

1. DESCRIPCIÓN DE LOS MECANISMOS

1.6.1. DETERMINACIÓN DE LAS ACELERACIONES DE LOS GRUPOS DE II CLASE POR EL MÉTODO DE LOS PLANOS.

La determinación de las aceleraciones de los grupos de II clase puede realizarse por el método de los planos de aceleraciones. Ya que los mecanismos de II clase están formados por la unión en serie de grupos, entonces es posible describir el método de los planos para los distintos tipos de grupos de II clase. De manera análoga a la construcción de los planos de posición y velocidades deben ser conocidas las aceleraciones de los elementos de los eslabones que “entran” en los pares cinemáticos con los cuales el grupo se une al mecanismo base. Se busca, entonces determinar las aceleraciones de determinados puntos del grupo y las aceleraciones angulares de los eslabones.

GRUPO DE II CLASE TIPO RRR

Miremos el grupo de II clase del primer tipo, el cual está formado por dos eslabones que conforman tres pares cinemáticos (Fig. 6.1)

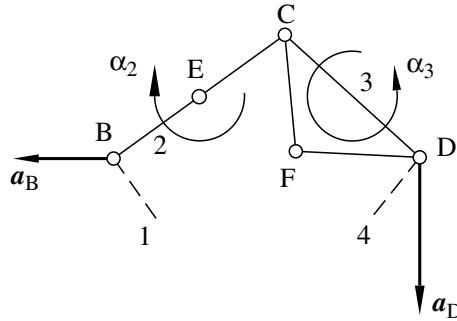


Fig. 6.1

Para determinar las aceleraciones de los grupos de II clase del tipo RRR deben ser conocidos los vectores \vec{a}_B y \vec{a}_D de las aceleraciones totales de los puntos B y D. Además se suponen ya construidos los planos de posición y velocidades del grupo, y por consiguiente se cuenta con que son conocidas las velocidades de todos los eslabones del grupo. Para determinar la aceleración \vec{a}_C del punto C, como se hizo para la determinación de la velocidad \vec{v}_C del punto C, estudiaremos el movimiento de dicho punto como un movimiento complejo: compuesto de un movimiento de traslación con las velocidades y aceleraciones de los puntos B y D; y de un movimiento giratorio relativo alrededor de estos mismos puntos. Entonces las ecuaciones vectoriales para la aceleración \vec{a}_C del punto C tendrán la siguiente forma:

$$\vec{a}_C = \vec{a}_B + \vec{a}_{CB}^n + \vec{a}_{CB}^t, \quad \vec{a}_C = \vec{a}_D + \vec{a}_{CD}^n + \vec{a}_{CD}^t \quad (6.1)$$

Donde \vec{a}_{CB}^n y \vec{a}_{CD}^n son los vectores de las aceleraciones normales relativas y \vec{a}_{CB}^t , \vec{a}_{CD}^t son los vectores de las aceleraciones tangenciales relativas del punto C con respecto a los puntos B y D. Resolviendo este sistema de ecuaciones obtenemos

$$\vec{a}_B + \vec{a}_{CB}^n + \vec{a}_{CB}^t = \vec{a}_D + \vec{a}_{CD}^n + \vec{a}_{CD}^t \quad (6.2)$$

En la ecuación (6.2) son conocidas la magnitud y la dirección de los vectores \vec{a}_B y \vec{a}_D de los puntos B y D. Los vectores de las aceleraciones normales relativas \vec{a}_{CB}^n y \vec{a}_{CD}^n pueden ser determinados. Las magnitudes de estas aceleraciones son

$$a_{CB}^n = \frac{v_{CB}^2}{l_2} = \omega_2^2 l_2, \quad a_{CD}^n = \frac{v_{CD}^2}{l_3} = \omega_3^2 l_3 \quad (6.3a)$$

Las velocidades v_{CB} , v_{CD} y las velocidades angulares ω_2 y ω_3 pueden ser determinadas con ayuda del plano de velocidades ya construido, las longitudes l_2 y l_3 de los eslabones 2 y 3 se determinan por el plano de posiciones. Sustituyendo en las expresiones anteriores las longitudes del plano de velocidades en la escala μ_v y del plano de posiciones en la escala μ_l , obtenemos

$$a_{CB}^n = \frac{\mu_v^2 (bc)^2}{\mu_l (BC)} = \mu_a (bn_2), \quad a_{CD}^n = \frac{\mu_v^2 (dc)^2}{\mu_l (DC)} = \mu_a (dn_3) \quad (6.3b)$$

Donde los segmentos bc y dc deben ser tomados del plano de velocidades, y μ_a es el factor de escala del plano de aceleraciones donde $1\text{mm} \rightarrow \mu_a \text{ m/s}^2$.

Como en el caso de las velocidades, para escoger el factor de escala μ_a la regla a seguir es la comodidad en los cálculos y en las construcciones gráficas. De manera que si se necesita determinar la magnitud real de una de las aceleraciones, de debe multiplicar la longitud del segmento correspondiente tomada del plano de aceleraciones (en milímetros) y multiplicarla por el factor de escala μ_a . El resultado se obtiene en $[\text{m/s}^2]$.

El vector de la aceleración \vec{a}_{CB}^n está dirigido del punto C hacia el punto B paralelo a BC, el vector de la aceleración \vec{a}_{CD}^n está dirigido del punto C hacia el punto D paralelo a CD. De manera que las aceleraciones angulares $\vec{\alpha}_{CB}^n$ y $\vec{\alpha}_{CD}^n$ son conocidas en magnitud y dirección.

Los vectores \vec{a}_{CB}^t y \vec{a}_{CD}^t son conocidos sólo en dirección. El primero está dirigido perpendicular a la dirección BC y el segundo perpendicular a la dirección CD. De esta manera en la ecuación (6.2) restan solamente por conocer las magnitudes de los vectores de las aceleraciones \vec{a}_{CB}^t y \vec{a}_{CD}^t , las cuales pueden ser determinadas por medio de la siguiente construcción gráfica.

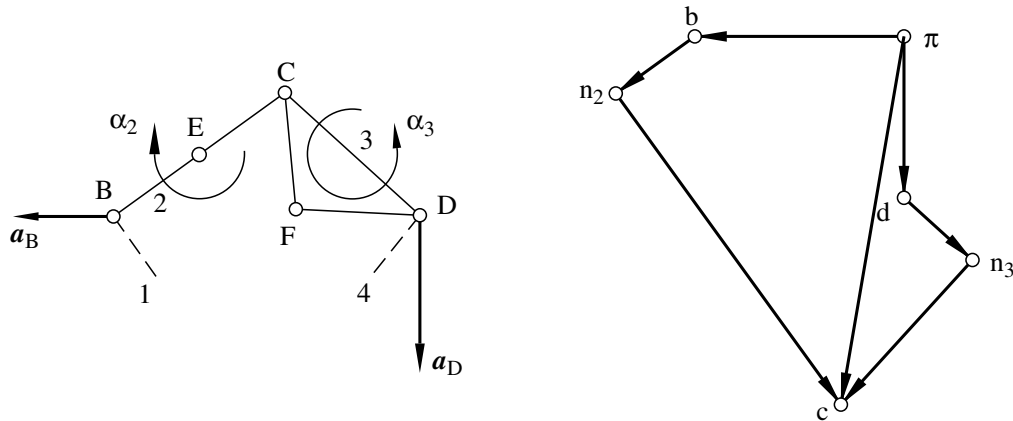


Fig. 6.2

Escogemos en calidad de polo del plano de aceleraciones el punto π , y trazamos partiendo de éste los segmentos πb y πd los cuales representan, en escala μ_a las aceleraciones de los puntos B y D. Acto seguido calculamos con ayuda de las ecuaciones (6.3ab), las magnitudes de los las aceleraciones \vec{a}_{CB}^n y \vec{a}_{CD}^n y trazamos, partiendo de los puntos b y d los segmentos bn_2 y dn_3 , los cuales representan en escala μ_a estas aceleraciones. Desde los puntos encontrados n_2 y n_3

trazamos rectas con la dirección de los vectores de las aceleraciones tangenciales \vec{a}_{CB}^t y \vec{a}_{CD}^t perpendiculares a BC y CD respectivamente. El punto de intersección de estas rectas nos muestra el final del vector \vec{a}_C de la aceleración total del punto C . Es decir

$$a_C = \mu_a \cdot \pi.$$

Las figuras $\pi b n_2 C$ y $\pi d n_3 C$ así construidas se llaman *planos de aceleraciones de los eslabones 2 y 3*, toda la figura $\pi b n_2 C n_3 d \pi$ se llama *plano de aceleraciones del grupo BCD*. El punto π se llama *polo del plano de aceleraciones*.

