera el deslizador se encuentra bajo la acción de la fuerza $\vec{F}_{12}$ aplicada en el punto O, y las fuerzas $\vec{F}_{12}^O$ y $-\vec{F}_{12}^O$ aplicadas en los punto N y L que crean un par con momento M.

Se ha estudiado de manera detallada la determinación de las reacciones en los grupos de II clase del primer y segundo tipos. De manera análoga se determinan también las reacciones para los otros tipos de grupos de II clase.

2.2.4 CÁLCULO CINETOSTÁTICO DEL ESLABÓN PRIMARIO DE UN MECANISMO CUANDO ÉSTE FORMA UN PAR DE DESLIZAMIENTO CON EL BASTIDOR

Supongamos que el eslabón primario 1 (Fig. 2.10a) se mueve con velocidad constante con respecto al bastidor con el cual conforma un par de deslizamiento. En este caso la reacción $\vec{F}_{01}$ en el par N estará dirigida perpendicularmente al eje de desplazamiento del par de deslizamiento. Supongamos que la fuerza compensadora $\vec{F}_{com}$ está dirigida a lo largo de la línea m - m, entonces la magnitud de la fuerza compensadora estará determinada por la siguiente ecuación vectorial.

$$\vec{F}_{com} + \vec{F}_{01} + \vec{F}_1 + \vec{F}_{21} = 0$$

En esta ecuación las fuerzas $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_{21}$ son dadas; $\vec{F}_{01}$ y $\vec{F}_{com}$ son de dirección conocidas. La solución gráfica de esta ecuación se muestra en la Fig. 2.10b.

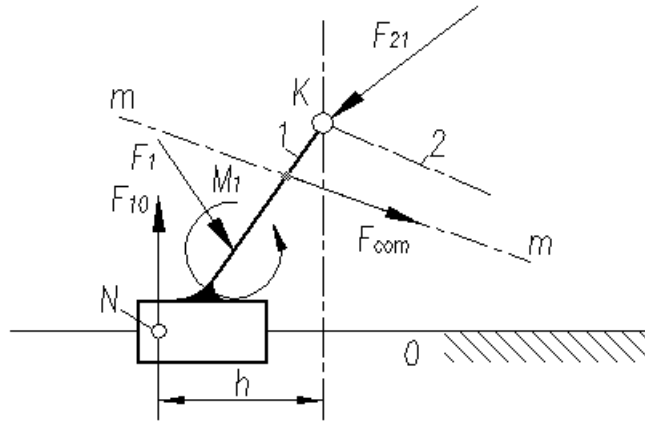


Fig. 2.10a

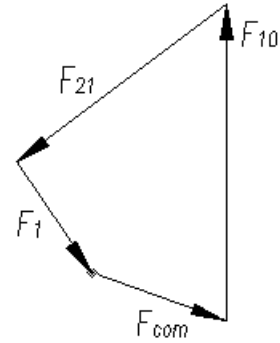


Fig. 2.10b

Para determinar el punto de aplicación N de la fuerza $\vec{F}_{01}$ planteamos la ecuación de momentos de todas las fuerzas con respecto al punto K.

$$M_K(\vec{F}_{com}) + M_K(\vec{F}_1) + M_K(\vec{F}_{01}) + M_1 = 0$$

En esta ecuación la única magnitud desconocida es el brazo h del momento $M_K(\vec{F}_{01})$ de la fuerza $\vec{F}_{01}$, el cual puede ser determinado despejando la ecuación anterior

$$h = - \frac{[M_K(\vec{F}_{com}) + M_K(\vec{F}_1) + M_1]}{F_{01}}.$$

La dirección en la cual debe ser localizado el segmento h depende de la magnitud y de los signos de los momentos M_1 , $M_K(\vec{F}_{com})$ y $M_K(\vec{F}_1)$.

Ejemplo 2.2 Realizar el análisis de fuerzas del mecanismo de manivela - deslizador de un compresor mostrado en la figura 2.11a, en la posición dada cuando $\varphi_1 = 45^\circ$.

Datos: medidas de los eslabones: $l_{AB} = 100 \text{ mm}$; $l_{BC} = 400 \text{ mm}$; $l_{AS1} = 20 \text{ mm}$; $l_{BS2} = 100 \text{ mm}$

Cargas sobre los eslabones del mecanismo:

$F_1 = 400 \text{ N}$, dirigida a lo largo de la línea AB y está aplicada en el punto S_1 ;

$F_2 = 600 \text{ N}$ está dirigida bajo un ángulo de $\varphi_2 = 60^\circ$ con respecto a la línea BC y está aplicada en el punto S_2 ;

$F_3 = 1000 \text{ N}$ aplicada a lo largo de la línea Ax , su línea de acción pasa por el punto C ;

$M_2 = 8,0 \text{ N}\cdot\text{m}$; la dirección del momento se muestra en el esquema..

El momento compensador M_{com} está aplicado al eslabón 1.

Se pide determinar : la reacción $R_{C'}$ en el par cinemático deslizante C' ; la reacción R_C en el par cinemático giratorio C ; la reacción R_B en el par giratorio B ; la reacción R_A en el par giratorio A y el momento compensador M_{com} .

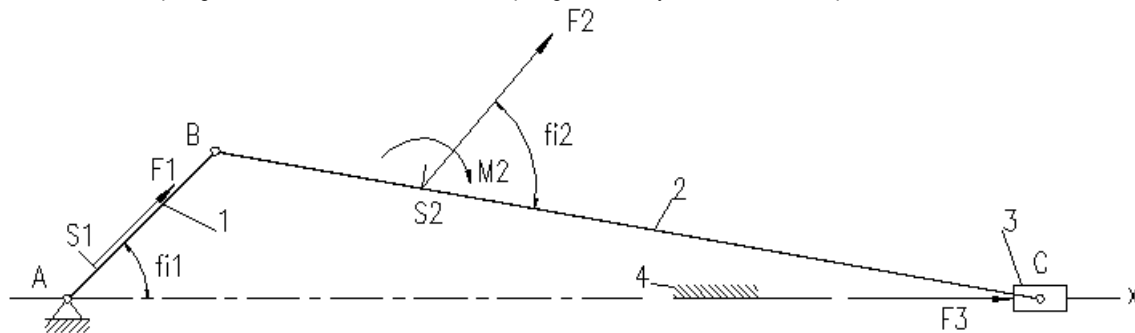


Fig. 2.11a

Solución

- 1) Todas las fuerzas externas que actúan sobre los eslabones son dadas. Primer paso resuelto
- 2) El momento compensador M_{com} actúa, según las condiciones, sobre el eslabón 1. El eslabón 1 se considera conductor.
- 3) El mecanismo se compone de un eslabón primario y un grupo de Assur de segunda clase segundo tipo.
- 4) Planteamos la ecuación de equilibrio para el grupo compuesto por los eslabones 2 y 3 (ver figura 2.11b)

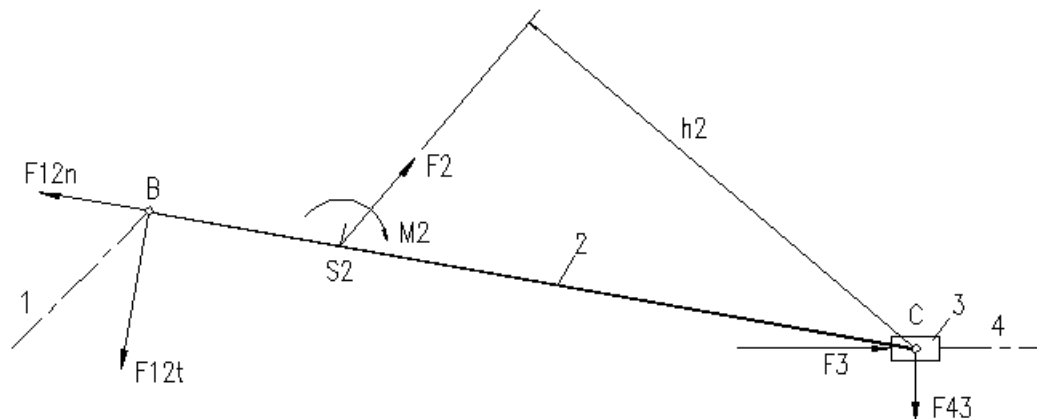


Fig. 2.11b

$$\vec{F}_{12} + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_{43} = 0$$

En esta ecuación están contenidas tres incógnitas: la dirección y la magnitud de la reacción $\vec{F}_{12}$ y la magnitud de $\vec{F}_{43}$ para poder resolver esta suma vectorial geoméricamente descomponemos la reacción $\vec{F}_{12}$ en sus dos componentes normal y tangencial:

$$\vec{F}_{12} = \vec{F}_{12}^n + \vec{F}_{12}^t,$$

La magnitud de $\vec{F}_{12}^t$ puede ser determinada a partir de la ecuación de equilibrio planteada para el eslabón 2 por separado

