1. DESCRIPCIÓN DE LOS MECANISMOS

1.5. DETERMINACIÓN DE LAS VELOCIDADES DE LOS GRUPOS DE II CLASE POR EL MÉTODO DE LOS PLANOS.

La determinación de las velocidades de los grupos de II clase puede realizarse por el método de los planos de velocidades. Ya que los mecanismos de II clase están formados por la unión en serie de grupos, entonces es posible describir el método de los planos para los distintos tipos de grupos de II clase. De manera análoga a la construcción de los planos de posición deben ser conocidas las velocidades de los elementos de los eslabones que "entran" en los pares cinemáticos con los cuales el grupo se une al mecanismo base. Se busca, entonces determinar las velocidades de determinados puntos del grupo y las velocidades angulares de los eslabones.

Miremos el grupo de II clase del primer tipo, el cual está formado por dos eslabones que conforman tres pares cinemáticos (Fig. 5.1)

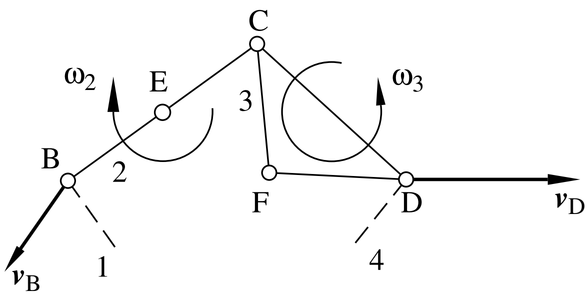

Fig. 5.1 *a*

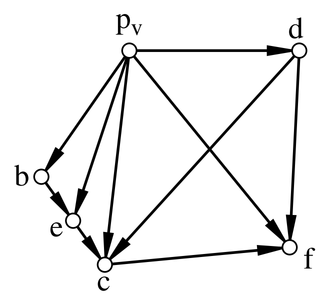

Fig. 5.1 *b*

De manera análoga al problema de las posiciones del grupo aquí son conocidos los vectores de las velocidades de los puntos *B* y *D* de los elementos extremos del grupo, con los cuales los eslabones 2 y 3 "entran" en pares cinemáticos con los eslabones 1 y 4 del mecanismo base (velocidades $\vec{v}_B$ y $\vec{v}_D$). Se pide determinar el vector $\vec{v}_C$ de la velocidad del punto *C*.

El desplazamiento total complejo del punto *C* puede ser siempre descompuesto en un movimiento de traslación con la velocidad del punto *B* o del punto *D* y en una rotación relativa alrededor del punto *B* o del punto *D*, correspondientemente. Entonces las ecuaciones vectoriales para la velocidad $\vec{v}_C$ del punto *C* tendrán la siguiente forma:

$$\vec{v}_C = \vec{v}_B + \vec{v}_{CB} \qquad\qquad \vec{v}_C = \vec{v}_D + \vec{v}_{CD} \tag{5.1}$$

Donde $\vec{v}_C$, $\vec{v}_B$ y $\vec{v}_D$ son los vectores de las velocidades absolutas de los puntos *C, B* y *D* correspondientemente. $\vec{v}_{CB}$ y $\vec{v}_{CD}$ son los vectores de las velocidades relativas del punto *C* con respecto a los puntos *B* y *D*.

De las ecuaciones (5.1) obtenemos

$$\vec{v}_B + \vec{v}_{CB} = \vec{v}_D + \vec{v}_{CD} \tag{5.2}$$

En las ecuaciones (5.1) son conocidas la magnitud y la dirección de los vectores $\vec{v}_B$ y $\vec{v}_D$. De los vectores $\vec{v}_{CB}$ y $\vec{v}_{CD}$ sólo se conoce su dirección. El vector $\vec{v}_{CB}$ de la velocidad relativa de *C* con respecto al punto *B* está dirigido perpendicularmente a *BC*, y el vector $\vec{v}_{CD}$ de la velocidad relativa de *C* con respecto al punto *D* está dirigido perpendicularmente a *DC.*

De esta manera en la ecuación (5.2) son desconocidas solamente las magnitudes de los vectores de las velocidades $\vec{v}_{CB}$ y $\vec{v}_{CD}$, las cuales pueden ser determinadas mediante la construcción del plano de velocidades (Fig. 5.1 *b)*.

