Dinero en la Función de Utilidad

Martín Guzmán
Nota de Clase[*]
Facultad de Ciencias Económicas, Universidad Nacional de La Plata
Moneda, Crédito y Bancos
Mayo de 2004

La introducción del dinero en modelos que suponen la existencia de un agente representativo con expectativas racionales, y más aún, en un contexto determinístico, genera ciertas dificultades. En rigor, el rol del dinero no puede ser plenamente comprendido bajo el supuesto de un mundo con total certidumbre. No obstante, en la presenta nota intentaremos esbozar un modelo simple de **Dinero en la Función de Utilidad** para atacar este problema.

El dinero es un activo particular porque es una "promesa de nada". Si el dinero sirviera meramente como una reserva de valor, en una economía en la que existiera un activo alternativo que rindiera intereses (por ejemplo, los bonos), nadie demandaría dinero. Sin embargo, puede suponerse que éste brinda algún servicio a los agentes, (tal como facilitar las transacciones, permitir un ahorro de tiempo en la realización de las mismas), y de esta manera, puede introducirse al dinero en la función de utilidad de aquellos. Esta propiedad asociada al motivo transacción es llamada liquidez. No obstante, para que exista una demanda de dinero deben cumplirse ciertos requisitos. En primer lugar, una condición necesaria para que un individuo demande una cantidad positiva de dinero consiste en que el mismo sea universalmente aceptado. Cada agente acepta dinero porque espera que el resto de los agentes lo acepten en el futuro[1]. Además, para que se pueda introducir al dinero en

[*]Versión preliminar.

[1]Obsérvese que la necesidad de que el dinero sea un activo universalmente aceptado

la función de utilidad considerando finitos períodos, se necesita que el dinero pueda ser utilizado en la compra de bienes en el mismo período en que es demandado. Si este activo sólo pudiera utilizarse en el período siguiente al que se demanda, se requeriría que los agentes interactuaran durante una cantidad infinita de períodos. Si aquellos interactuaran durante una cantidad finita de períodos, digamos n, en el período n el dinero no sería aceptado, dado que al no haber un período siguiente, todos decidirían racionalmente no demandar nada de dinero en ese período, ya que aquel no le otorgaría al agente ninguna utilidad (pues no habría un período siguiente en el cual gastarlo). Pero dado que en n-1 todos saben con plena certidumbre que en n nadie aceptará dinero, tampoco habrá una demanda positiva de tal activo en n-1. Por inducción hacia atrás, en el período corriente nadie demandaría dinero.

En la presente nota trabajaremos con una economía en la que existen cuatro sectores: el sector privado, el gobierno, el Banco Central y el sector externo, a los cuales denotaremos con las letras P, G, C y E, respectivamente. Se supondrá que el Banco Central es la única institución autorizada para emitir dinero, y que la emisión de dinero puede hacerse sin ningún costo. También se supondrá que esta institución no puede emitir bonos. El resto de los sectores puede emitir bonos, y suponemos que aquellos tienen un período de vencimiento. Se supondrá también a lo largo de la nota que el ingreso viene determinado exógenamente, por lo que en esta economía no hay inversión (este supuesto, poco realista por cierto, es para simplificar el análisis, y se lo dejará de lado cuando se lo considere necesario).

En cuanto a la metodología utilizada, en primer lugar se presentarán las restricciones de los sectores que componen la economía, utilizando tiempo discreto. Luego se planteará el problema de maximización de la utilidad del agente representativo, a partir de lo que se deducirá la demanda de dinero óptima que realiza el agente, y las conclusiones correspondientes.

Restricciones presupuestarias

Cuando un individuo o cualquier agente en general toma decisiones, siempre éstas están condicionadas por las restricciones a las que el decisor se enfrenta. En el modelo económico que aquí se presenta (como en los modelos

muestra que es problemático tratar a la demanda de dinero como un experimento individual.

económicos en general), las decisiones están precisamente vinculadas a cuestiones económicas. Por ejemplo, un agente maximizador de la utilidad, que es una de las microfundamentaciones de las que parte el modelo de Dinero en la Función de Utilidad, tiene en cuenta al realizar tal maximización las restricciones presupuestarias a las que se enfrenta. La restricción dice justamente que el individuo está restringido en sus recursos cuando toma decisiones. Si tal escasez no existiera, el problema sería trivial, dado que en un planteo intertemporal ninguna decisión tendría un costo de oportunidad positivo. Esto justifica el extenso desarrollo que se hace en lo que sigue de las restricciones presupuestarias de los sectores que componen la economía doméstica.