Uniendo los puntos b y d del plano con el punto c (Fig. 6.3), obtenemos los vectores de las aceleraciones totales relativas \vec{a}_{CB} y \vec{a}_{CD} . Tenemos

$$a_{CB} = \mu_a \cdot bC, \quad a_{CD} = \mu_a \cdot dC.$$

Las magnitudes de las aceleraciones angulares α_2 y α_3 de los eslabones BC y CD serán iguales a

$$|\alpha_2| = \frac{a_{CB}^t}{l_2}, \quad |\alpha_3| = \frac{a_{CD}^t}{l_3} \quad (6.4)$$

Sustituyendo en las igualdades (6.4) los segmentos correspondientes, tomados del plano de aceleraciones y del plano de posiciones obtenemos

$$|\alpha_2| = \frac{\mu_a \cdot n_2 C}{\mu_l \cdot BC}, \quad |\alpha_3| = \frac{\mu_a \cdot n_3 C}{\mu_l \cdot DC}$$

La razón $\frac{\mu_a}{\mu_l}$ posee unidades de rad/s^2 .

Las direcciones de las aceleraciones angulares α_2 y α_3 pueden ser determinadas de la siguiente manera. Aplicando mentalmente los vectores \vec{a}_{CB}^t y \vec{a}_{CD}^t en el punto C , vemos que la dirección de α_2 coincide con la dirección de giro de las manecillas del reloj, y que la dirección de α_3 es contraria a la de las manecillas del reloj.

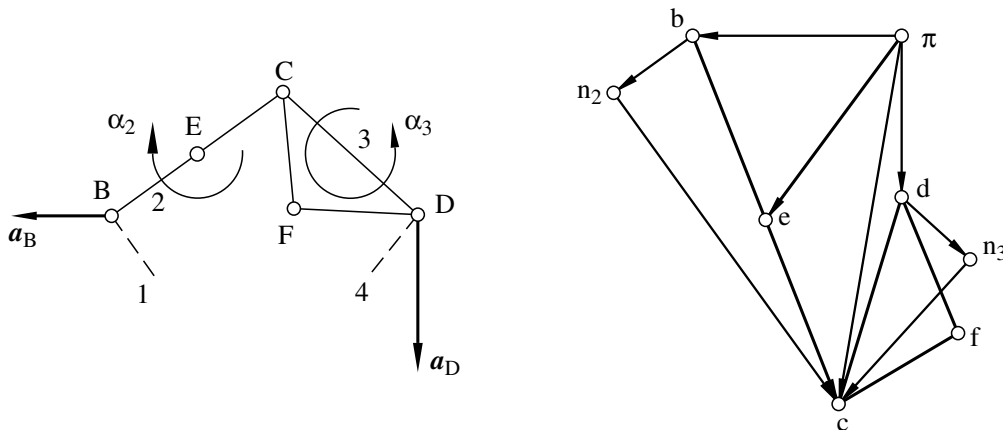


Fig. 6.3

Para determinar la aceleración de cualquier punto E , situado en el eje del eslabón BC (Fig. 6.3), podemos plantear la siguiente ecuación

$$\vec{a}_E = \vec{a}_B + \vec{a}_{EB}, \quad (6.5)$$

Del curso básico de mecánica sabemos que cuando un cuerpo realiza un movimiento rotatorio plano alrededor de un punto determinado Q (Fig. 6.4) las aceleraciones de todos los puntos del cuerpo son proporcionales al radio-vector que une cada punto con el centro de giro.

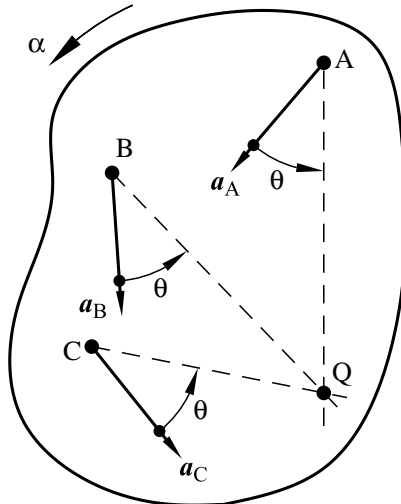


Fig. 6.4

La dirección de los vectores de las aceleraciones forma con estos radios-vectores un ángulo constante θ , el cual puede ser determinado a partir de la siguiente ecuación

$$\tan \theta = \frac{\alpha}{\omega^2}$$

Donde α es la aceleración angular del cuerpo y ω es la velocidad angular del mismo.

Ya que el movimiento relativo del eslabón 2 alrededor del punto B es un movimiento giratorio, entonces las aceleraciones relativas de todos los puntos del eslabón 2 formarán con los radios-vectores partientes del punto B un ángulo constante θ , que satisface la siguiente igualdad

$$\tan \theta = \frac{\alpha_{BC}}{\omega_{BC}^2}. \quad (6.6)$$

Por consiguiente la dirección del vector \vec{a}_{EB} deberá coincidir en el plano de aceleraciones con la dirección del vector \vec{a}_{CB} , es decir coincide con la dirección del segmento bc (Fig. 6.3). La magnitud del segmento be , el cual representa en el plano de aceleraciones a la aceleración \vec{a}_{EB} se determina de la condición de proporcionalidad de las aceleraciones con respecto a los radios-vectores, es decir

$$\frac{a_{EB}}{a_{CB}} = \frac{l_{EB}}{l_{CB}}. \quad (6.7)$$

Sustituyendo en la proporción (6.7) los correspondientes segmentos tomados del plano de aceleraciones, obtenemos

$$\frac{\mu_a be}{\mu_a bc} = \frac{l_{EB}}{l_{CB}},$$

De donde

$$be = bc \frac{l_{EB}}{l_{CB}} \quad (6.8)$$

De la fórmula (6.8) se deduce que para determinar el segmento del plano de aceleraciones que representa la aceleración relativa \vec{a}_{EB} es necesario dividir el segmento que representa a la aceleración relativa \vec{a}_{CB} en la misma relación en la que el punto E divide al eslabón 2 en el plano de posiciones. Después de trazar el segmento obtenido be en el plano y unir el punto e con el polo π , obtenemos el segmento πe , que representa la aceleración total del punto E en la escala μ_a . Es decir

$$a_E = \mu_a \cdot \pi e.$$

Para determinar la aceleración de un punto cualquiera F unido rígidamente al eslabón 3 (Fig. 6.3), se puede hacer uso de la regla de semejanza descrita. Para esto construimos sobre el segmento cd del plano de aceleraciones el triángulo cdf semejante al triángulo CDF . El triángulo así construido estará girado con respecto a su semejante del plano de posiciones, en el ángulo θ (Fórmula 6.6). Para comprobar la corrección de las figuras semejantes construidas podemos revisar la correspondencia en el orden de las letras en el esquema y en el plano de aceleraciones. Así, si el orden de las letras en el esquema siguiendo el contorno del eslabón en sentido horario es C, D y F , en el plano de aceleraciones este orden debe conservarse es decir c, d y f .

De manera igual que en el problema de las velocidades los vectores de las aceleraciones totales de todos los puntos de los eslabones tienen su comienzo en el punto π ó polo del plano de aceleraciones. Los vectores de las aceleraciones relativas unen entre si los finales de los vectores de las aceleraciones totales.