Escogemos en calidad de *polo* del plano de velocidades un punto cualquiera *p*, trazamos partiendo de éste los segmentos *pb* y *pd*, los cuales representan las velocidades $\vec{v}_B$ y $\vec{v}_D$ de los puntos *B* y *D* en cualquier escala arbitrariamente escogida μ_v de manera que 1 mm $\rightarrow$ μ_v m/s. Para escoger el factor de escala μ_v la única regla a seguir es la comodidad de cálculos y construcciones en el dibujo.

Para obtener las magnitudes verdaderas de las velocidades de los puntos *B* y *D* tomamos las longitudes de los segmentos *pb* y *pd* medidas en milímetros y las multiplicamos por el factor de escala μ_v escogido, el cual muestra cuantas unidades de velocidad corresponden a 1 mm del segmento correspondiente. Obtenemos la respuesta en m/s.

$$v_B = \mu_v \cdot pb, \qquad\qquad v_D = \mu_v \cdot pd.$$

Después de trazar los segmentos *pb* y *pd*, trazamos a través del punto *b* y *d* rectas con las direcciones de los vectores de las velocidades relativas $\vec{v}_{CB}$ y $\vec{v}_{CD}$, perpendiculares a *BC* y *DC*. El punto *c* de intersección de estas dos rectas determina el final del vector $\vec{v}_C$ de la velocidad absoluta del punto *C* del grupo. La velocidad $\vec{v}_C$ de acuerdo a las ecuaciones (5.1) está representado por el segmento *pc*, el cual une el punto *p* con el punto hallado *c*. La magnitud de esta velocidad será igual a

$$v_C = \mu_v \cdot pc.$$

Los segmentos *bc* y *dc* representan las velocidades relativas $\vec{v}_{CB}$ y $\vec{v}_{CD}$ en la misma escala, es decir

$$v_{CB} = \mu_v \cdot bc, \qquad\qquad v_{CD} = \mu_v \cdot dc.$$

Las flechas de los vectores en el plano de velocidades deben ser puestas de tal manera que satisfagan las ecuaciones (5.1)

Los triángulos *pbc* y *pdc* se llaman *planos de velocidades* de los eslabones 2 y 3, y la figura *pbcdp* se llama *plano de velocidades del grupo BCD*. El punto *p* del plano se llama *polo del plano de velocidades*.

Por medio del plano de velocidades es posible determinar las velocidades angulares ω_2 y ω_3 de los eslabones 2 y 3. Las magnitudes de estas velocidades se determinan con las igualdades

$$|\omega_2| = \frac{v_{CB}}{l_2} \qquad\qquad |\omega_3| = \frac{v_{CD}}{l_3} \tag{5.3}$$

Donde l_2 y l_3 son las longitudes *BC* y *DC* de los eslabones 2 y 3.

Si el plano de posición del grupo *BCD* está construida con un factor de escala μ_l y reemplazamos en las ecuaciones (5.3) las magnitudes de las velocidades v_{CB} y v_{CD}, expresadas a través del factor de escala μ_v como los segmentos correspondientes del plano de velocidades y las longitudes de los eslabones *BC* y *DC*, expresadas a través del factor de escala μ_l, obtenemos:

$$|\omega_2| = \frac{\mu_v \cdot bc}{\mu_l \cdot BC}, \qquad |\omega_3| = \frac{\mu_v \cdot dc}{\mu_l \cdot DC}$$

La razón $\frac{\mu_v}{\mu_l}$ posee unidades de s^{-1}.

Las direcciones de las velocidades angulares ω_2 y ω_3 pueden ser determinadas de la siguiente manera. Aplicando mentalmente los vectores $\vec{v}_{CB}$ y $\vec{v}_{CD}$ en el punto *C*, vemos que el giro del eslabón 2 ocurre en dirección de las manecillas del reloj y que el giro del eslabón 3 en la dirección contraria. Fig. 5.1.