Las restricciones presupuestarias de cada sector muestran que las fuentes de las que aquellos disponen deben igualarse a los usos que se les dan; es decir, tales restricciones muestran simplemente identidades contables básicas.

Sean $B_t^{i,j}$ los bonos emitidos por el sector i que adquiere el sector j en el período t (si j es acreedor, B es positivo, mientras que si j es deudor B toma un valor negativo), $R_{t-1,t}^{i,j}$ la tasa de interés nominal sobre los bonos que emite i y recibe j en t-1 (esta tasa muestra el rendimiento de estos activos entre t-1 y t), Y_t el ingreso que reciben los agentes en forma exógena en t, C_t el consumo que realizan los agentes en t, T_t los impuestos recaudados por el gobierno en t, y M_t la cantidad de dinero demandada por los agentes en t, estando todas las variables expresadas en términos nominales. Suponemos que la tasa de interés nominal que rinde el dinero es nula. Luego, la **restricción presupuestaria del sector privado** en el período t es la que muestra la ecuación (1) (dada la existencia de un agente representativo, podemos interpretar a tal restricción como la de un único agente, sin ninguna pérdida de generalidad).

$$Y_t - T_t + (1 + R_{t-1,t}^{G,P})B_{t-1}^{G,P} + (1 + R_{t-1,t}^{E,P})B_{t-1}^{E,P} - (1 + R_{t-1,t}^{P,C})B_{t-1}^{P,C} + M_{t-1} = C_t + B_t^{G,P} + B_t^{E,P} - B_t^{P,C} + M_t \tag{1}$$

La anterior restricción muestra que la riqueza disponible de un individuo en t, que viene dado por la dotación que recibe en t más el ahorro acumulado en t-1 (incluyendo intereses), menos los impuestos y la deuda que el agente debe pagar (recuérdese que se supuso que los bonos vencen luego de un período), puede ser utilizado ya sea para consumir, para ahorrar en bonos internos o externos, para rescatar deuda (que es lo que indica la presencia de $B_t^{P,C}$ en el lado derecho de la restricción), o bien para demandar dinero. Una simple manipulación algebraica de la anterior restricción nos permite expresarla de la siguiente manera:

$$Y_t - T_t + R^{G,P}_{t-1,t}B^{G,P}_{t-1} + R^{E,P}_{t-1,t}B^{E,P}_{t-1} - R^{P,C}_{t-1,t}B^{P,C}_{t-1} - C_t =$$
$$B^{G,P}_t - B^{G,P}_{t-1} + B^{E,P}_t - B^{E,P}_{t-1} - (B^{P,C}_t - B^{P,C}_{t-1}) + M_t - M_{t-1} \quad (2)$$

La ecuación (2) muestra que el ahorro que el individuo realiza en el período t lo utiliza en acumular bonos, en desacumular deuda propia y en acumular dinero.

El gobierno es otro de los sectores que forma la economía, el cual se introduce suponiendo que el mismo cobra impuestos con los que financia el gasto público que el mismo realiza, al que denotaremos con G (nuevamente esta variable está expresada en términos nominales). La ecuación (3) muestra la **restricción presupuestaria del gobierno** en el período t.

$$G_t + (1 + R^{G,P}_{t-1,t})B^{G,P}_{t-1} + (1 + R^{G,E}_{t-1,t})B^{G,E}_{t-1} + (1 + R^{G,C}_{t-1,t})B^{G,C}_{t-1} =$$
$$T_t + B^{G,P}_t + B^{G,E}_t + B^{G,C}_t \quad (3)$$

La anterior restricción muestra que lo que gasta el gobierno en t más la deuda que debe pagar debe igualarse a las fuentes de recursos a las que mismo accede, esto es, a la recaudación impositiva que logra obtener en t más el monto de los bonos que emite y demanda alguno de los otros tres sectores de la economía. Operando algebraicamente como en la restricción del sector privado, se obtiene en este caso la expresión (4), que entre otras cosas muesttra que si el gobierno está imposibilitado de financiar su gasto mediante acumulación de deuda (es decir, si el lado izquierdo de la ecuación (4) es igual a cero), entonces el superávit primario que el gobierno debe obtener (esto es, $T_t - G_t$) debe ser igual a los intereses que el mismo debe pagar en el período corriente.