Para el eslabón 2 planteamos la igualdad a cero de la suma de momentos con respecto al punto C (de esta manera excluimos el momento de la reacción $\vec{F}_{12}^n$ por el momento desconocida).

$$\sum M_{C/2} = 0,$$

La cual de manera explícita es

$$F_{12}^t \cdot l_{BC} - M_2 - F_2 h_2 = 0,$$

De donde

$$F_{12}^t = \frac{M_2 + F_2 h_2}{l_{BC}} = \frac{8 + 600 \cdot 0,2598}{0,4} = 409,7 N$$

La magnitud de $h_2 = 0,2598$ m se toma del plano de posiciones

El plano de fuerzas lo construiremos siguiendo la ecuación.

$$\vec{F}_{12}^n + \vec{F}_{12}^t + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_{43} = 0$$

El plano de fuerza se puede construir en un programa CAD tomando como factor de escala de fuerzas $\mu_F = 1N/\text{unidadCAD}$. De esta manera los resultados pueden ser tomados del plano en su magnitud real.

Trazamos a partir del punto *a* (Fig. 2.11c) la fuerza $\vec{F}_{12}^t$ en forma de segmento de 409,7 unidadesCAD.

A partir del punto *b* consignamos la fuerza $\vec{F}_2$, como un segmento de 600 unidadesCAD. Luego a partir del punto *c* consignamos $\vec{F}_3$ en forma de segmento de 1000 unidadesCAD.

A través del punto *a* trazamos una recta paralela a *BC*. Esta será la línea de acción de la fuerza $\vec{F}_{12}^n$, y luego a través del punto *d* una recta perpendicular a *Ax*. Esta es la línea de acción de la fuerza $\vec{F}_{43}$. Encontramos el punto de intersección *e* de estas dos rectas.

El segmento (*ae*) nos da la magnitud de la reacción buscada $\vec{F}_{12}^n$, el segmento (*de*) nos da la magnitud de la reacción $\vec{F}_{43}$, y el segmento (*be*) nos muestra la reacción $\vec{F}_{12}$.

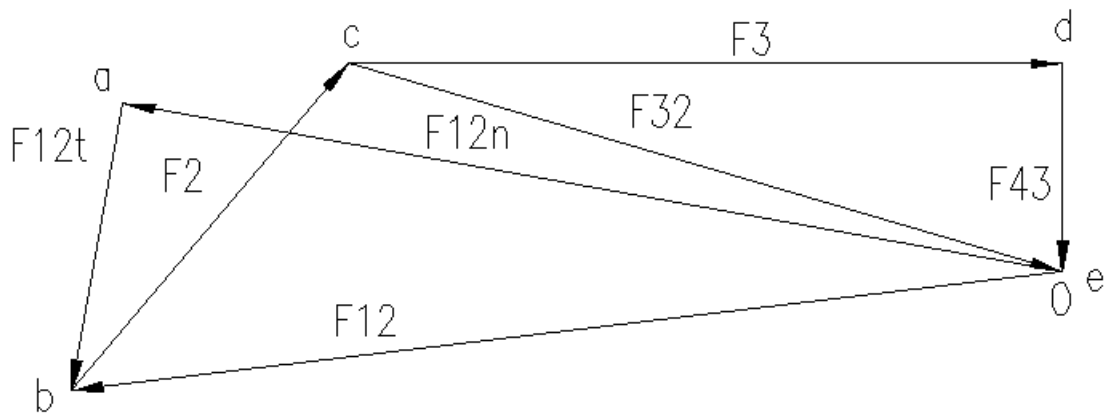


Fig. 2.11c

Para encontrar la reacción $\vec{F}_{32}$ planteamos la condición de equilibrio para el eslabón 2:

$$\vec{F}_{12} + \vec{F}_2 + \vec{F}_{32} = 0$$

En el plano de fuerzas (fig. 2.11c) puede verse que el segmento (ce) corresponde a la reacción buscada $\vec{F}_{32}$.

La reacción $\vec{F}_{43}$ debe pasar a través del punto C, ya que sobre el deslizador actúan sólo tres fuerzas, de las cuales dos ($\vec{F}_{23}$ y $\vec{F}_3$) pasan por este punto.

5) Cálculo de fuerzas del eslabón conductor 1 (Fig. 2.11d)

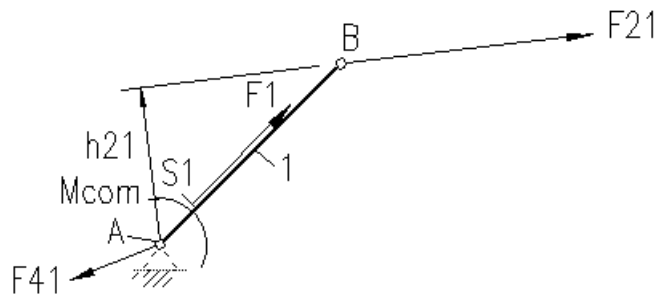


Fig. 2.11d

Sobre el eslabón 1 actúan: La fuerza $\vec{F}_1 = 400$ N; la fuerza $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$ (su magnitud está determinada en el plano de fuerzas (fig. 2.11c) por el segmento (be), $F_{12} = (be) = 1397,162$ N; la fuerza (reacción) $\vec{F}_{41}$ y el momento compensador M_{com} .

Igualando a cero la suma de momentos de las fuerzas que actúan sobre el eslabón 1 con respecto al punto A, encontramos la magnitud del momento del par de fuerzas compensador:

$$M_{com} = F_{21} \cdot h_{21} = 1397,162 \cdot 0,0617 = 86,2 \text{ N}\cdot\text{m},$$

Donde h_{21} (brazo de la fuerza $\vec{F}_{21}$) se toma directamente del plano de posición (fig. 2.11d)

La condición de equilibrio de fuerzas que actúan sobre el eslabón 1 es

$$\vec{F}_{21} + \vec{F}_1 + \vec{F}_{41} = 0.$$

A partir de esta ecuación encontramos la reacción $\vec{F}_{41}$ mediante la construcción del triángulo vectorial de fuerzas (fig.2.11e).

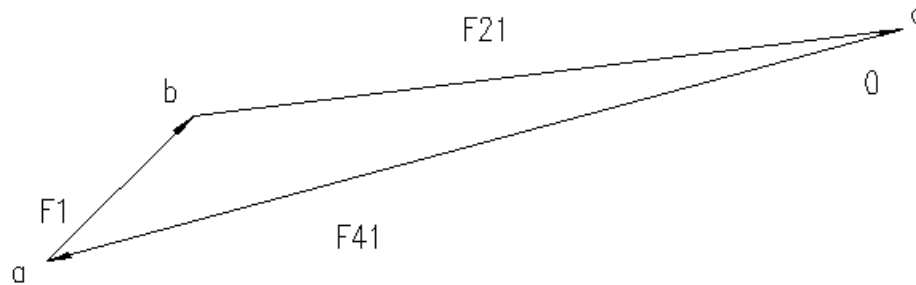


Fig. 2.11e

Resultados

Reacciones: Se toman directamente del plano de fuerzas

$$R_A = F_{41} = 1729,531 \text{ N}$$

$$R_B = F_{12} = 1397,162 \text{ N}$$

$$R_C = F_{32} = 1041,558 \text{ N}$$

$$R_C = F_{43} = 291,279 \text{ N}$$

Momento compensador

$$M_{com} = 86,2 \text{ N}\cdot\text{m}$$

Ejemplo 2.3 Realizar el análisis de fuerzas para el mecanismo de seis eslabones de una máquina cepilladora (Fig. 2.12a), en la posición mostrada cuando $\varphi_1 = 45^\circ$. Medidas de los eslabones $l_{AB} = 65 \text{ mm}$, $l_{AC} = 350 \text{ mm}$, $l_{CD} = 680 \text{ mm}$, $l_{ED} = 210 \text{ mm}$, $H = 285 \text{ mm}$, $l_1 = 390 \text{ mm}$, $l_2 = 290 \text{ mm}$, $l_{ES5} = 105 \text{ mm}$, $h = 100 \text{ mm}$.