GRUPO DE II CLASE CON PAR PRISMÁTICO

Para determinar las aceleraciones de un grupo de II clase del tipo RRP actuamos de manera análoga a como lo hicimos en el problema de las velocidades, es decir presuponemos que son conocidas la aceleración \vec{a}_B del punto B (Fig. 6.5) y las aceleraciones de todos los puntos del eslabón 4. Por consiguiente es conocida su aceleración angular α_4 .

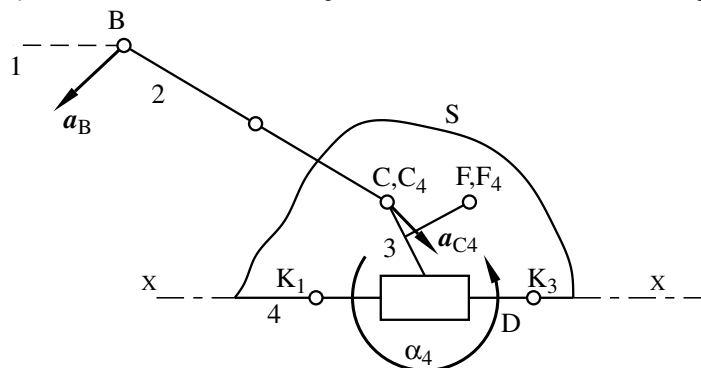


Fig. 6.5

Al eslabón 4 fijamos el plano S y encontramos en este plano el punto C_4 coincidente en esta posición con el punto C perteneciente al eslabón 3. Son conocidos los vectores \vec{a}_B y \vec{a}_{C_4} de las aceleraciones de los puntos B y C_4 .

La aceleración del punto C se determina a partir de las ecuaciones

$$\vec{a}_C = \vec{a}_B + \vec{a}_{CB}^n + \vec{a}_{CB}^t \quad \vec{a}_C = \vec{a}_{C_4} + \vec{a}_{CC_4}^C + \vec{a}_{CC_4}^r \quad (6.9)$$

La aceleración relativa $\vec{a}_{CC_4}^r$ es la aceleración del punto C con respecto al plano S perteneciente al eslabón 4. Como el eje de la directriz $x-x$ junto con el plano S realiza un movimiento complejo de giro y desplazamiento, además de la aceleración relativa $\vec{a}_{CC_4}^r$, en la segunda ecuación debe tenerse en cuenta la aceleración de Coriolis $\vec{a}_{CC_4}^C$. Resolviendo simultáneamente las ecuaciones (6.9) obtenemos

$$\vec{a}_B + \vec{a}_{CB}^n + \vec{a}_{CB}^t = \vec{a}_{C_4} + \vec{a}_{CC_4}^C + \vec{a}_{CC_4}^r, \quad (6.10)$$

En la ecuación (6.10) los vectores de las aceleraciones \vec{a}_B y \vec{a}_{C_4} son conocidos. La magnitud de la aceleración \vec{a}_{CB}^n se determina por la fórmula

$$a_{CB}^n = \frac{v_{CB}^2}{l_2} = \omega_2^2 l_2 = \frac{\mu_v^2 bc^2}{\mu_l BC} = \mu_a bn,$$

donde bc y BC son segmentos tomados del plano de velocidades y del plano de posiciones. μ_l , μ_v y μ_a son los factores de escala de longitudes, velocidades y aceleración respectivamente. El vector \vec{a}_{CB}^n está orientado paralelo a BC del punto C al punto B.

La magnitud de la aceleración de Coriolis $\vec{a}_{CC_4}^C$ es igual a

$$a_{CC_4}^C = 2|\omega_4|v_{CC_4} = 2|\omega_4|\mu_v(c_4c), \quad (6.11)$$

donde el segmento CC_4 debe ser tomado del plano de velocidades (Fig. 5.2b). La dirección del vector de la aceleración de Coriolis puede ser determinado usando métodos generales de Álgebra vectorial. Tenemos

$$\vec{a}_{CC_4}^C = 2\vec{\omega}_4 \times \vec{v}_{CC_4}, \quad (6.12)$$

De la igualdad (6.12) se deduce que el vector $\vec{a}_{CC_4}^C$ está en el plano de movimiento del mecanismo, y para determinar su dirección es suficiente girar el vector \vec{v}_{CC_4} (velocidad del punto C con respecto al plano S) en 90° en la dirección de giro determinada por el vector $\vec{\omega}_4$. Por lo tanto el vector $\vec{a}_{CC_4}^C$ es perpendicular al eje $x-x$ de la directriz, y la su magnitud se determina por la fórmula (6.11), sustituyendo en esta fórmula la velocidad angular ω_4 y la longitud del segmento CC_4 tomada del plano de velocidades, la cual representa a \vec{v}_{CC_4} en la escala μ_v .

De los vectores \vec{a}_{CB}^t y $\vec{a}_{CC_4}^r$ que entran en la ecuación (6.10) solamente se conoce su dirección. El primero \vec{a}_{CB}^t es perpendicular a BC y el segundo $\vec{a}_{CC_4}^r$ es paralelo al eje $x-x$ de la directriz del par de deslizamiento. De manera que en la ecuación (6.10) sólo se desconocen las magnitudes de las aceleraciones \vec{a}_{CB}^t y $\vec{a}_{CC_4}^r$. Para determinar estas direcciones construimos el plano de aceleraciones (Fig. 6.6)

Para ello escogemos un punto cualquiera π como polo del plano de aceleraciones y partiendo de él trazamos las aceleraciones ya conocidas de los puntos B y C_4 en forma de los segmentos πB y πC_4 , los cuales representan en la escala

escogida μ_a , las aceleraciones \vec{a}_B y \vec{a}_{C_4} . Luego se determinan las aceleraciones \vec{a}_{CB}^n y $\vec{a}_{CC_4}^C$, y las consignamos en la escala μ_a en forma de los segmentos bn y c_4k . Desde los puntos n y k trazamos dos rectas con la dirección de la aceleraciones \vec{a}_{CB}^t y $\vec{a}_{CC_4}^r$. La aceleración $\vec{a}_{CC_4}^r$ es paralela a $x-x$ y la aceleración $\vec{a}_{CC_4}^n$ perpendicular a BC . El punto C de intersección de estas dos direcciones nos muestra el final del vector \vec{a}_C de la aceleración total del punto C .

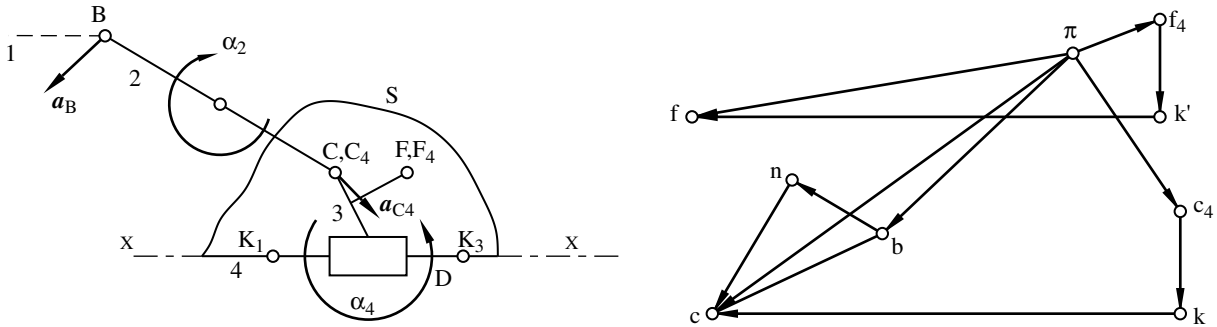


Fig. 6.6

La magnitud de la aceleración total \vec{a}_C del punto C es

$$a_C = \mu_a \cdot \pi c.$$

La magnitud de la aceleración angular α_2 del eslabón 2

$$|\alpha_2| = \frac{a_{CB}^t}{l_2} = \frac{\mu_a \cdot nc}{\mu_l \cdot BC}.$$

La dirección de esta aceleración se determina de la misma manera que en el grupo anteriormente estudiado. La aceleración angular α_3 del eslabón 3 es igual a $\alpha_3 = \alpha_4$, ya que el eslabón 3 "entra" con el eslabón 4 en un par de desplazamiento.