$$G_t - T_t + R^{G,P}_{t-1,t}B^{G,P}_{t-1} + R^{G,E}_{t-1,t}B^{G,E}_{t-1} + R^{G,C}_{t-1,t}B^{G,C}_{t-1} =$$
$$+B^{G,P}_t - B^{G,P}_{t-1} + B^{G,E}_t - B^{G,E}_{t-1} + B^{G,C}_t - B^{G,C}_{t-1} \quad (4)$$

Finalmente, es de relevancia para el análisis exponer la restricción que enfrenta el Banco Central. El cuadro 1 muestra el balance de esta institución en el período t. Entre los activos que posee encontramos a los bonos que hayan sido adquiridos por la entidad en t-1, ya sea que los mismos hayan sido emitidos por el gobierno, lo que constituye tenencia de títulos públicos, por el sector externo, los que se conocen como reservas, o bien por el sector privado, a los cuales podemos llamar títulos del sector privado. La cantidad de dinero emitida constituye el pasivo del Banco Central. Se denomina con PN al patrimonio neto de la entidad.

Cuadro 1

Activo	**Pasivo + Patrimonio Neto**
$B_{t-1}^{E,C}$	M_{t-1}
$B_{t-1}^{G,C}$	PN_{t-1}
$B_{t-1}^{P,C}$	

En un sistema de caja de conversión, el activo del Banco Central sólo está formado por reservas externas. En un sistema como éste, la ganancia del Banco Central viene dada por los intereses sobre los activos externos. Por su parte, en un sistema de flotación perfecta del tipo de cambio, el activo del Banco Central sólo contiene títulos públicos y títulos del sector privado.

De acuerdo a lo expuesto en el cuadro 1, la expresión para el patrimonio neto en el período t viene dada por la ecuación (5), que simplemente muestra que el patrimonio neto del Banco Central consiste en la diferencia entre su activo y su pasivo.

$$PN_t = B_t^{E,C} + B_t^{G,C} + B_t^{P,C} - M_t \tag{5}$$

Atrasando (5) un período y utilizando tal ecuación puede obtenerse la ecuación (6), que es una expresión para la variación de la emisión monetaria.

$$\begin{aligned} M_t - M_{t-1} = {} & B_t^{E,C} - (1 + R_{t-1,t}^{E,C})B_{t-1}^{E,C} + \\ & + B_t^{G,C} - (1 + R_{t-1,t}^{G,C})B_{t-1}^{G,C} + B_t^{P,C} - (1 + R_{t-1,t}^{P,C})B_{t-1}^{P,C} \end{aligned} \tag{6}$$

La anterior ecuación muestra que toda aumento de la cantidad de dinero emitida debe tener una contrapartida en el balance del Banco Central. Puede notarse que se emite moneda cuando el Banco Central aumenta sus reservas más allá de la capitalización de intereses.

Hemos enunciado las restricciones presupuestarias del sector privado, el gobierno y el Banco Central en forma separada. Sin embargo, nuestro problema está enfocado en las decisiones que toma cada agente en forma individual, por lo que ahora introduciremos un concepto clave que permitirá vincular las tres restricciones, para considerar el problema que resuelve el individuo, dado el comportamiento que siguen los distintos sectores de la economía. Éste es el concepto de **ultrarracionalidad**. La ultrarracionalidad es una hipótesis de comportamiento, que básicamente indica que el agente que se comporta de tal manera incorpora las restricciones presupuestarias del gobierno y del Banco Central en su propia restricción. Por ejemplo, de acuerdo a esta hipótesis los individuos tienen previsión sustancial respecto a que el endeudamiento actual del gobierno implícitamente señala la existencia de impuestos futuros para que esa deuda pueda ser repagada.

De acuerdo a la nueva hipótesis de comportamiento que acabamos de suponer, introduciremos las restricciones presupuestarias del gobierno y el Banco Central en la del sector privado. De (3) puede despejarse T_t e introducirse esre resultado en (1), obteniéndose

$$\begin{aligned} &Y_t + (1+R^{E,P}_{t-1,t})B^{E,P}_{t-1} - (1+R^{P,C}_{t-1,t})B^{P,C}_{t-1} - (1+R^{G,E}_{t-1,t})B^{G,E}_{t-1} + M_{t-1} = \\ &C_t + G_t + (1+R^{G,C}_{t-1,t})B^{G,C}_{t-1} - B^{G,E}_t - B^{G,C}_t + B^{E,P}_t - B^{P,C}_t + M_t \end{aligned} \tag{7}$$