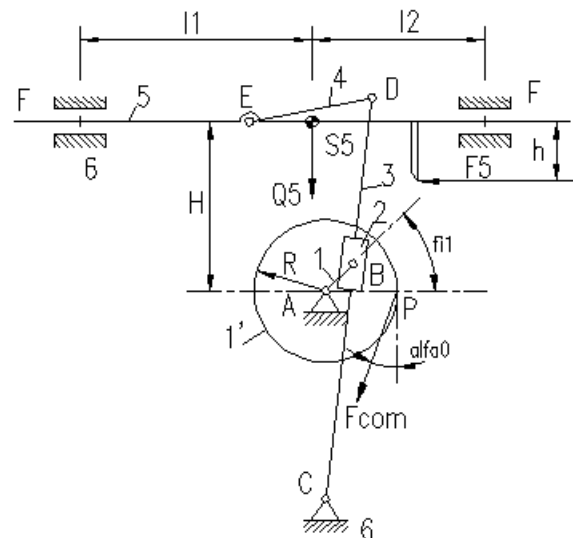


Fig. 2.12a

Sobre el eslabón 5 actúa la fuerza de corte $F_5 = 200 \text{ N}$. El peso del eslabón 5 es $Q_5 = 60 \text{ N}$ esta fuerza está aplicada en el centro de masas del eslabón S_5 .

Sobre el diente de la rueda dentada $1'$, solidaria con el eslabón 1 , aplicada en el polo de engranaje P , actúa la fuerza compensadora F_{com} ; el radio de la circunferencia primitiva de la rueda $1'$ es $R = 120$ mm, el ángulo de presión es $\alpha_0 = 20^\circ$.

Determinar las reacciones en todos los pares cinemáticos y la fuerza compensadora $\vec{F}_{com}$ despreciando la fricción en todos los pares cinemáticos.

Solución

- 1) Todas las fuerzas externas que actúan sobre los eslabones son dadas. Primer paso resuelto
- 2) La fuerza compensadora $\vec{F}_{com}$ actúa, según las condiciones, sobre el eslabón 1 . El eslabón 1 se considera conductor.
- 3) El mecanismo se compone de un eslabón primario y dos grupos de Assur de segunda clase : uno de segundo tipo, compuesto por los eslabones 5 y 4 , y uno del tercer tipo compuesto por los eslabones 3 y 2 .
- 4) Planteamos la ecuación de equilibrio para el grupo compuesto por los eslabones 5 y 4 (ver figura 2.12b)

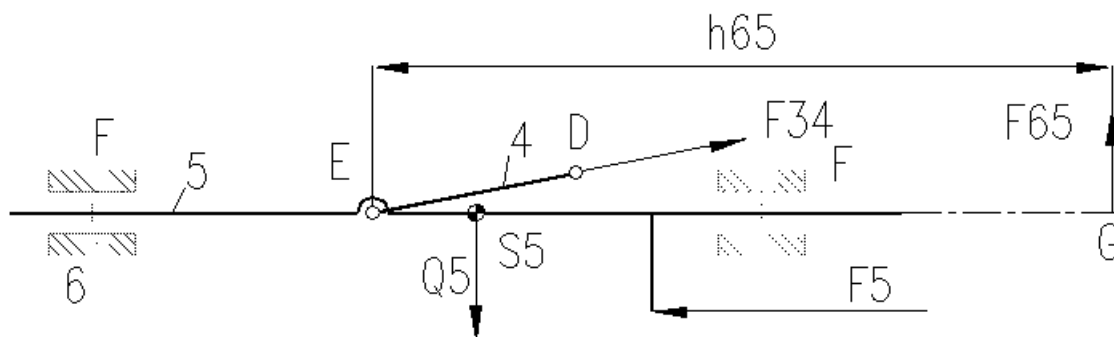


Fig. 2.12b

$$\vec{Q}_5 + \vec{F}_5 + \vec{F}_{34} + \vec{F}_{65} = 0$$

En esta ecuación las direcciones de $\vec{F}_{34}$ y $\vec{F}_{65}$ son conocidas: la fuerza $\vec{F}_{34}$ está dirigida a lo largo de del eslabón DE (ya que el eslabón 4 no está cargado con ninguna fuerza externa) ; la fuerza $\vec{F}_{65}$ está dirigida perpendicular a la directriz del eslabón 5 .

Construimos el plano de fuerzas del grupo (Fig. 2.12c)

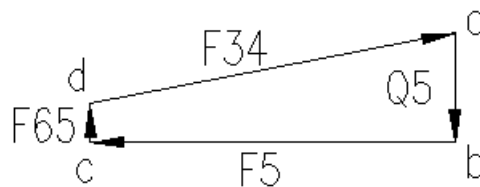


Fig. 2.12c

Escogemos una escala de fuerzas $\mu_F = 1\text{N/unidadCAD}$. Partiendo del punto a trazamos la fuerza $\vec{Q}_5$ en forma del segmento $(ab) = 60$ unidadCAD; luego desde el punto b consignamos la fuerza $\vec{F}_5$ en forma del segmento $(bc) = 200$ unidadCAD.

A través del punto a trazamos una línea paralela a DE (dirección de la fuerza $\vec{F}_{34}$) y a través del punto c una línea perpendicular a la directriz del eslabón 5 (dirección de la fuerza $\vec{F}_{65}$), y hallamos la intersección de estas dos líneas en

el punto *d*. El segmento (*cd*) nos muestra la magnitud de la fuerza $F_{65} = 20,726$ N, el segmento (*da*) nos da la magnitud de la reacción $F_{34} = 203,82$ N.

El punto G de aplicación de la fuerza $\vec{F}_{65}$ lo hallaremos a partir de la condición de equilibrio del eslabón 5. Planteamos la igualdad a cero de los momentos de las fuerzas aplicadas al eslabón 5 con respecto al punto E.

$$\sum M_{E/5} = F_{65} \cdot l_{EG} - Q_5 \cdot l_{ES_5} - F_5 h = 0,$$

De donde

$$l_{EG} = h_{65} = \frac{Q_5 \cdot l_{ES_5} - F_5 h}{F_{65}} = \frac{60 \cdot 0,105 + 200 \cdot 0,100}{20,726} = 1,269m$$

Planteamos las ecuaciones de equilibrio para el grupo conformado por los eslabones 2 y 3 (fig. 2.12d)

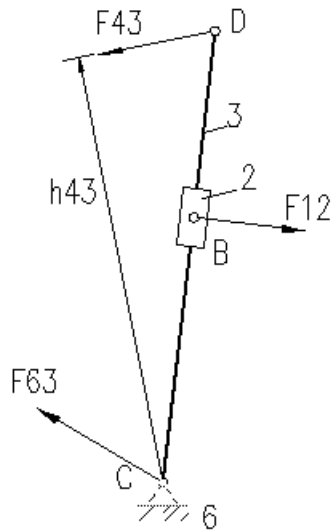


fig. 2.12d

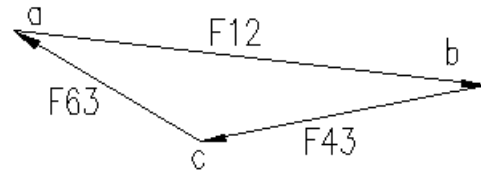


fig. 2.12e

La condición de equilibrio de este grupo tiene la siguiente forma

$$\vec{F}_{43} + \vec{F}_{12} + \vec{F}_{63} = 0,$$

donde $\vec{F}_{43} = -\vec{F}_{34}$ y la fuerza $\vec{F}_{12}$ está dirigida perpendicular a la línea CD (el eslabón 2 no está cargada por fuerzas externas), es decir en la ecuación escrita hay tres incógnitas. Por esto primero debemos determinar la magnitud de la fuerza $\vec{F}_{12}$, usando la ecuación de los momentos de las fuerzas aplicadas al grupo, con respecto al punto C.