La aceleración de cualquier punto en la línea BC del eslabón 2 se determina con construcciones análogas a las que se realizaron en la solución del grupo del primer tipo, es decir utilizando el principio de semejanza de las figuras en el plano de aceleraciones y en el plano de posición del mecanismo.

La aceleración de un punto cualquiera perteneciente al eslabón 3, se puede determinar con la ecuación

$$\vec{a}_F = \vec{a}_{F_4} + \vec{a}_{FF_4}^C + \vec{a}_{FF_4}^r. \quad (6.13)$$

La aceleración \vec{a}_{F_4} del punto F_4 , perteneciente al plano S , es conocida, ya que las aceleraciones de todos los puntos del eslabón 4 son dadas. La magnitud de la aceleración $\vec{a}_{FF_4}^C$ es igual a

$$a_{FF_4}^C = 2|\omega_4|v_{FF_4} = 2|\omega_4|v_{CC_4} = a_{CC_4}^C,$$

ya que $\vec{v}_{FF_4} = \vec{v}_{CC_4}$ la aceleración $\vec{a}_{FF_4}^r = \vec{a}_{CC_4}^r$, ya que el movimiento del eslabón 3 con respecto al eslabón 4 es rectilíneo. Entonces la ecuación (6.13) se puede escribir así:

$$\vec{a}_F = \vec{a}_{F_4} + \vec{a}_{CC_4}^C + \vec{a}_{CC_4}^r, \quad (6.14)$$

Los vectores de la parte derecha de la ecuación (6.14) son conocidos; por consiguiente el vector \vec{a}_F se determina como la suma geométrica de estos vectores. Para determinar este vector desde el punto f_4 (Fig. 6.6) trazamos el segmento f_4k' , igual y paralelo al segmento C_4K . Luego desde el punto k' trazamos el segmento $k'f$ igual y paralelo al segmento kC . El segmento resultante πf representa en escala μ_a la aceleración total del punto F , es decir,

$$a_F = \mu_a \cdot \pi f.$$

1.6.2. ALGUNAS CONSIDERACIONES PRÁCTICAS SOBRE LA CONSTRUCCIÓN DE LOS PLANOS DE VELOCIDADES Y ACELERACIONES.

Los planos de velocidades y aceleraciones se construyen después de resolver el problema de las posiciones (construcción del plano de posición), la construcción de los planos se realiza para cada grupo estructural de los cuales está conformado el mecanismo. Inicialmente se construye el plan de velocidades (aceleraciones) del grupo que está unido con los elementos de sus pares cinemáticos extremos al eslabón primario y al bastidor, luego se construyen los planos de velocidad (aceleraciones) del segundo y resto de grupos, tomados en el mismo orden en el cual éstos se unen cuando conforman el mecanismo. Este orden está explícito en la fórmula estructural del mecanismo.

En la Fig. 6.7a se muestra el eslabón primario AB (grupo de I clase) dibujado a escala $\mu_l = \frac{l_{AB}}{AB} \frac{m}{mm}$

$$\left(\mu_l = \frac{l_{AB}}{AB} \frac{m}{UnCAD} \right).$$

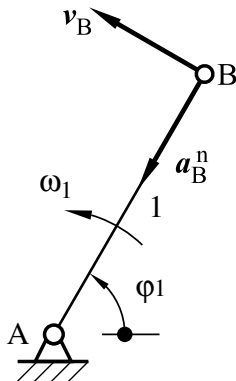


Fig. 6.7 a

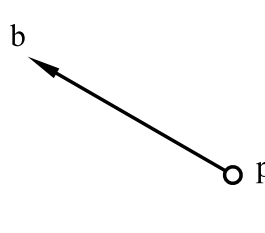


Fig. 6.7 b

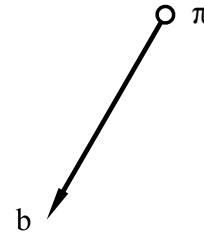


Fig. 6.7 c

El eslabón AB gira a velocidad angular constante ω_1 . La magnitud de la velocidad del punto B es $v_B = \omega_1(AB)\mu_l$, y su aceleración normal (igual a la aceleración total) $a_B^n = \omega_1^2(AB)\mu_l$. En el plano de velocidades la velocidad del punto B se representa con el segmento pb (Fig. 6.7 b), y la aceleración normal de este punto se representa con el segmento πb (Fig.6.7 c). Los factores de escala de los planos de velocidades y aceleraciones serán correspondientemente

$$\mu_v = \frac{\omega_1(AB)\mu_l \frac{m/s}{mm}}{pb}, \quad \left(\mu_v = \frac{\omega_1(AB)\mu_l \frac{m/s}{UnCAD}}{pb} \right),$$

$$\mu_a = \frac{\omega_1^2(AB)\mu_l \frac{m/s^2}{mm}}{\pi b}, \quad \left(\mu_a = \frac{\omega_1^2(AB)\mu_l \frac{m/s^2}{UnCAD}}{\pi b} \right),$$

Los planos de velocidad y aceleraciones en los cuales los segmentos pb y πb (los cuales representan la velocidad y la aceleración del punto B del eslabón conductor o primario), se toman arbitrariamente iguales en longitud al segmento AB (el cual representa en el plano de posiciones la longitud l_{AB} del mismo), se denominan *planos construidos en la escala de la manivela*. Las escalas de estos planos se calculan así:

$$\mu_v = \omega_1 \mu_l \frac{m/s}{mm}, \quad \left(\mu_v = \omega_1 \mu_l \frac{m/s}{UnCAD} \right),$$

$$\mu_a = \omega_1^2 \mu_l \frac{m/s^2}{mm}, \quad \mu_a = \omega_1^2 \mu_l \frac{m/s^2}{UnCAD}.$$

Cuando la longitud de los eslabones de un mecanismo son comparables con la longitud del eslabón inicial (no lo superan en longitud más de 6...8 veces), se aconseja construir los planos de velocidad y aceleraciones en la escala de la manivela, ya que esto simplifica los cálculos

Los problemas de construcción de planos de posición, velocidades y aceleraciones se deben resolver en el siguiente orden.

- 1) Se realiza el análisis estructural del mecanismo
Cálculo de la movilidad, identificación de grupos por clase, determinación de la clase del mecanismo. Se plantea la fórmula estructural del mismo.
- 2) Se escoge el eslabón primario (si esto no está determinado en las condiciones del problema)
Debe tenerse en cuenta que la selección del eslabón primario afecta la clasificación del mecanismo.
- 3) Se escoge el factor de escala para la construcción del plano de posición y se marcan en el dibujo las posiciones de los elementos inmóviles de los pares cinemáticos del mecanismo. Con la coordenada generalizada dada se construye la posición del eslabón primario.
- 4) Se construyen los planos de posición de cada grupo de Assur en el orden de formación del mecanismo.
- 5) Se construye el plano de velocidad del eslabón primario en la escala escogida, o se calcula dicha escala si se toma la decisión de construir el plano en la escala de la manivela.
- 6) Se construyen los planos de velocidades de cada grupo de Assur en el orden de formación del mecanismo.
- 7) Se construye el plano de aceleraciones del mecanismo.

Ejemplo: Construir el plano de velocidades y de aceleraciones del mecanismo de una máquina limadora (Fig. 6.8). Encontrar la velocidad y la aceleración del eslabón 5. Datos: $\varphi_1 = 300^\circ$, $l_{AB} = 0,05$ m, $l_{AC} = 0,12$ m, $l_{CD} = 0,200$ m, $H = 0,10$ m, $l_{DE} = 0,08$ m. Velocidad angular de la manivela AB constante e igual a $\omega_1 = 10$ s⁻¹.