Luego, introduciendo (6) en (7) (esto es, la restricción presupuestaria del Banco Central en la restricción presupuestaria del sector privado), se obtiene

$$\begin{aligned} &Y_t + (1+R^{E,P}_{t-1,t})B^{E,P}_{t-1} + (1+R^{E,C}_{t-1,t})B^{E,C}_{t-1} - (1+R^{G,E}_{t-1,t})B^{G,E}_{t-1} = \\ &C_t + G_t + B^{E,P}_t + B^{E,C}_t - B^{G,E}_t \end{aligned} \tag{8}$$

La anterior expresión muestra que la riqueza del sector privado puede ser utilizada para consumir bienes privados o públicos, o bien para demandar bonos. Puede observarse que los únicos tipos de bonos que aparecen en la restricción son aquellos en los que el sector externo participa ya sea como emisor o como receptor. Esto es una consecuencia directa de la ultrarracionalidad, ya que de acuerdo a esta hipótesis los bonos emitidos por cualquiera de los sectores domésticos de la economía y que hayan sido adquiridos por el sector privado no son considerados riqueza por parte de éste, dado que prevee perfectamente que esa deuda deberá ser pagada en el futuro, para lo cual se le cobrarán impuestos. Otra manera de interpretar esta ecuación indica que el producto interno más el conjunto de recursos a los cuales accede la economía es igual a la demanda agregada [2] más la demanda de activos contra el resto del mundo. Tras una simple operación algebraica, la ecuación (8) se transforma en la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} &Y_t - (C_t + G_t) + R^{E,P}_{t-1,t}B^{E,P}_{t-1} + R^{E,C}_{t-1,t}B^{E,C}_{t-1} - R^{G,E}_{t-1,t} = \\ &B^{E,P}_t - B^{E,P}_{t-1} + B^{E,C}_t - B^{E,C}_{t-1} - (B^{G,E}_t - B^{G,E}_{t-1}) \end{aligned} \tag{9}$$

[2] Recordemos que en esta economía no hay inversión, por lo que la demanda agregada viene dada por el consumo privado más el gasto público.

Esta ecuación muestra que el superávit de la cuenta corriente se utliza para acumular activos externos. Esto es, el superávit de la cuenta corriente en t es igual al déficit en la cuenta capital.

La restricción presupuestaria del sector privado expuesta en (1) puede ser reescrita de la siguiente manera:

$$Y_t - T_t + \sum_{j=E,G,C} (1 + R^{j,P}_{t-1,t}) B^{j,P}_{t-1} + M_{t-1} = C_t + \sum_{j=E,G,C} B^{j,P}_t + M_t \tag{10}$$

Para simplificar el análisis, supondremos que $R^{j,P}_t = R_t$, esto es, la tasa de interés que rinden los distintos tipos de bonos que puede adquirir el sector privado es equivalente, y además notamos que $\sum_j B^{j,P}_t = B^P_t$[3]. Por lo tanto, la ecuación anterior puede reescribirse como

$$Y_t - T_t + (1 + R_{t-1,t}) B^P_{t-1} + M_{t-1} = C_t + B^P_t + M_t \tag{11}$$

Lo único que se ha hecho es reexpresar la restricción presupuestaria del sector privado de distinta manera, por lo que su interpretación es análoga a la realizada oportunamente.

El lector debe tener presente que el objetivo que persigue el modelo es explicar las consecuencias que tiene la introducción del dinero en una economía, una vez que esta introducción puede ser justificada. Dado que estamos suponinedo la existencia de un agente representativo, la restricción de cada agente (que por definición es la misma para cada uno de ellos) es análoga a la restricción conjunta del sector privado. Por lo tanto, cada vez que hacemos referencia a los usos que el sector privado hace de sus fuentes, tal interpretación puede ser leída como los usos que cada agente hace de sus fuentes, sin ninguna pérdida de generalidad. La estructura que persigue la nota en lo que sigue del análisis es la siguiente: en primer lugar, convertiremos la restricción que hemos expresado en términos nominales a términos reales. Esto permitirá mostrar ciertos efectos que provoca el dinero en una economía de este tipo. Luego, volveremos a la representación en términos nominales, y extenderemos la restricción intertemporal a infinitos períodos. Esto permitirá plantear el problema de maximización que nuestro agente representativo debe resolver, a partir del cual mostraremos cuál es intertemporalmente su comportamiento óptimo. Podremos obtener entonces la función de demanda

[3] Téngase en cuenta que $B^{P,C} = -B^{C,P}$.

de dinero del agente, logrando comprender el comportamiento de ésta[4]. Finalmente, levantaremos el supuesto poco plausible que indica que el ingreso que reciben los individuos viene determinado exógenamente, considerando entonces que la inversión es la variable que determina el nivel de producción de la economía. Para ello, desarrollaremos muy sintéticamente un modelo de Ramsey con dinero.