$$\sum M_{C/2,3} = F_{43} \cdot h_{43} - F_{12} \cdot l_{BC} = 0,$$

de donde

$$F_{12} = \frac{F_{43} \cdot h_{43}}{l_{BC}} = \frac{203,8196 \cdot 0,6477}{0,3986} = 331,176N$$

Las medidas $h_{43} = 0,6477$ m y $l_{BC} = 0,3986$ m fueron tomadas del plano de posición del mecanismo

Construimos el plano de fuerzas (fig. 2.12e) en escala $\mu_F = 1N/unidadCAD$. Desde el punto *a* dibujamos la fuerza $\vec{F}_{12}$ en forma de segmento (*ab*) = 331,176 unidadCAD perpendicular a la línea CD, luego desde el punto *b* trazamos la fuerza $\vec{F}_{43}$ en forma de segmento (*bc*) = 203,8196 unidadCAD. Uniendo los puntos *c* y *a* con una recta, encontramos la magnitud de la fuerza $\vec{F}_{63}$, $F_{63} = 150,441$ N.

5) Cálculo de fuerzas del eslabón primario (fig. 2.12f)

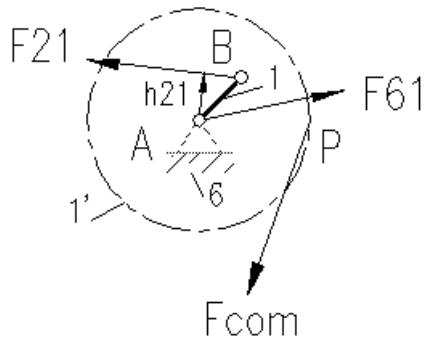


Fig. 2.12f

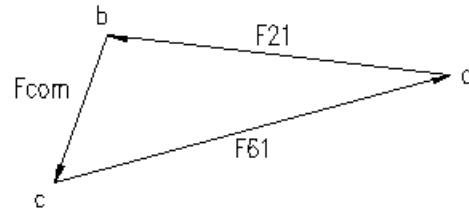


Fig. 2.12g

Sobre el eslabón 1 actúan: la fuerza $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$, la reacción en la junta A (igual a $\vec{F}_{61}$) y la fuerza compensadora $\vec{F}_{com}$ la cual está aplicada en el punto P de la rueda 1' bajo un ángulo de $\alpha_0 = 20^\circ$ con respecto a la tangente de la circunferencia primitiva.

La condición de equilibrio (partiendo de la suma de momentos de todas las fuerzas con respecto a A) para el eslabón 1 (AB) es

$$F_{21} \cdot h_{21} - F_{com} \cdot R \cos \alpha_0 = 0,$$

de donde

$$F_{com} = \frac{F_{21} \cdot h_{21}}{R \cos \alpha_0} = \frac{331,176 \cdot 0,05096}{0,120 \cdot \cos 20^\circ} = 149,67 \text{ N}.$$

Construimos el plano de fuerzas para el eslabón conductor (fig. 2.12g)

$$\vec{F}_{21} + \vec{F}_{com} + \vec{F}_{61} = 0$$

Para ello desde el punto a trazamos la fuerza $\vec{F}_{21}$ en forma del segmento (ab) = 331,175 unidadCAD, luego desde el punto b trazamos la fuerza $\vec{F}_{com}$ en forma del segmento (bc) = 149,67 unidadCAD.

Uniendo el punto c y el punto a con una recta encontramos la magnitud $F_{61} = 393,72 \text{ N}$.

La reacción en la junta E es igual a la reacción en la junta D (el eslabón 4 no está cargado externamente); la reacción entre el deslizador 2 y el eslabón 3 es igual a la reacción en el eslabón B (el eslabón 2 no está cargado externamente)

Resultados

Reacciones: Se toman directamente del plano de fuerzas

$$\begin{aligned} R_A &= F_{61} = 393,72 \text{ N} \\ R_B &= F_{12} = 331,175 \text{ N} \\ R_C &= F_{63} = 150,441 \text{ N} \\ R_E &= R_D = F_{43} = 203,82 \text{ N} \\ R_F &= F_{65} = 20,73 \text{ N} \end{aligned}$$

Fuerza compensadora

$$F_{com} = 149,67 \text{ N}\cdot\text{m}$$

2.2.5 DETERMINACIÓN DE LAS REACCIONES EN LOS PARES CINEMÁTICOS DE LOS GRUPOS DE III CLASE

Para determinar las reacciones en los pares cinemáticos de los grupos de III clase lo más cómodo es el método de los planos con la utilización de los puntos especiales. Pasemos al estudio de este método.

Supongamos dado el grupo de III clase $BCDENG$ con tres eslabones de arrastre (fig. 2.13, a), sobre el cual actúan las fuerzas dadas $\vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4$ y $\vec{F}_5$ y los pares de fuerzas con momentos M_2, M_3, M_4 y M_5 . Se pide determinar las reacciones en los pares cinemáticos B, C, D, E, N, G .

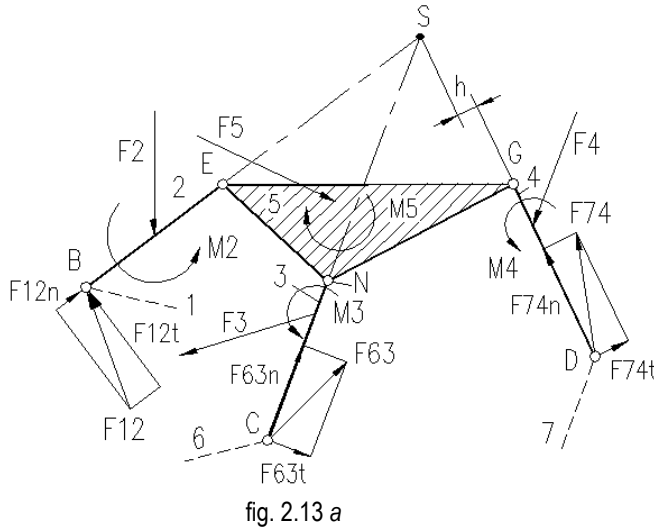


fig. 2.13 a

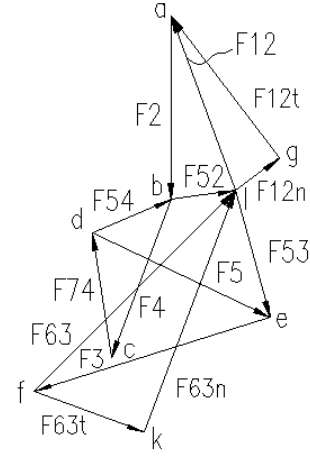


fig. 2.13.b

Descomponemos las reacciones $\vec{F}_{12}, \vec{F}_{63}$ y $\vec{F}_{74}$ en dos componentes; a lo largo del eje del miembro de arrastre correspondiente y en dirección perpendicular a éste, nos ocuparemos entonces por determinar estas componentes. Tenemos

$$\vec{F}_{12} = \vec{F}_{12}^n + \vec{F}_{12}^t ; \quad \vec{F}_{63} = \vec{F}_{63}^n + \vec{F}_{63}^t ; \quad \vec{F}_{74} = \vec{F}_{74}^n + \vec{F}_{74}^t . \quad (2.12)$$

Planteamos la ecuación de momentos de todas las fuerzas que actúan sobre el eslabón 2 con respecto al punto E. Tenemos

$$M_2 + M_E(\vec{F}_{12}^t) + M_E(\vec{F}_2) = 0 \quad (2.13)$$

A partir de la ecuación (2.13) determinamos la magnitud de la reacción $\vec{F}_{12}^t$:

$$F_{12}^t = - \left[\frac{M_E(\vec{F}_2) + M_2}{l_{BE}} \right] .$$

Luego, a partir de la ecuación de momentos de todas las fuerzas que actúan sobre el eslabón 3, con respecto al punto N determinamos la magnitud de la reacción $\vec{F}_{63}^t$.