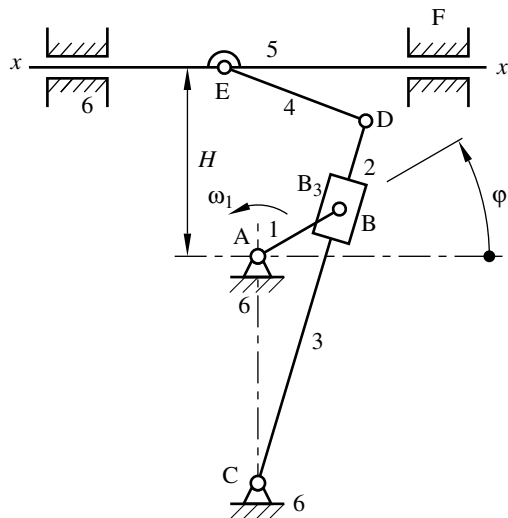


Fig. 6.8

Solución:

1) Análisis estructural del mecanismo

Número de eslabones $k = 6$

Número de eslabones móviles $n = 5$

Número de pares cinemáticos de V clase $p_V = 7$

Número de grados de libertad $W = 3n - 2p_V = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 7 = 1$.

El mecanismo se compone de la siguiente manera: Al eslabón conductor AB y al bastidor 6 se une un grupo de Assur de II clase del tercer tipo, compuesto por los eslabones 2 y 3. A este grupo y al bastidor se une otro grupo de II clase del segundo tipo, compuesto por los eslabones 4 y 5. El mecanismo es de II clase. La fórmula constructiva del mecanismo se puede escribir así: $I_1 \rightarrow II_{2,3} \rightarrow II_{4,5}$.

2) Construimos el plano de posición del mecanismo. Escogemos la longitud del segmento AB igual a 25 mm, por esto el coeficiente de escala del esquema será

$$\mu_l = \frac{l_{AB}}{AB} = \frac{0,05}{25} = 0,002 \frac{\text{m}}{\text{mm}}$$

La longitud de los demás segmentos del esquema será entonces:

$$AC = \frac{l_{AC}}{\mu_l} = \frac{0,12}{0,002} = 60\text{mm} \quad CD = \frac{l_{CD}}{\mu_l} = \frac{0,2}{0,002} = 100\text{mm}$$

$$h = \frac{H}{\mu_l} = \frac{0,10}{0,002} = 50\text{mm} \quad DE = \frac{l_{DE}}{\mu_l} = \frac{0,08}{0,002} = 40\text{mm}$$

Con las medidas obtenidas construimos el plano de posición del mecanismo (ver Fig. 6.9)

3) Construimos el plano de velocidades del mecanismo. Comenzamos con el grupo I_1 .

La magnitud de la velocidad v_B del punto B es

$$v_B = \omega_1 \cdot l_{AB} = 10 \cdot 0,05 = 0,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Escogemos un punto p como polo y trazamos el segmento pb , el cual representa la velocidad del punto B, perpendicular a AB y en correspondencia con la dirección de giro del eslabón AB . La longitud de pb la escogemos igual a $AB = 25$ mm. Es decir, construimos el plano de velocidades en "escala de manivela".

El coeficiente de escala del plano de velocidades será entonces

$$\mu_v = \frac{v_B}{pb} = \frac{\omega_1 (AB) \mu_l}{pb} = \omega_1 \cdot \mu_l = 10 \cdot 0,002 = 0,02 \frac{\text{ms}^{-1}}{\text{mm}}$$

4) Continuamos con el grupo de Assur, compuesto por los eslabones 2,3, ya que éste está unido directamente al eslabón primario y al bastidor. El plano de velocidades lo construimos de acuerdo a las siguientes ecuaciones vectoriales:

$$v_{B_3} = v_B + v_{B_3B} \quad v_{B_3} = v_C + v_{B_3C}$$

Donde

v_{B_3} es la velocidad del punto B_3 del eslabón 3, el cual está bajo el punto B;

v_B es la velocidad del punto B, de magnitud y dirección ya conocidas;

v_{B_3B} es la velocidad relativa del punto B_3 con respecto al punto B, dirigida paralela a la línea BC ;

v_C es la velocidad del punto C, y es igual a cero;

v_{B_3C} es la velocidad relativa del punto B con respecto al punto C al girar el eslabón 3, su magnitud es $v_{B_3C} = \omega_3 \cdot l_{B_3C}$ (por el momento es desconocida), y está dirigida perpendicular a BC

Construimos la solución de la primera ecuación vectorial, mostrada arriba. A través del punto b trazamos la dirección de la velocidad v_{B_3B} , una línea paralela a CB_3 . Pasamos a construir la solución de la segunda ecuación vectorial mostrada arriba. Se debe trazar el vector de la velocidad del punto C, pero como su magnitud es igual a cero, su final lo situamos en el polo p y desde el punto p trazamos la dirección de la velocidad v_{B_3C} : una línea perpendicular a CB . La intersección de esta línea con la trazada antes (paralela a CB), nos da el final del vector de la velocidad v_{B_3} en el punto p_3 . El punto d , final del vector de la velocidad del punto D, lo encontramos por semejanza según la siguiente relación:

$$\frac{cd}{cb_3} = \frac{CD}{CB_3},$$

$$cd = cb_3 \frac{CD}{CB_3} = 16,7 \frac{100}{40,33} = 41,4 \text{ mm}$$

Nota: Esta operación puede ser realizada también haciendo un escalamiento referenciado del eslabón con ayuda del CAD. (Ver práctica No.3)

Pasamos a la construcción del plano de velocidades del grupo 4,5. Este plano lo construimos según las siguientes ecuaciones:

$$v_E = v_D + v_{ED} \quad v_E = v_{E_6} + v_{EE_6}$$

Donde

v_E es la velocidad del punto E;

v_D es la velocidad del punto D (este vector ya está representado en el plano en forma del segmento pd)

v_{ED} es la velocidad relativa del punto E con respecto al punto D cuando el eslabón 4 gira su magnitud es $v_{ED} = \omega_4 \cdot l_{DE}$ (por el momento desconocida), y está dirigida perpendicular a la línea DE

v_{E_6} es la velocidad del punto E_6 del eslabón 6 (el punto E_6 coincide con el punto E), La magnitud es igual a cero, ya que el eslabón 6 es inmóvil)

v_{EE_6} es la velocidad relativa del punto E con respecto a E_6 , está dirigida paralela a la línea $x-x$

La construcción se resume a trazar a través de d (de acuerdo a la primera ecuación) una línea perpendicular a DE , es decir perpendicular a la velocidad v_{ED} ; y a trazar a través del punto p (de acuerdo a la segunda ecuación) una línea paralela $x-x$. El punto e , de intersección de estas líneas, es el final del vector de la velocidad v_E del punto E. Situamos en el polo los puntos c , e_6 , a y damos por terminada la construcción del plano de velocidades del mecanismo.

La velocidad del soporte (velocidad del punto E) es igual a

$$v_E = (pe)\mu_v = 44,55 \cdot 0,02 = 0,89 \text{ ms}^{-1}$$

5) Construimos el plano de aceleraciones. Comenzamos con el grupo I_1 .

La magnitud de la aceleración normal (es la misma total) del punto B es:

$$a_B^n = \omega_1^2 l_{AB} = 10^2 \cdot 0,05 = 5 \text{ ms}^{-2}$$

y está dirigida del punto B al punto A paralela a AB .

Escogemos un segmento $\pi b = AB = 25$ mm, el cual representará en el plano de aceleraciones a la aceleración a_B . Ya que $\pi b = AB$ significa que construiremos el plano de aceleraciones en la "escala de la manivela".

El factor de escala del plano de aceleraciones es:

$$\mu_a = \frac{a_B}{\pi b} = \frac{\omega_1^2 (AB) \mu_l}{\pi b} = \omega_1^2 \mu_l = 10^2 \cdot 0,002 = 0,2 \frac{\text{ms}^{-2}}{\text{mm}}.$$

El segmento así escogido πb lo trazamos partiendo del polo π .