Para determinar la velocidad de cualquier punto *E* situado en el eje del eslabón *BC* podemos escribir la siguiente ecuación vectorial

$$\vec{v}_E = \vec{v}_B + \vec{v}_{EB}, \tag{5.4}$$

Atendiendo esta ecuación desde el punto *b* del plano de velocidades trazamos la dirección del vector $\vec{v}_{EB}$ de la velocidad relativa del punto *E* alrededor del punto *B.* Ya que las velocidades relativas de todos los puntos situados sobre el eje *BC* del eslabón 2 son perpendiculares al eje *BC*, es evidente que la dirección del vector de la velocidad $\vec{v}_{EB}$ coincide en dirección con la dirección del vector de la velocidad $\vec{v}_{CB}$, es decir, el segmento *be,* del plano de velocidades, que determina la velocidad $\vec{v}_{EB}$, coincide en dirección con el segmento *bc* . El tamaño del segmento que determina a $\vec{v}_{EB}$ se halla a partir de las siguientes expresiones:

Tenemos

$$v_{CB} = \omega_2 \cdot l_{BC} \tag{5.5}$$

y

$$v_{EB} = \omega_2 \cdot l_{BE}. \tag{5.6}$$

Dividiendo miembro a miembro (5.6) y (5.5) obtenemos

$$\frac{v_{EB}}{v_{CB}} = \frac{l_{BE}}{l_{BC}}. \tag{5.7}$$

De la ecuación (5.7) se puede deducir que las velocidades relativas de los puntos *E* y *C* con respecto al punto *B* son directamente proporcionales a las distancias de estos puntos al punto *B.* Sustituyendo las velocidades por sus segmentos correspondientes del plano de velocidades

$$\frac{\mu_v \cdot be}{\mu_v \cdot bc} = \frac{l_{BE}}{l_{BC}},$$

de donde

$$be = bc \cdot \frac{l_{BE}}{l_{BC}}. \tag{5.8}$$

Es decir, para determinar la longitud del segmento del plano de velocidades que refleja la velocidad relativa $\vec{v}_{EB}$, es necesario dividir el segmento *bc*, el cual representa en el plano la velocidad relativa $\vec{v}_{BC}$, en la misma proporción en la cual el punto *E* divide al eslabón 2 en el esquema cinemático del grupo. (Fig. 5.1).

Después de determinar el segmento resultante *be* en el plano de velocidades y unirlo con el polo del plano *p*, obtenemos el segmento *pe*. El cual representa, en la escala μ_v la velocidad $\vec{v}_E$ del desplazamiento total del punto *E*. Es decir,

$$v_E = \mu_v \cdot pe.$$

Para determinar la velocidad de un punto cualquiera *F* del eslabón 3 planteamos las siguientes ecuaciones vectoriales

$$\vec{v}_F = \vec{v}_D + \vec{v}_{FD} \qquad\qquad \vec{v}_F = \vec{v}_C + \vec{v}_{FC} \tag{5.9}$$

de las ecuaciones (5.9) obtenemos

$$\vec{v}_D + \vec{v}_{FD} = \vec{v}_C + \vec{v}_{FC}.$$

Los vectores $\vec{v}_D$ y $\vec{v}_C$ de las velocidades de los punto *D* y *C* son conocidos en magnitud y dirección, pero de los vectores $\vec{v}_{FD}$ y $\vec{v}_{FC}$ se conoce solamente sus direcciones. El vector $\vec{v}_{FD}$ es perpendicular al segmento *FD* y el vector $\vec{v}_{FC}$ es perpendicular a *FC*. Desde el punto *d* del plano de velocidades trazamos una recta perpendicular a *FD* y a través del punto *c* trazamos otra recta perpendicular a *FC*, el punto de intersección *f* de las dos direcciones trazadas determina el final del vector $\vec{v}_F$ de la velocidad total del punto *F*. El segmento del plano que representa a $\vec{v}_F$ se obtiene uniendo el polo del plano *p* con el punto *f*. Para obtener el valor numérico de la magnitud