$$M_3 + M_N(\vec{F}_{63}^t) + M_N(\vec{F}_3) = 0 \quad (2.14)$$

de donde

$$F_{63}^t = - \left[\frac{M_N(\vec{F}_3) + M_3}{l_{CN}} \right] .$$

A partir de la ecuación de momentos de todas las fuerzas que actúan sobre el eslabón 4, con respecto al punto G determinamos la magnitud de la reacción $\vec{F}_{74}^t$. Tenemos

$$M_4 + M_G(\vec{F}_{74}^t) + M_G(\vec{F}_4) = 0 ; \quad (2.15)$$

de aquí

$$F_{47}^t = - \left[\frac{M_G(\vec{F}_4) + M_4}{l_{DG}} \right].$$

Después encontramos en la intersección de cualesquiera dos miembros de arrastre el punto especial S y planteamos la ecuación de momentos de todas las fuerzas que actúan sobre el grupo con respecto al punto S. Tenemos

$$\begin{aligned} M_S(\vec{F}_2) + M_S(\vec{F}_3) + M_S(\vec{F}_4) + M_S(\vec{F}_5) + M_S(\vec{F}_{12}^t) + M_S(\vec{F}_{63}^t) + \\ + M_S(\vec{F}_{74}^t) + M_S(\vec{F}_{74}^n) + M_2 + M_3 + M_4 + M_5 = 0 \end{aligned} \quad (2.16)$$

Los momentos de las fuerzas $\vec{F}_{12}^n$ y $\vec{F}_{63}^n$ con respecto al punto S son iguales a cero. Las reacciones $\vec{F}_{12}^t$, $\vec{F}_{63}^t$ y $\vec{F}_{74}^t$ ya las hallamos. La única fuerza desconocida en la ecuación (2.16) es la reacción $\vec{F}_{74}^n$, cuyo momento con respecto al punto S es igual a

$$M_S(\vec{F}_{74}^n) = F_{74}^n \cdot h$$

A partir de la ecuación (2.16) podemos determinar la magnitud de la reacción $\vec{F}_{74}^n$.

Después de determinar la reacción $\vec{F}_{74}^n$, encontramos la reacción $\vec{F}_{74}$ como la suma geométrica de sus dos componentes ya conocidas

$$\vec{F}_{74} = \vec{F}_{74}^n + \vec{F}_{74}^t \quad (2.17)$$

Igualemos a cero la suma geométrica de todas las fuerzas que actúan sobre el grupo. Tenemos

$$\vec{F}_{12}^n + \vec{F}_{12}^t + \vec{F}_2 + \vec{F}_4 + \vec{F}_{74} + \vec{F}_5 + \vec{F}_3 + \vec{F}_{63}^n + \vec{F}_{63}^t = 0 \quad (2.18)$$

En esta ecuación encontramos que las únicas magnitudes desconocidas son las de las componentes $\vec{F}_{12}^n$ y $\vec{F}_{63}^n$, las cuales pueden ser determinadas con ayuda de la ecuación construyendo el plano de fuerzas en una escala escogida (fig. 2.13b)

A partir de un punto cualquiera *a* trazamos la fuerza $\vec{F}_2$ en forma del segmento *ab*. En el punto *b* le adjuntamos la fuerza $\vec{F}_4$ representada por el segmento *bc*, en el punto *c* aplicamos la fuerza $\vec{F}_{74}$ como segmento *cd*. Luego en el punto *d* sumamos la fuerza $\vec{F}_5$ representada por el segmento *de*. Por último en el punto *e* adjuntamos la fuerza $\vec{F}_3$ en forma de segmento *ef*. En los puntos *a* y *f* trazamos las fuerzas determinadas con anterioridad $\vec{F}_{12}^t$ y $\vec{F}_{63}^t$ representadas por los segmentos *ag* y *fk* y a través de los puntos *g* y *k* así obtenidos trazamos rectas paralelas a las fuerzas $\vec{F}_{12}^n$ y $\vec{F}_{63}^n$, hallando el punto *l* de intersección de estas dos rectas. Uniendo los puntos *a* y *l* del plano de fuerzas, encontramos, en escala μ_F , la reacción total $\vec{F}_{12}$ en forma del segmento *la*. Uniendo los puntos *f* y *l* obtenemos, en la misma escala, la reacción total $\vec{F}_{63}$ en forma del segmento *fl*.

Las reacciones $\vec{F}_{52}$, $\vec{F}_{53}$ y $\vec{F}_{54}$ las determinamos con ayuda de las ecuaciones que expresan la condición de equilibrio para cada uno de los eslabones 2, 3 y 4 tomados por separado:

$$\vec{F}_{12} + \vec{F}_2 + \vec{F}_{52} = 0, \quad \vec{F}_{63} + \vec{F}_3 + \vec{F}_{53} = 0, \quad \vec{F}_{74} + \vec{F}_4 + \vec{F}_{54} = 0.$$

En la primera de estas ecuaciones la única fuerza desconocida es la reacción $\vec{F}_{52}$, en la segunda ecuación la fuerza desconocida es la reacción $\vec{F}_{53}$ y en la tercera es la reacción $\vec{F}_{54}$. Estas reacciones se determinan construyendo triángulos de fuerzas adicionales. La primera se determina si en el plano de fuerzas unimos los puntos b y l (el segmento bl representa, en escala μ_F , la reacción $\vec{F}_{52}$), la segunda reacción se determina uniendo los puntos l y e (el segmento le representa, en la misma escala μ_F , la reacción $\vec{F}_{53}$); y la tercera reacción uniendo los puntos b y d (el segmento bd representa la reacción $\vec{F}_{54}$). De esta manera se determinan las reacciones en todos los pares cinemáticos de un grupo con tres miembros de arrastre.

Este método se puede aplicar a cualquier grupo de III clase en el que puedan ser hallados puntos especiales.

Ejemplo 2.3

Determinar las reacciones en los pares cinemáticos A , B , C , D , E , G y K para el mecanismo triturador mostrado en la fig. 2.14a. Encontrar también el momento compensador M_{com} suscitado por la fuerza $\vec{F}_3$ y que debe ser aplicado al eslabón 1, si $l_{AB} = 180$ mm, $l_{BC} = 260$ mm, $l_{GK} = 620$ mm, $l_{EA} = 685$ mm, $h_1 = 568$ mm, $h_2 = 644$ mm, $h_3 = 164$ mm, $h_4 = 105$ mm, $h_5 = 655$ mm, $h_6 = 60$ mm.

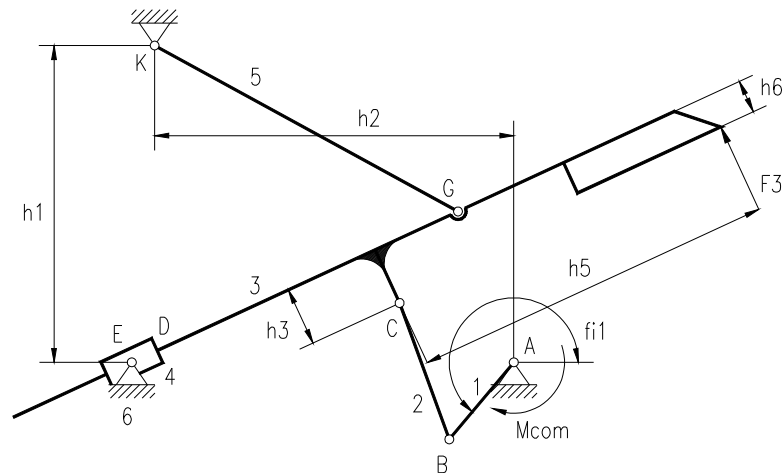


Fig. 2.14a

El mecanismo se compone de un grupo de primera clase (eslabón 1) y un grupo de tercera clase (eslabones 2,3,4 y 5) con el eslabón 3 como eslabón básico. Nótese que el eslabón de arrastre 4 forma un par deslizante con el eslabón básico.