6) Construimos el plano de aceleraciones del grupo 2,3. La construcción la realizaremos según las siguientes dos ecuaciones vectoriales

$$\mathbf{a}_{B_3} = \mathbf{a}_B + \mathbf{a}_{B_3B}^C + \mathbf{a}_{B_3B}^r, \quad \mathbf{a}_{B_3} = \mathbf{a}_C + \mathbf{a}_{B_3C}^n + \mathbf{a}_{B_3C}^t,$$

Donde

\mathbf{a}_{B_3} es la aceleración del punto B_3 el cual pertenece al eslabón 3 y coincide con el punto B del eslabón 1;

$\mathbf{a}_{B_3B}^C$ es la aceleración de Coriolis del movimiento del punto B_3 con relación al eslabón 2, su magnitud es

$$\mathbf{a}_{B_3B}^C = 2|\boldsymbol{\omega}_2|v_{BB_3} = 2 \frac{v_{B_3C}}{l_{BC}} v_{BB_3}$$

(ya que $\boldsymbol{\omega}_2 = \boldsymbol{\omega}_3$ y $\boldsymbol{\omega}_3 = \frac{v_{B_3C}}{l_{BC}}$) y tiene la dirección del vector de la velocidad relativa v_{BB_3} girada en 90° en la dirección de

la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}_2$ del eslabón que realiza el movimiento de traslación (movimiento del eslabón 2);

$\mathbf{a}_{B_3B}^r$ es la aceleración relativa del punto B_3 con respecto al punto B, dirigida paralela a CB ;

\mathbf{a}_C es la aceleración total del punto C (es igual a cero);

$\mathbf{a}_{B_3C}^n$ es la aceleración normal del punto B_3 del giro del eslabón 3 con respecto al punto C, su magnitud es igual a

$$a_{B_3C}^n = \frac{v_{B_3C}^2}{l_{B_3C}}$$

y está dirigida paralela a la línea CB_3 del punto B_3 al punto C;

$\mathbf{a}_{B_3C}^t$ es la aceleración tangencial del punto B_3 del mismo movimiento del eslabón 3, su magnitud es

$$a_{B_3C}^t = \alpha_3 l_{B_3C}$$

y por el momento nos es desconocida, esta dirigida perpendicular a CB_3 .

Construimos la solución de la ecuación vectorial mostrada arriba, al segmento πb le agregamos el segmento bk que representa el vector de la aceleración de Coriolis. La longitud la hallamos por la formula

$$bk = \frac{a_{B_3B}^C}{\mu_a} = \frac{2v_{B_3C} \cdot v_{B_3B}}{l_{B_3C} \mu_a} = \frac{2(b_3c)(bb_3)\mu_v^2}{(B_3C)\mu_l \mu_a} = \frac{2 \cdot 16,7 \cdot 18,6}{40,33} = 15,4 \text{ mm}$$

los segmentos $b_3c = 16,7$ mm y $bb_3 = 18,6$ mm fueron tomados del plano de velocidades, y el segmento $B_3C = 40,33$ mm del plano de posición.

A través del punto k trazamos la dirección de la aceleración $\mathbf{a}_{B_3B}^r$, una línea paralela a CB .

Pasamos a resolver la segunda ecuación vectorial. Marcamos el punto c en el mismo punto π , ya que $a_C = 0$, desde el punto π trazamos el segmento πn_{B_3C} , el cual representa la aceleración normal $\mathbf{a}_{B_3C}^n$, su longitud es

$$\pi n_{B_3C} = \frac{v_{B_3C}^2}{l_{B_3C} \mu_a} = \frac{(pb_3)^2 \mu_v^2}{(B_3C) \mu_l \mu_a} = \frac{16,7^2}{40,33} = 6,92 \text{ mm}$$

Luego a través del punto πn_{B_3C} trazamos la dirección del vector de la aceleración $\mathbf{a}_{B_3C}^t$, una línea perpendicular a CB hasta la intersección con la línea trazada antes a través del punto k (paralela a CB). El punto de intersección b_3 nos muestra el final del vector de la aceleración \mathbf{a}_{B_3} .

El final del vector de la aceleración de la junta D (punto d) lo encontramos por la regla de semejanza a partir de la relación

$$\pi d = \pi b_3 \frac{CD}{CB_3} = 34,7 \frac{100}{40,33} = 86,04 \text{ mm}$$

Nota: Esta operación puede ser realizada también haciendo un escalamiento referenciado del eslabón con ayuda del CAD.

7) Pasamos a la construcción del plano de aceleraciones del grupo 4,5 según las siguientes ecuaciones

8)

$$\mathbf{a}_E = \mathbf{a}_D + \mathbf{a}_{ED}^n + \mathbf{a}_{ED}^t, \quad \mathbf{a}_E = \mathbf{a}_{E_6} + \mathbf{a}_{EE_6}^C + \mathbf{a}_{EE_6}^r.$$

donde

\mathbf{a}_E es la aceleración del punto E;

\mathbf{a}_D es la aceleración del punto D (se determina con el segmento πd hallado antes);

$$a_D = \pi d \cdot \mu_a = 86,04 \cdot 0,2 = 17,2 \text{ ms}^{-2};$$

$a_{ED}^n = \frac{v_{ED}^2}{l_{ED}}$ es la aceleración normal del punto E cuando el eslabón 4 gira con respecto a D (está dirigida paralela a la línea ED desde el punto E al punto D);

$a_{ED}^t = \alpha_4 l_{ED}$ es la aceleración tangencial del mismo punto E del movimiento de 4 con respecto a D (está dirigida perpendicular a la línea ED);

\mathbf{a}_{E_6} es la aceleración del punto E_6 el cual pertenece al eslabón 6 (bastidor) y coincide con el punto E (es igual a cero);

$\mathbf{a}_{EE_6}^C$ es la aceleración de Coriolis del punto E del movimiento de éste con relación al bastidor (punto E_6), (es igual a cero);

$\mathbf{a}_{EE_6}^r$ es la aceleración relativa del punto E con relación al bastidor (punto E_6), (está dirigida paralela a $x - x$)