$$v_F = \mu_v \cdot pf.$$

Observando con detenimiento los triángulos *cfd* del plano de velocidades y el triángulo *CFD* del eslabón 3 se puede ver que los segmentos *cf, fd,* y *dc* son perpendiculares a los segmentos *CF, FD* y *DC* correspondientemente es decir

$$cf \perp CF; \qquad fd \perp FD; \qquad dc \perp DC;$$

De manera que el triángulo *cfd* del plano de velocidades, el cual representa las velocidades relativas $\vec{v}_{FC}$, $\vec{v}_{FD}$ y $\vec{v}_{CD}$ es semejante al triángulo *CFD* en el esquema, girado en 90°. Esta propiedad de semejanza de figuras de las velocidades relativas en el plano de velocidades con respecto a la figura del eslabón en el esquema del mecanismo, permite determinar las velocidades de cualquier punto de este eslabón sin partir de las ecuaciones, si no de manera gráfica, construyendo figuras semejantes. Para comprobar la corrección de las figuras semejantes construidas podemos revisar la correspondencia en el orden de las letras en el esquema y en el plano de velocidades. Así, si el orden de las letras en el esquema siguiendo el contorno del eslabón en sentido horario es *C, D* y *F*, en el plano de velocidades este orden debe conservarse es decir *c, d* y *f.*

Los vectores de las velocidades totales (absolutas) de los puntos de los eslabones tienen su inicio en el polo *p* del plan de velocidades, y los vectores de las velocidades relativas unen entre si los finales de los vectores de las velocidades totales.

Miremos cómo se construyen los planos de velocidades cuando el grupo contiene pares de desplazamiento, por ejemplo un grupo de II clase del segundo tipo (Fig. 5.2) posee un par de desplazamiento *D* y dos pares giratorios en serie *B* y *C.*

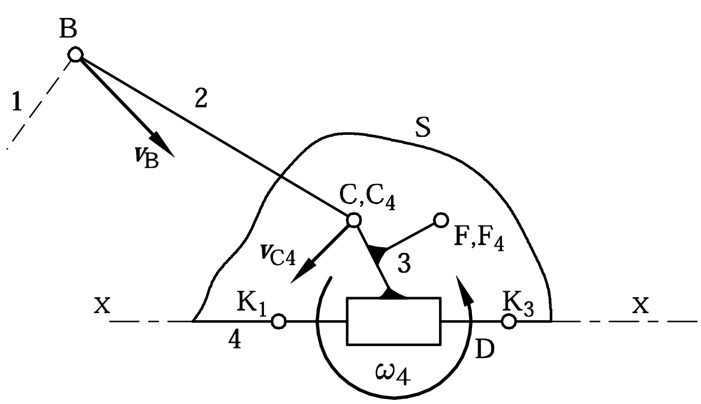

Fig. 5.2 *a*

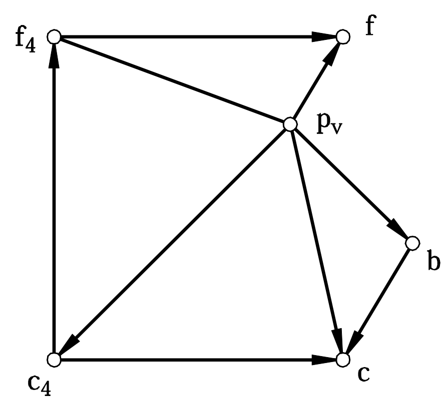

Fig. 5.2 *b*

El eslabón 2 "entra" en un par giratorio *(B)* con el eslabón 1 perteneciente al mecanismo base, y el eslabón 3 "entra" en un par de desplazamiento *(D)* con eslabón 4 del mecanismo base. Son conocidos: el vector de la velocidad $\vec{v}_B$ del punto *B* y los vectores de las velocidades de todos los puntos pertenecientes al eslabón 4. Por consiguiente es conocida la velocidad angular ω_4 de este eslabón. El eslabón 3 se desliza a lo largo del eje *x - x*, directriz perteneciente al eslabón 4. Representemos el eslabón 4 en forma de una superficie *S*, coincidente, en la posición dada, con el punto *C* en el punto C_4. El vector de la velocidad $\vec{v}_{C_4}$ del punto C_4 perteneciente al eslabón 4 es conocido. Entonces para determinar $\vec{v}_C$ (vector de la velocidad del punto *C*) es necesario resolver simultáneamente las siguientes ecuaciones vectoriales:

$$\vec{v}_C = \vec{v}_B + \vec{v}_{CB} \qquad\qquad \vec{v}_C = \vec{v}_{C_4} + \vec{v}_{CC_4} \tag{5.10}$$

De donde

$$\vec{v}_B + \vec{v}_{CB} = \vec{v}_{C_4} + \vec{v}_{CC_4}, \tag{5.11}$$

En las ecuaciones (5.10) y (5.11) $\vec{v}_{CC_4}$ es el vector de la velocidad relativa del punto *C* con respecto al eslabón 4 y $\vec{v}_{CB}$ es el vector de la velocidad relativa del punto *C* con respecto al punto *B*. En la ecuación (5.11) los vectores $\vec{v}_B$ y $\vec{v}_{C_4}$ de las velocidades de los puntos *B* y C_4, son conocidos en magnitud y dirección. De los vectores de las velocidades relativas $\vec{v}_{CB}$ y $\vec{v}_{CC_4}$ se conoce sólo su dirección. Las magnitudes de las velocidades $\vec{v}_{CB}$, $\vec{v}_{CC_4}$ y $\vec{v}_C$ son determinadas construyendo el plano de velocidades. Con este fin escogemos (Fig.5.2 *b*) cualquier punto *p* como polo del plano de velocidades y trazamos desde éste los vectores conocidos $\vec{v}_B$ y $\vec{v}_{C_4}$ de las velocidades de los puntos *B* y C_4, en forma de los segmentos *pb* y pc_4, los cuales representan, en la escala escogida μ_v estas velocidades. Luego, a través del punto *b* trazamos una recta en la dirección del vector de la velocidad $\vec{v}_{CB}$, perpendicular a *BC* (Fig.5.2 *a*), y a través del punto C_4 trazamos una recta en la dirección del vector $\vec{v}_{CC_4}$ de la velocidad relativa, paralela al eje *x - x* del par de desplazamiento *D*. El punto de intersección de estas dos direcciones nos muestra el final del vector $\vec{v}_C$ de la velocidad del punto *C*. La magnitud de la velocidad $\vec{v}_C$ se determina por la fórmula

$$v_C = \mu_v \cdot pc.$$

Las velocidades de otros puntos del eslabón se determinan de la misma manera que en el caso anterior. La velocidad angular ω_2 del eslabón 2 se puede hallar de manera análoga al caso visto anteriormente. La velocidad angular del eslabón 3, el cual "entra" en un par de deslizamiento con el eslabón 4, posee la misma velocidad angular ω_4 que el eslabón 4, es decir

$$\omega_3 = \omega_4$$

Para determinar la velocidad de cualquier otro punto *F* del eslabón 3 (Fig. 5.2 *a*) planteamos la siguiente ecuación vectorial

$$\vec{v}_F = \vec{v}_{F_4} + \vec{v}_{FF_4}, \tag{5.12}$$

El vector $\vec{v}_{F_4}$ de la velocidad del punto F_4 perteneciente al plano *S*, es decir, al eslabón 4 nos es conocida. La velocidad $\vec{v}_{FF_4}$ es igual a $\vec{v}_{CC_4}$, ya que el eslabón 3 se traslada de manera rectilínea con respecto al eslabón 4 y por consiguiente las velocidades relativas de todos los puntos del eslabón 3 con respecto al eslabón 4 son iguales entre si, por esto la ecuación (5.12) se puede escribir de la siguiente manera