Construimos el diagrama de cuerpo libre para grupo de III clase. (Fig. 2.14b)

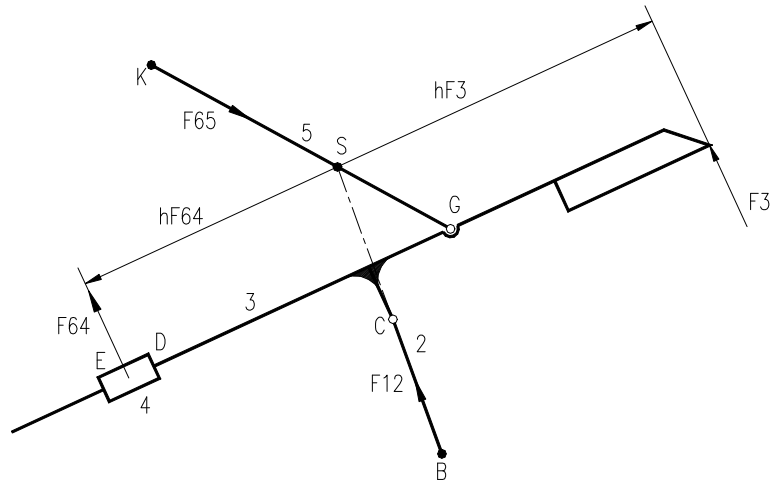


Fig. 2.14b

Las reacciones $\vec{F}_{65}$ y $\vec{F}_{12}$ están dirigidas a lo largo de los eslabones 5 y 2 ya que estos no están cargados adicionalmente con ninguna fuerza ni con ningún par de fuerzas. La reacción $\vec{F}_{64}$ está dirigida perpendicular a EG y aplicada en el punto E , ya que el eslabón 4 no está cargado adicionalmente con ninguna fuerza ni con ningún par de fuerzas, esta dirección está dictada por el tipo de par en el punto D .

Encontramos el punto especial S en la intersección de la continuación de los eslabones 2 y 5. Planteamos luego la ecuación de momentos de todas las fuerzas que actúan sobre el grupo con respecto al punto S .

$$-F_{64} \cdot h_{F64} + F_3 \cdot h_{F3} = 0 ;$$

$$F_{64} = \frac{F_3 \cdot h_{F3}}{h_{F64}} = \frac{40 \cdot 0,630}{0,505} = 49,9N$$

Las magnitudes de h_{F3} y h_{F64} se toman del plano de posición.

Igualemos a cero la suma geométrica de todas las fuerzas que actúan sobre el grupo. Tenemos

$$\vec{F}_{64} + \vec{F}_{65} + \vec{F}_3 + \vec{F}_{12} = 0 .$$

En esta ecuación las únicas magnitudes desconocidas son las de $\vec{F}_{65}$ y $\vec{F}_{12}$, éstas pueden ser determinadas construyendo el plano de fuerzas a partir de la ecuación anterior (Fig. 2.14c).

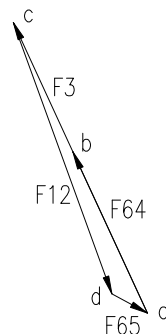


Fig. 2.14c

A partir de un punto cualquiera a trazamos la fuerza $\vec{F}_{64}$, representada por el segmento ab . En el punto b le adicionamos la fuerza $\vec{F}_3$ en forma del segmento bc . Posteriormente en los puntos a y c trazamos rectas paralelas a las fuerzas $\vec{F}_{65}$ y $\vec{F}_{12}$ respectivamente y señalamos el punto d de intersección de estas líneas. De esta manera el segmento cd nos representa, en la escala escogida (en nuestro caso $\mu_F = 1\text{N/unidadCAD}$), la reacción $\vec{F}_{12}$ y el segmento da , la reacción $\vec{F}_{65}$.

Sus magnitudes se averiguan midiendo directamente la longitud de los segmentos: $F_{12} = 81\text{ N}$; $F_{65} = 11,4\text{ N}$.

Las reacciones $\vec{F}_{32}$, $\vec{F}_{34}$ y $\vec{F}_{35}$ las determinamos con la ayuda de las ecuaciones que expresan la condición de equilibrio para los eslabones 2, 4 y 5 tomados por separado:

$$\vec{F}_{32} + \vec{F}_{12} = 0, \quad \vec{F}_{34} + \vec{F}_{64} = 0, \quad \vec{F}_{35} + \vec{F}_{65} = 0$$

Es decir

$$\vec{F}_{32} = -\vec{F}_{12}, \quad \vec{F}_{34} = -\vec{F}_{64}, \quad \vec{F}_{35} = -\vec{F}_{65}.$$

De donde: $F_{32} = 81\text{ N}$; $F_{34} = 49,9\text{ N}$; $F_{35} = 11,4\text{ N}$.

Construimos el diagrama de cuerpo libre para el grupo 1 obsérvese con atención la dirección de la reacción $\vec{F}_{21}$

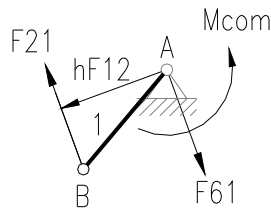


Fig. 2.14d

De la ecuación de equilibrio de todas las fuerzas que actúan sobre el eslabón 1, tenemos

$$\vec{F}_{21} + \vec{F}_{61} = 0, \quad \vec{F}_{21} = -\vec{F}_{61},$$

Entonces

$$F_{61} = 81\text{ N}.$$

Para la determinación del momento compensador planteamos la ecuación de equilibrio de todos los momentos que actúan sobre el eslabón 1 con respecto al punto A:

$$-F_{12} \cdot h_{F12} + M_{com} = 0,$$

Entonces

$$M_{com} = F_{12} \cdot h_{F12} = 81 \cdot 0,1559 = 12,6\text{ N} \cdot \text{m}.$$

Resultados

$$R_A = R_B = R_C = 81\text{ N}.$$

$$R_D = R_E = 49,9\text{ N}.$$

$$R_G = R_K = 11,4\text{ N}.$$

$$M_{com} = 12,6\text{ N} \cdot \text{m}.$$

2.2.6 DETERMINACIÓN DE LAS REACCIONES EN LOS PARES CINEMÁTICOS DE LOS GRUPOS QUE CONTIENEN PARES SUPERIORES

De la ecuación (2.1) se deduce que la determinabilidad estática de los grupos con pares cinemáticos superiores se satisface si, por ejemplo, el número de eslabones n es $n = 1$, el número de pares de V clase es $p_V = 1$ y el número de pares de IV clase también es $p_{IV} = 1$. Un grupo así se muestra en la fig. 2.15a

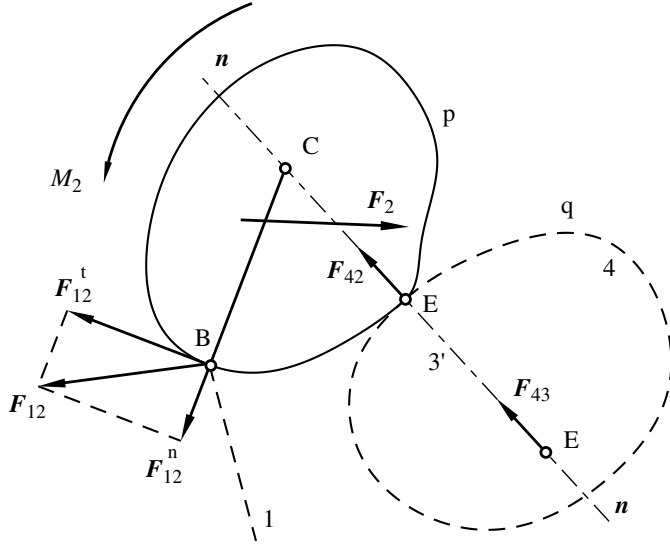


fig. 2.15 a

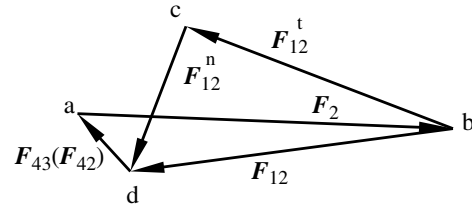


fig. 2.15 b

El eslabón 2 conforma el par giratorio B con el eslabón 1 y el par superior E con el eslabón 4, ejecutado en forma de dos curvas $p-p$ y $q-q$ en contacto. Encontramos los centros de curvatura de $p-p$ y $q-q$ sobre la normal $n-n$ trazada a través del punto de contacto E e introducimos un eslabón sustituto 3. Tenemos entonces el grupo de II clase BCD del primer tipo que es equivalente al grupo mostrado en la fig. 2.6a. Sea que el eslabón 2 está cargado con la fuerza $\vec{F}_2$ y el par con momento M_2 (fig. 2.15a). La reacción $\vec{F}_{12}$ puede ser representada como la suma de sus dos componentes