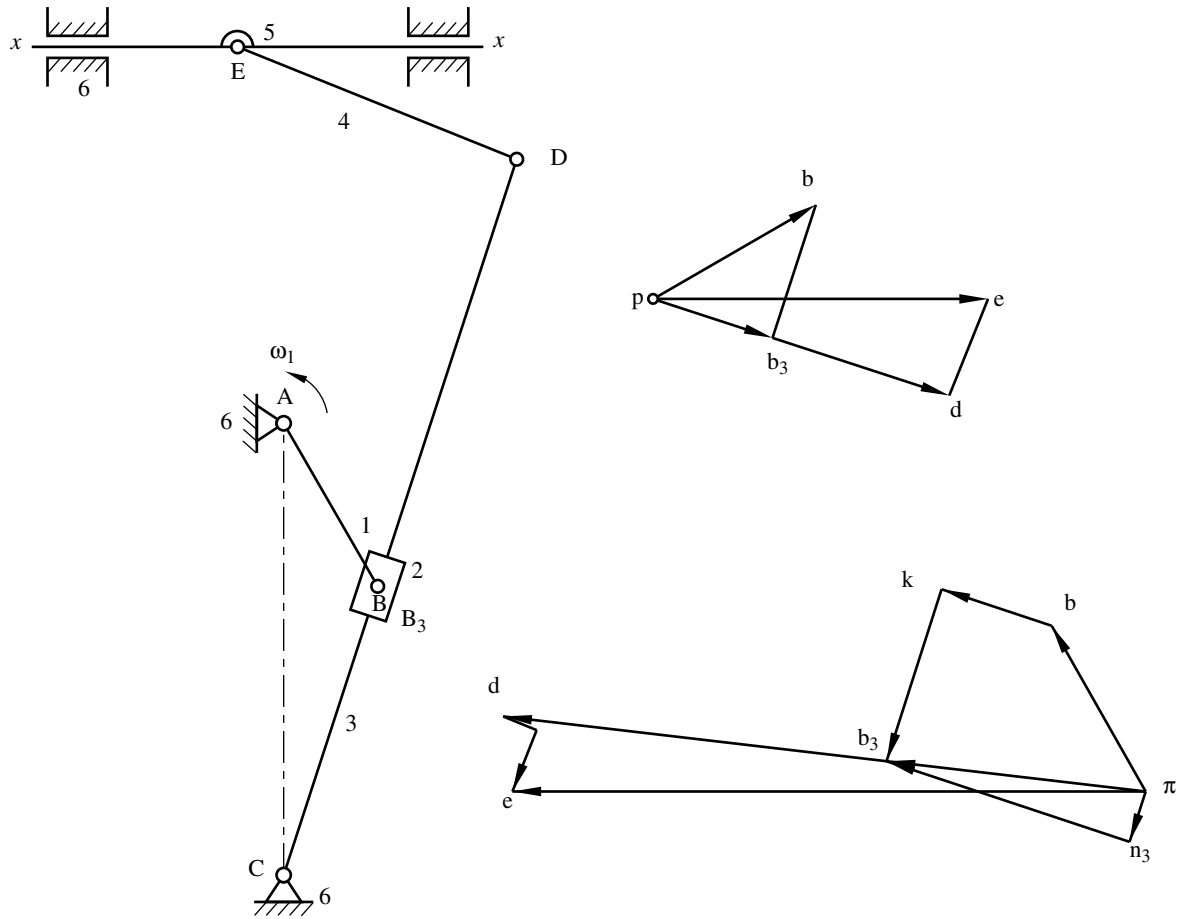
En concordancia con la primera ecuación vectorial desde el punto d trazamos el segmento dn_{ED} , el cual representa la aceleración normal \mathbf{a}_{ED}^n . Su longitud es igual a

$$dn_{ED} = \frac{v_{ED}^2}{l_{ED} \mu_a} = \frac{(ed)^2 \mu_v^2}{(ED) \mu_l \mu_a} = \frac{13,84^2}{40} = 4,8 \text{ mm}.$$

Luego a través del punto n_{ED} trazamos la dirección de la aceleración \mathbf{a}_{ED}^t línea perpendicular a DE y pasamos a las construcciones correspondientes a la segunda ecuación vectorial mostrada arriba. En el punto π consignamos los puntos e_6 y k' , ya que las magnitudes de las aceleraciones \mathbf{a}_{E_6} y $\mathbf{a}_{EE_6}^C$ son iguales a cero. Desde el punto π trazamos la dirección de la aceleración $\mathbf{a}_{EE_6}^r$ (línea paralela a $x - x$) hasta la intersección con la línea antes trazada desde el punto n_{ED} . El punto de intersección e es el final del vector de la aceleración del punto E, es decir la aceleración \mathbf{a}_E . Situamos en el polo del plano el punto a y con esto finalizamos la construcción del plano de aceleraciones del mecanismo.

La aceleración buscada del soporte (punto E) será igual

$$a_E = (\pi e)\mu_a = 84,25 \cdot 0,2 = 16,85 \text{ ms}^{-2}$$



EJERCICIOS

1. Determinar las velocidades y aceleraciones angulares de todos los eslabones y la velocidad y aceleración del punto C para la posición mostrada del mecanismo de cuatro barras. Datos: velocidad angular de la manivela AB constante e igual a $\omega_1 = 20 \text{ s}^{-1}$, $l_{AB} = l_{BC} = l_{CD} = 400 \text{ mm}$, los segmentos AB y BC están en una misma línea, el ángulo $\angle BCD = 90^\circ$.
2. Encontrar la velocidad y la aceleración del punto D del eslabón 2 y las velocidades y aceleraciones angulares de todos los eslabones para la posición mostrada del mecanismo de biela deslizador. Datos: velocidad angular de la manivela AB constante e igual a $\omega_1 = 20 \text{ s}^{-1}$, $l_{AB} = 100 \text{ mm}$, $l_{BC} = 200 \text{ mm}$, $l_{CD} = 100 \text{ mm}$, $\angle CAB = \angle CDB = 90^\circ$.

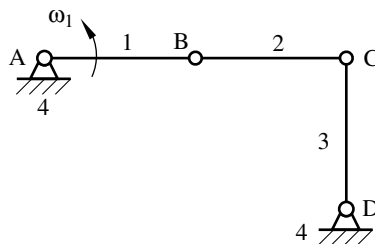


Fig. P.1

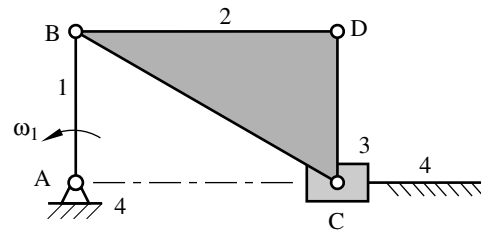


Fig. P.2

3. Determinar la velocidad y la aceleración del eslabón 3 para la posición dada del mecanismo de obtener el seno, mostrar también cómo se mueve en esta posición el eslabón 3 (con aceleración o desaceleración). Datos: velocidad angular de la manivela AB constante e igual a $\omega_1 = 20 \text{ s}^{-1}$, $l_{AB} = 100 \text{ mm}$, $\phi_1 = 45^\circ$.

4. Determinar las velocidades y aceleraciones angulares de todos los eslabones para el mecanismo de colisa. Datos: velocidad angular de la manivela (eslabón 1) constante e igual a $\omega_1 = 10 \text{ s}^{-1}$, $l_{AB} = l_{AC} = 200 \text{ mm}$, $\angle BAC = 90^\circ$.

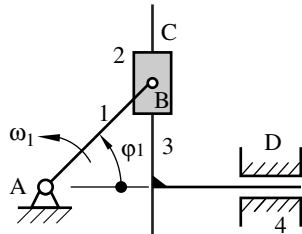


Fig. P.3

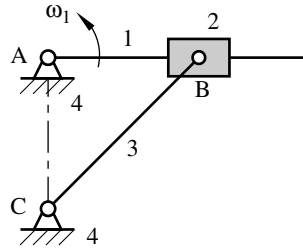


Fig. P.4

5. Determinar la velocidad angular ω_2 del seguidor 2 del mecanismo de leva mostrado. Datos: velocidad angular de la leva (eslabón 1) constante e igual a $\omega_1 = 20 \text{ s}^{-1}$, $R = 50 \text{ mm}$, $\angle ACB = 60^\circ$, $\angle CAO = 90^\circ$.
6. Encontrar la velocidad del seguidor 2 en el mecanismo de obtener la secante. Datos: velocidad angular del eslabón 1 constante e igual a $\omega_1 = 20 \text{ s}^{-1}$, $l_{AB} = 50 \text{ mm}$, $\phi_1 = 60^\circ$.

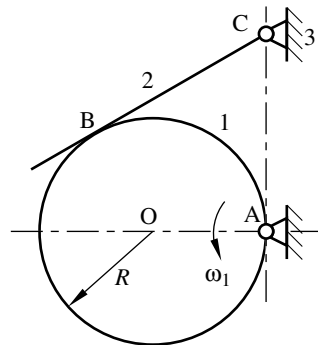


Fig. P.5

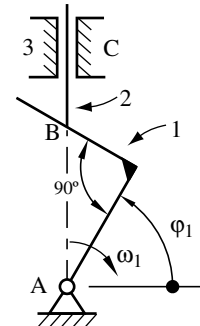
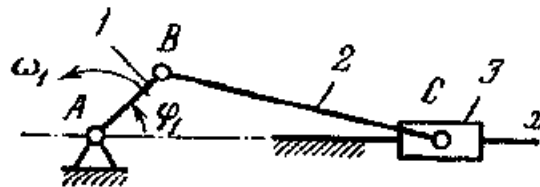


Fig. P.6

6. Encontrar la velocidad y aceleración angulares del eslabón BC (eslabón 2) del mecanismo de biela deslizador. Datos: $l_{AB} = 60 \text{ mm}$, $l_{BC} = 180 \text{ mm}$, velocidad angular de la manivela AB (eslabón 1) constante e igual a $\omega_1 = 100 \text{ s}^{-1}$. Para $\phi_1 = 120^\circ$.