$$\vec{v}_F = \vec{v}_{F_4} + \vec{v}_{CC_4}, \tag{5.13}$$

Según la ecuación (5.13) desde el punto f_4 (Fig. 5.2 *b*) trazamos el segmento $f_4\,f$, igual y paralelo a $c_4\,c$. El segmento resultante *pf* representa en la escala μ_v la velocidad absoluta del punto *F*, es decir

$$v_F = \mu_v \cdot pf.$$

Ejemplo: Construir el plano de velocidades del mecanismo de una máquina limadora (Fig. 5.3). Encontrar la velocidad del eslabón 5. Dados: φ_1 = 300° , l_{AB} = 0,05 m, l_{AC} = 0,12 m, l_{CD} = 0,200 m, H = 0,10 m, l_{DE} = 0,08 m. Velocidad angular de la manivela *AB* constante e igual a ω_1 = 10 rad/s.

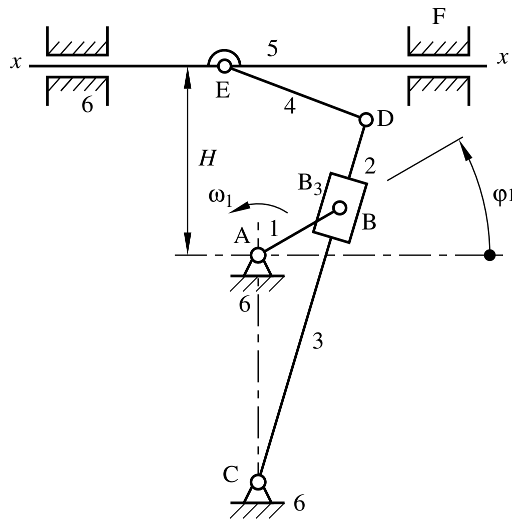

Fig. 5.3

Solución:

1) Análisis estructural del mecanismo

Número de eslabones k = 6
Número de eslabones móviles n = 5
Número de pares cinemáticos de V clase p_V = 7
Número de grados de libertad $W = 3n - 2\,p_V = 3\cdot 5 - 2\cdot 7 = 1$.

El mecanismo se compone de la siguiente manera: Al eslabón conductor *AB* y al bastidor 6 se une un grupo de Assur de II clase del tercer tipo, compuesto por los eslabones 2 y 3. A este grupo y al bastidor se une otro grupo de II clase del segundo tipo, compuesto por los eslabones 4 y 5. El mecanismo es de II clase. La fórmula constructiva del mecanismo se puede escribir así: $I_1 \rightarrow II_{2,3} \rightarrow II_{4,5}$.

2) Construimos el plano de posición del mecanismo. Con un coeficiente de escala μ_l = 1 m/UnCAD, por esto la longitud del segmento *AB* es igual a 0,050 UnCAD. La longitud de los demás segmentos AC = 0,120 UnCAD, CD = 0,200 UnCAD, h = 0,100 UnCAD, DE = 0,080 UnCAD,

Con las medidas obtenidas construimos el plano de posición del mecanismo (ver Fig. 5.4)

3) Construimos el plano de velocidades del mecanismo. Comenzamos con el grupo I_1.

La magnitud de la velocidad $\vec{v}_B$ del punto *B* es

$$v_B = \omega_1 \cdot l_{AB} = 10 \cdot 0{,}05 = 0{,}5\,\frac{m}{s}$$

Escogemos un punto *p* como polo y trazamos el segmento *pb*, el cual representa la velocidad del punto *B*, perpendicular a *AB* y en correspondencia con la dirección de giro del eslabón *AB*. La longitud de *pb* la escogemos igual a la longitud de la manivela *AB* = 0,050 UnCAD. Es decir, construimos el plano de velocidades en “escala de manivela”.