$$\vec{F}_{12} = \vec{F}_{12}^n + \vec{F}_{12}^t.$$

Ya que el eslabón 3 es ficticio y por consiguiente no está cargado con fuerzas externas, la reacción $\vec{F}_{43}$ está dirigida a lo largo de la recta CD y es igual a la reacción $\vec{F}_{42}$:

$$\vec{F}_{43} = \vec{F}_{42}$$

De esta manera la ecuación de equilibrio del grupo tiene la siguiente forma

$$\vec{F}_{12}^n + \vec{F}_{12}^t + \vec{F}_2 + \vec{F}_{42} = 0 \quad (2.19)$$

En esta ecuación son desconocidas las magnitudes de las componentes $\vec{F}_{12}^n$ y $\vec{F}_{12}^t$ de la reacción $\vec{F}_{12}$ y la magnitud de la reacción $\vec{F}_{42}$.

La componente $\vec{F}_{12}^t$ puede ser determinada a partir de la ecuación de momento de todas las fuerzas que actúan sobre el eslabón 2, con respecto al punto C. Tenemos

$$F_{12}^t = - \left[\frac{M_c(\vec{F}_2) + M_2}{l_{BC}} \right] \quad (2.20)$$

Por consiguiente en la ecuación (2.19) serán desconocidas sólo las magnitudes de la componente $\vec{F}_{12}^n$ y de la reacción $\vec{F}_{42}$. Para determinar estas magnitudes construimos el plano de fuerzas (fig. 2.15b).

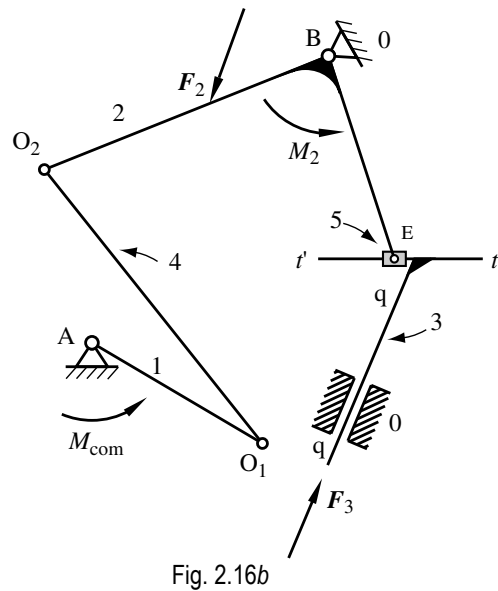
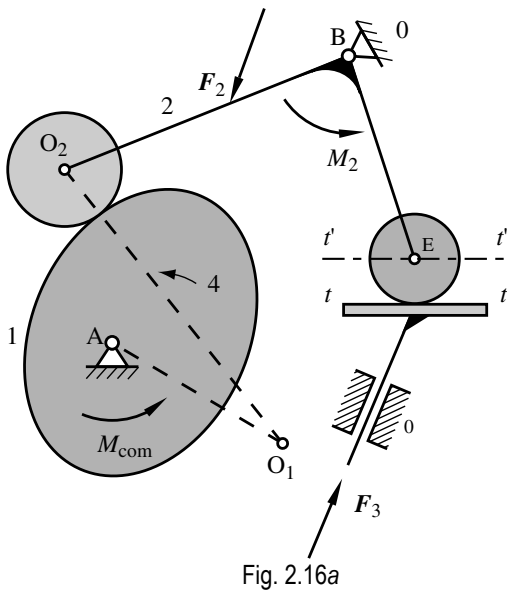
Para esto desde un punto arbitrario a trazamos en una escala escogida μ_F la fuerza $\vec{F}_2$ y le adicionamos en la misma escala la fuerza $\vec{F}_{12}^t$, calculada según la fórmula (2.20). A partir del punto c trazamos una recta paralela a la dirección BC , y a partir del punto a una recta paralela a DC . El punto d de intersección de estas dos rectas determina las reacciones $\vec{F}_{12}^n$ y $\vec{F}_{42}$. La reacción total $\vec{F}_{12}$ está representada por el segmento bd .

De este ejemplo estudiado se puede concluir, que el cálculo cinetostático de los grupos con pares superiores puede ser realizado construyendo los grupos equivalentes que contengan sólo pares inferiores de V clase e investigando las condiciones de equilibrio de los grupos así obtenidos.

Ejemplo 2.4

CÁLCULO CINETOSTÁTICO DE UN MECANISMO TÍPICO CON PARES SUPERIORES

Dado el mecanismo con pares de IV clase (fig. 2.16a) cargado con las cargas externas $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$ y el par con momento M_2 . Determinar las reacciones en los pares cinemáticos y determinar la magnitud del momento compensador M_{com} aplicado a la leva 1. Convertimos el mecanismo en uno equivalente con pares de V clase (fig. 2.16b).



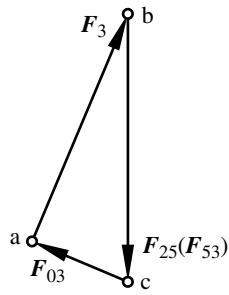


Fig. 2.16c

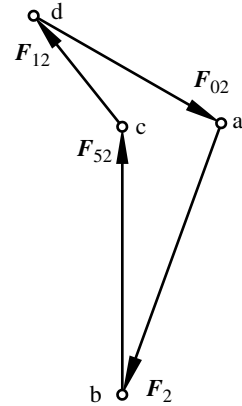


Fig. 2.16d

Con las letras O_1 y O_2 marcamos los centros de curvatura de los perfiles de los eslabones 1 y 2 en el punto de contacto. Si tomamos como primario el eslabón 1 el mecanismo equivalente es un mecanismo de II clase, el cual está conformado por dos grupos de II clase. El primer grupo está formado por los eslabones 4 y 2 y tres pares giratorios: O_1 , O_2 y B . El segundo grupo de II clase consta de los eslabones 3 y 5; un par giratorio E y dos pares de deslizamiento de ejes $t' - t'$ y $q - q$. El cálculo debe realizarse empezando por el segundo grupo de II clase. En este grupo el eslabón 3 está cargado con la fuerza $\vec{F}_3$, el eslabón 5 por ser ficticio no está cargado, la reacción $\vec{F}_{53}$ es perpendicular a la directriz $t' - t'$ y la reacción $\vec{F}_{03}$ es perpendicular a la directriz $q - q$.

Para la determinación de las reacciones $\vec{F}_{25} = \vec{F}_{53}$ y $\vec{F}_{03}$ hacemos uso de la ecuación de fuerzas que actúan sobre el grupo 3 - 5,

$$\vec{F}_3 + \vec{F}_{25} + \vec{F}_{03} = 0$$

Construyendo el plano de fuerzas (fig. 2.16c) se determinan las reacciones $\vec{F}_{03}$ y $\vec{F}_{25}$. La reacción $\vec{F}_{25} = \vec{F}_{53}$, debido a que el eslabón 5 no está cargado pasa a través del punto E y es perpendicular a la recta $t' - t'$.

Para el cálculo del grupo 2 - 4 aplicamos al eslabón 2 en el punto E la fuerza $\vec{F}_{32}$ igual en magnitud y de dirección contraria a $\vec{F}_{25}$. De esta manera el eslabón 2 de este grupo estará cargado con las fuerzas $\vec{F}_2$, $\vec{F}_{32}$ y el momento M_2 .

El eslabón 4 por su condición de ficticio no está cargado. La reacción $\vec{F}_{42}$ está dirigida a lo largo del eje O_1O_2 del eslabón 4 debido a la ausencia de carga sobre este eslabón. De la ecuación de momentos de todas las fuerzas que actúan sobre el eslabón 2 con respecto al punto B se determina la reacción $\vec{F}_{42}$, igual a la reacción $\vec{F}_{12}$:

$$\vec{F}_{42} = \vec{F}_{12} = - \left[\frac{M_B(\vec{F}_2) + M_B(\vec{F}_{32}) + M_2}{h} \right],$$

Donde h es el brazo de la fuerza $\vec{F}_{42}$ con respecto al punto B .