7. Encontrar la velocidad y aceleraciones absolutas del punto D_2 del deslizador 2 del mecanismo de una bomba rotativa. Datos: $l_{AC} = 50 \text{ mm}$, $l_{BC} = 70 \text{ mm}$, $l_{BD_2} = 16 \text{ mm}$, velocidad angular de la colisa (eslabón 1) constante e igual a $\omega_1 = 100 \text{ s}^{-1}$. Para $\phi_1 = 30^\circ$.
8. Encontrar la velocidad y aceleración absolutas del punto B_3 del eslabón 3, coincidente con el punto B, del mecanismo para obtener el seno. Datos: $l_{AB} = 50 \text{ mm}$, velocidad angular de la manivela AB (eslabón 1) constante e igual a $\omega_1 = 10 \text{ s}^{-1}$. Para $\phi_1 = 45^\circ$.

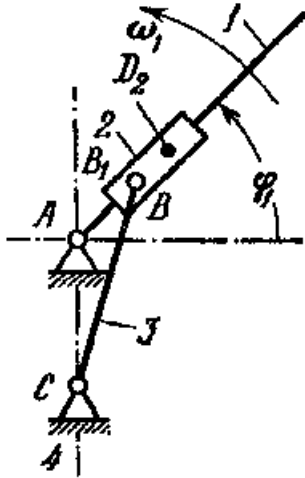


Fig P.8

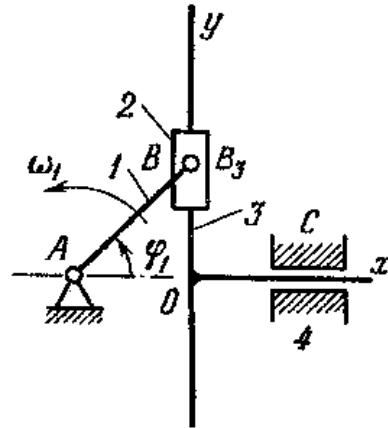


Fig P.9

9. En el mecanismo de obtener la tangente, encontrar la velocidad y aceleración absolutas del punto B_3 (eslabón 3). Datos: $H = 250$ mm, velocidad angular de la colisa (eslabón 1) constante e igual $\omega_1 = 5$ s⁻¹. Para $\varphi_1 = 30^\circ$.
10. Encontrar la velocidad y la aceleración del seguidor (eslabón 2) de un mecanismo de leva, en el cual ésta es un disco que gira excéntricamente. Datos: $R = 50$ mm, $l_{AO} = 30$ mm, velocidad angular de la leva (eslabón 1) constante e igual $\omega_1 = 20$ s⁻¹. Para $\varphi_1 = 135^\circ$.
Recomendación: Construir el mecanismo equivalente.

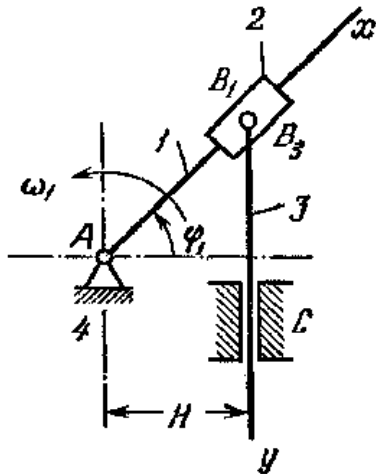


Fig. P 10

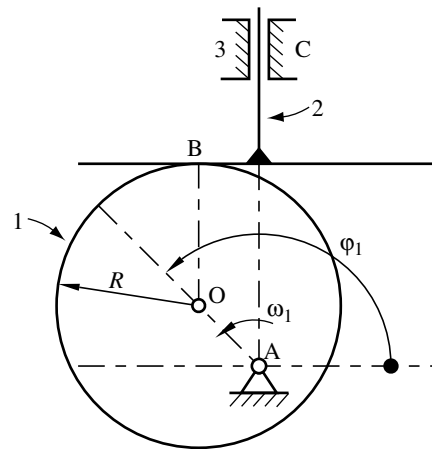


Fig P.11

11. Hallar la velocidad y aceleración absolutas del pistón 5 (velocidad y aceleración del punto E) de un motor de combustión interna. Datos: $l_{AB} = 0,06$ m, $l_{BC} = l_{DE} = 0,180$ m, $l_{BD} = 0,06$ m, $\angle DBC = \beta = 60^\circ$, $\delta = 60^\circ$, velocidad angular de la manivela AB (eslabón 1) constante e igual $\omega_1 = 200$ s⁻¹. Para $\varphi_1 = 45^\circ$.
12. Encontrar la velocidad relativa v_{EC} del punto E con respecto a C , en el mecanismo de un motor de vapor. Datos: $l_{AB} = 180$ mm, $l_{BC} = 760$ mm, $l_{BD} = 950$ mm, $l_{CD} = 250$ mm, $l_{ED} = 240$ mm, $H = 80$ mm, velocidad angular de la manivela AB (eslabón 1) constante e igual $\omega_1 = 20$ s⁻¹. Para $\varphi_1 = 60^\circ$.

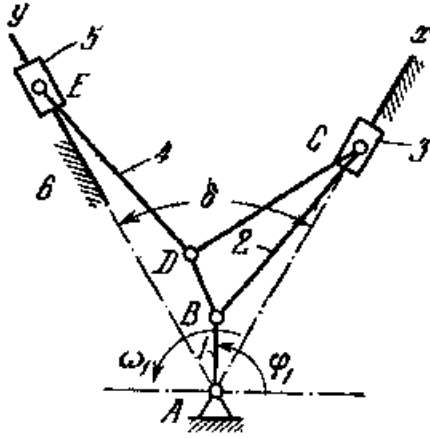


Fig P. 12

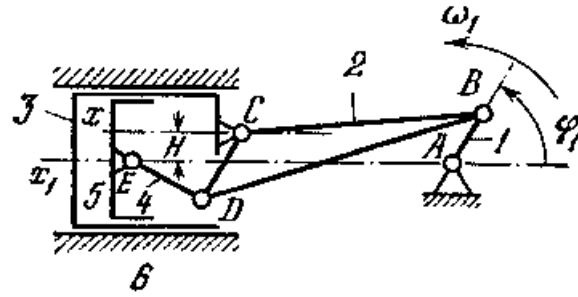


Fig P. 13

Respuestas:

- 1) $\omega_1 = 20 \text{ s}^{-1}$, $\omega_2 = 5 \text{ s}^{-1}$, $\omega_3 = 0$, $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 125 \text{ s}^{-2}$, $v_C = 0$, $a_C = 50 \text{ ms}^{-2}$.
- 2) $v_D = 2 \text{ ms}^{-1}$, $a_D = 0$, $\omega_2 = 0$, $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 231 \text{ s}^{-2}$.
- 3) $v_{B3} = \sqrt{2} \text{ ms}^{-1}$, $a_C = 20 \sqrt{2} \text{ ms}^{-2}$, movimiento acelerado.
- 4) $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 10 \text{ s}^{-1}$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 100 \text{ s}^{-2}$.
- 5) $\omega_2 = 10 \text{ s}^{-1}$.
- 6) $v_D = 0,58 \text{ ms}^{-1}$.

BIBLIOGRAFÍA

- Artobolevski I.I. Teoría de mecanismos y máquinas. Moscú. Nauka 1988
 Kozhevnikov S.N. Mecanismos. Barcelona. Gustavo Gili S.A. 1975
 Norton R.L. Diseño de Maquinaria. México D.F. McGraw-Hill 1995