El coeficiente de escala del plano de velocidades será entonces

$$\mu_v = \frac{v_B}{pb} = \frac{0,5}{0,050} = 10 \, \frac{m}{s} \Big/ UnCAD$$

4) Continuamos con el grupo de Assur, compuesto por los eslabones 2,3, ya que éste esta unido directamente al eslabón primario y al bastidor. El plano de velocidades lo construimos de acuerdo a las siguientes ecuaciones vectoriales:

$$\vec{v}_{B_3} = \vec{v}_B + \vec{v}_{B_3B}, \qquad \vec{v}_{B_3} = \vec{v}_C + \vec{v}_{B_3C},$$

Donde $\vec{v}_{B_3}$ es la velocidad del punto B_3 del eslabón 3, el cual está bajo el punto *B;*

$\vec{v}_B$ es la velocidad del punto *B*, de magnitud y dirección ya conocidas;

$\vec{v}_{B_3B}$ es la velocidad relativa del punto B_3 con respecto al punto *B*, dirigida paralela a la línea *BC;*

$\vec{v}_C$ es la velocidad del punto *C*, y es igual a cero;

$\vec{v}_{B_3C}$ es la velocidad relativa del punto *B* con respecto al punto *C* al girar el eslabón 3,

su magnitud es $v_{B_3C} = \omega_3 \cdot l_{B_3C}$ (por el momento es desconocida), y está dirigida perpendicular a *BC*

Construimos la solución de la primera ecuación vectorial, mostrada arriba. A través del punto *b* trazamos la dirección de la velocidad $\vec{v}_{B_3B}$, una línea paralela a CB_3. Pasamos a construir la solución de la segunda ecuación vectorial mostrada arriba. Se debe trazar el vector de la velocidad del punto *C*, pero como su magnitud es igual a cero, su final lo situamos en el polo *p* y desde el punto *p* trazamos la dirección de la velocidad $\vec{v}_{B_3C}$: una línea perpendicular a *CB*. La intersección de esta línea con la trazada antes (paralela a *CB*), nos da el final del vector de la velocidad $\vec{v}_{B_3}$ en el punto p_3. El punto d, final del vector de la velocidad del punto *D*, lo encontramos por semejanza según la siguiente relación:

$$\frac{cd}{cb_3} = \frac{CD}{CB_3},$$

$$cd = cb_3 \frac{CD}{CB_3} = 0,0334 \frac{0,200}{0,0807} = 0,0828 \text{ UnCAD}$$

Pasamos a la construcción del plano de velocidades del grupo 4,5. Este plano lo construimos según las siguientes ecuaciones:

$$\vec{v}_E = \vec{v}_D + \vec{v}_{ED}, \qquad \vec{v}_E = \vec{v}_{E_6} + \vec{v}_{EE_6},$$

Donde $\vec{v}_E$ es la velocidad del punto *E*;

$\vec{v}_D$ es la velocidad del punto *D* (este vector ya está representado en el plano en forma del segmento *pd*)

$\vec{v}_{ED}$ es la velocidad relativa del punto E con respecto al punto D cuando el eslabón 4 gira

su magnitud es $v_{ED} = \omega_4 \cdot l_{DE}$ (por el momento desconocida), y está dirigida perpendicular a la línea *DE*

$\vec{v}_{E_6}$ es la velocidad del punto E_6 del eslabón 6 (el punto E_6 coincide con el punto *E*), La magnitud es igual a cero, ya que el eslabón 6 es inmóvil)

$\vec{v}_{EE_6}$ es la velocidad relativa del punto *E* con respecto a E_6, está dirigida paralela a la línea *x-x*

La construcción se resume a trazar a través de *d* (de acuerdo a la primera ecuación) una línea perpendicular a *DE*, es decir perpendicular a la velocidad $\vec{v}_{ED}$; y a trazar a través del punto *p* (de acuerdo a la segunda ecuación) una línea paralela *x-x*. El punto *e,* de intersección de estas líneas, es el final del vector de la velocidad $\vec{v}_E$ del punto *E*. Situamos en el polo los puntos *c,* e_6, *a* y damos por terminada la construcción del plano de velocidades del mecanismo.