Después de esto, y partiendo de la ecuación de equilibrio de fuerzas que actúan sobre el eslabón 2,

$$\vec{F}_2 + \vec{F}_{32} + \vec{F}_{12} + \vec{F}_{02} = 0$$

Construimos el plano de fuerzas (fig. 2.16d) determinando así la reacción $\vec{F}_{02}$.

El eslabón primario 1 está cargado con la fuerza $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$ y el momento compensador M_{com} .

La magnitud del momento compensador M_{com} se determina a partir de la ecuación de momentos.

$$M_{com} + M_A(\vec{F}_{21}) = 0, \quad \text{ó} \quad M_{com} = -M_A(\vec{F}_{21}).$$

Entonces la reacción $\vec{F}_{01}$ se determina a partir de la ecuación

$$\vec{F}_{01} + \vec{F}_{21} = 0, \quad \text{ó} \quad \vec{F}_{01} = -\vec{F}_{21}.$$

Del ejemplo visto se deduce que la sustitución del mecanismo de levas por uno equivalente formado con pares de V clase no es obligatoria, si se toma que la reacción en los pares superiores está dirigida a lo largo de la normal a los elementos del par en el punto de contacto, como se mostró en el punto 2.1.

Ejemplo 2.5

CÁLCULO CINETOSTÁTICO DE UN MECANISMO DE RUEDAS DENTADAS

Pasemos ahora a estudiar el cálculo de fuerzas de los mecanismos de ruedas circulares dentadas. En la figura (2.17) se muestra el mecanismo dentado más sencillo de tres eslabones con ejes inmóviles A y B, los radios de las circunferencias primitivas son r_1 y r_2 correspondientemente. De ahora en adelante supondremos que los centros de masas de las ruedas coinciden con sus ejes de rotación, y que de esta manera las ruedas están balanceadas. Entonces las fuerzas de inercia de las ruedas son iguales a cero y cuando las ruedas giran con velocidad angular no constante surgen solamente pares de inercia adicionales, los cuales pueden ser determinados por medio de la fórmula (3.5).

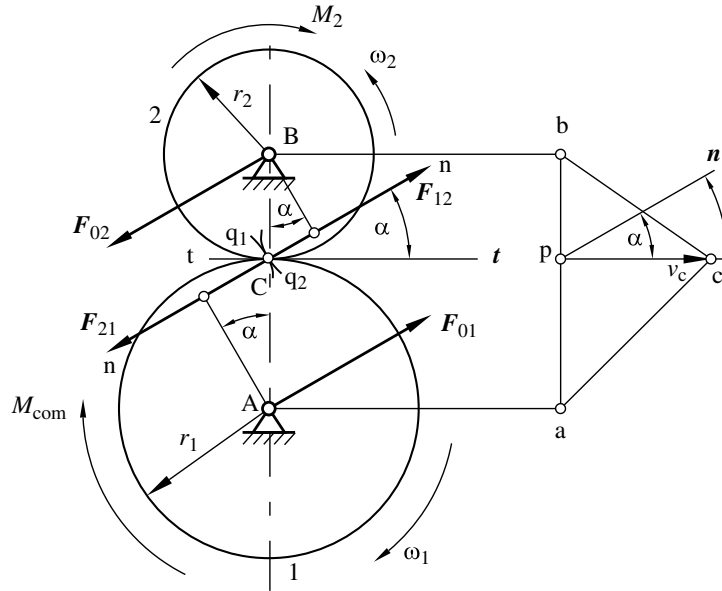


Fig. 2.17

Supongamos que la rueda de entrada, sobre la cual está aplicado el momento compensador, es la rueda 1; y la de salida, sobre la cual está aplicado el momento M_2 es la rueda 2. El momento M_2 es el momento resultante de todas las fuerzas externas y de inercia. Siguiendo la dirección del vector $\vec{v}_c$ del punto C (Fig. 2.17) determinamos las direcciones de las velocidades angulares $\vec{\omega}_1$ y $\vec{\omega}_2$ de las ruedas 1 y 2. La dirección del momento M_{com} debe coincidir con la dirección de la velocidad angular $\vec{\omega}_1$, ya que la rueda 1 es conductora. La dirección del momento M_2 deberá ser contraria la dirección de la velocidad angular $\vec{\omega}_2$, ya que la rueda 2 es conducida. En cualquiera de los puntos en donde

ocurre el contacto de los perfiles q_1 y q_2 de las ruedas 1 y 2, la normal $n - n$ trazada a estos perfiles deberá pasar a través del punto C de contacto de las circunferencias primitivas. Este punto es al mismo tiempo el centro instantáneo de giro de las ruedas en su movimiento relativo. De ahora en adelante lo más cómodo será considerar que las fuerzas $\vec{F}_{12}$ ó $\vec{F}_{21}$ están aplicadas en el punto C y están dirigidas a lo largo de la normal $n - n$.

Para determinar en cuál dirección es necesario consignar el ángulo α (Fig. 2.17a) entre la normal $n - n$ y la tangente $t - t$ de la circunferencia primitiva en el punto C usaremos la siguiente fórmula sencilla.

Si la rueda de entrada es una rueda con engranaje externo, entonces girando el vector de la velocidad $\vec{v}_C$ del punto de contacto C en un ángulo α contrario a la velocidad angular $\vec{\omega}_1$ de la rueda de entrada, encontraremos la posición de la normal $n - n$. Si la rueda de entrada posee engranaje interno entonces el vector de la velocidad $\vec{v}_C$ del punto de contacto C se debe girar en un ángulo α en la dirección de la velocidad angular $\vec{\omega}_1$ de la rueda de entrada.

Para realizar el cálculo de fuerzas de los mecanismos de ruedas dentadas no es necesario realizar el cambio de los pares superiores de IV clase por cadenas con pares de V clase; es suficiente estudiar el equilibrio de las ruedas, las cuales conforman sistemas estáticamente determinados. Un sistema estáticamente determinado de este tipo es el de la rueda 2 (Fig. 2.17), sobre el cual actúa un momento externo M_2 , la reacción $\vec{F}_{12}$ de la rueda de entrada 1 sobre la rueda de salida 2 y la reacción $\vec{F}_{02}$ del bastidor 0 sobre la rueda 2. Planteando la ecuación de momentos de todas las fuerzas que actúan sobre la rueda 2 con respecto al eje inmóvil B tenemos

$$F_{12}r_2 \cos \alpha - M_2 = 0 ,$$

de donde determinamos la reacción F_{12} :

$$F_{12} = \frac{M_2}{r_2 \cos \alpha} .$$

A partir de la ecuación de equilibrio de todas las fuerzas que actúan sobre la rueda 2,

$$\vec{F}_{12} + \vec{F}_{02} = 0$$

Determinamos la reacción F_{02} :

$$F_{02} = -F_{12} = -\frac{M_2}{r_2 \cos \alpha} .$$

Examinamos luego el equilibrio de la rueda de entrada 1 (para velocidad angular constante). De la ecuación de momentos de todas las fuerzas que actúan sobre la rueda 2, con respecto al punto A

$$-M_{com} + F_{21}r_1 \cos \alpha = 0$$

Encontramos el momento compensador M_{com}

$$M_{com} = F_{21}r_1 \cos \alpha .$$

Luego de la ecuación de equilibrio de todas las fuerzas que actúan sobre la rueda 1,

$$\vec{F}_{21} + \vec{F}_{01} = 0$$

Determinamos la reacción F_{01} del bastidor sobre la rueda 1. Tenemos

$$F_{01} = -F_{21} = -\frac{M_{com}}{r_1 \cos \alpha}.$$

BIBLIOGRAFÍA

Artobolevski I.I. Teoría de mecanismos y máquinas. Moscú. Nauka 1988
Kozhevnikov S.N. Mecanismos. Barcelona. Gustavo Gili S.A. 1975
Norton R.L. Diseño de Maquinaria. México D.F. McGraw-Hill 1995