La velocidad del soporte (velocidad del punto E) es igual a 0.0891

$$v_E = (pe) \cdot \mu_v = 0{,}0891 \cdot 10 = 0{,}89\ m/s$$

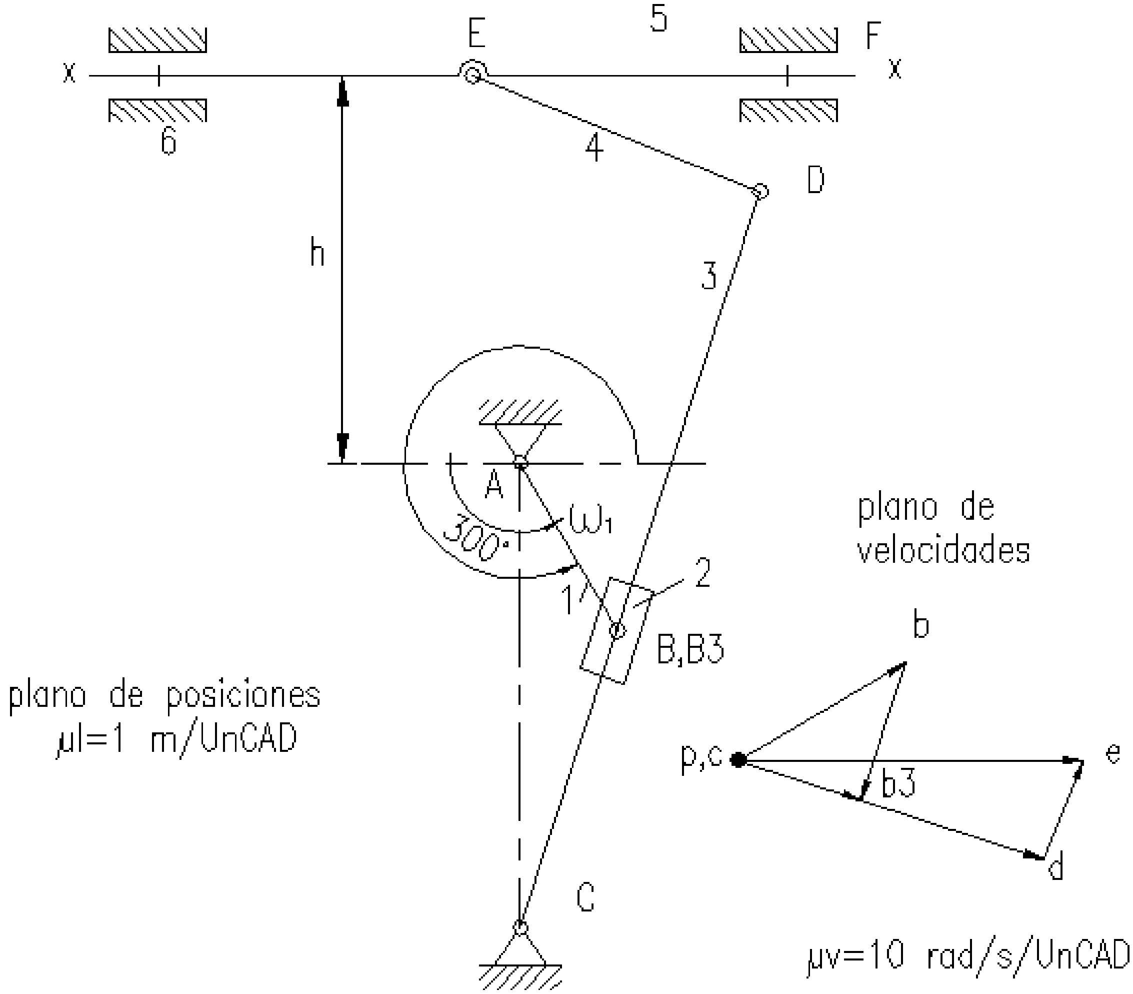

Fig. 5.4

BIBLIOGRAFÍA

Artobolevski I.I. Teoría de mecanismos y máquinas. Moscú. Nauka 1988
Kozhevnikov S.N. Mecanismos. Barcelona. Gustavo Gili S.A. 1975
Norton R.L. Diseño de Maquinaria. México D.F. McGraw-Hill 1995