La restricción del sector privado en términos reales

Definimos al nivel de precios de la economía en el período t por P_t. Denotaremos con letras minúsculas a las variables expresadas en términos reales. Para hallar la restricción presupuestaria en términos reales para el período t, debemos dividir la ecuación (11) por el nivel de precios de tal período, obteniéndose:

$$y_t - t_t + (1 + R_{t-1,t})\frac{B^P_{t-1}}{P_t} + \frac{M_{t-1}}{P_t} = c_t + b^P_t + m_t \tag{12}$$

Una simple manipulación algebraica nos permite expresar (12) como (13),

$$y_t - t_t + (1 + R_{t-1,t})\frac{B^P_{t-1}}{P_{t-1}}\frac{P_{t-1}}{P_t} + \frac{M_{t-1}}{P_{t-1}}\frac{P_{t-1}}{P_t} = c_t + b^P_t + m_t \tag{13}$$

o bien, lo que es equivalente,

$$y_t - t_t + (1 + R_{t-1,t})b^P_{t-1}\frac{P_{t-1}}{P_t} + m_{t-1}\frac{P_{t-1}}{P_t} = c_t + b^P_t + m_t \tag{14}$$

Para continuar con nuestro desarrollo el siguiente cuadro nos será de utilidad:

Cuadro 2

Activos vs Período	t-1	t
Bienes	1	$\frac{P_{t-1}}{P_t}(1 + R_{t-1,t})$
Pesos	P_{t-1}	$P_{t-1}(1 + R_{t-1,t})$

El cuadro 2 indica que un peso en t-1 vale en el período siguiente el valor nominal que tenía en t-1 más el rendimiento que otorga esa unidad monetaria, que está asociado a la tasa de interés nominal. Por su parte, una unidad de

[4]Podríamos introducirmos en otras discusiones clásicas en la literatura, tales como aquellas sobre la neutralidad y superneutralidad del dinero, pero en la presente nota se dejarán de lado.

un bien en t-1 vale en t el equivalente al precio que tenía ese bien en t-1 más el rendimiento nominal de ese bien, aunque todo esto descontado por el precio que el mismo tiene en t. Pero también se sabe que una unidad de un activo real (tal como un bien) que un individuo tiene en t-1, vale en t esa unidad más la tasa de interés real que rinde ese bien. Por ende, tal relación puede expresarse como lo hace la ecuación (15):

$$\frac{P_{t-1}}{P_t}(1 + R_{t-1,t}) = 1 + r_{t-1,t} \tag{15}$$

siendo r la tasa de interés real.

Definimos $\hat{P}_t$ como la tasa de inflación en t con respecto al período anterior, es decir,

$$\frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} = \hat{P}_t \tag{16}$$

De (16) surge que

$$\frac{P_t}{P_{t-1}} = 1 + \hat{P}_t \tag{17}$$

lo que puede reemplazrse en (15) para obtener (18).

$$1 + r_{t-1,t} = \frac{1 + R_{t-1,t}}{1 + \hat{P}_t} \tag{18}$$

De (18), puede despejarse en forma inmediata la expresión para la tasa de interés real de la economía:

$$r_{t-1,t} = \frac{R_{t-1,t} - \hat{P}_t}{1 + \hat{P}_t} \tag{19}$$

Manteniendo el supuesto de que el dinero es un activo que no rinde intereses nominales, se tiene

$$r^M_{t-1,t} = -\frac{\hat{P}_t}{1 + \hat{P}_t} \tag{20}$$

donde $r^M_{t-1,t}$ es la tasa de interés real que rinde el dinero entre el período t-1 y el t.

La ecuación (20) indica que el rendimiento real del dinero decrece a medida que crece la tasa de inflación: es positivo en períodos deflacionarios y negativo en períodos inflacionarios. Esto significa que mantener dinero en cartera provoca una pérdida real en períodos inflacionarios, y una ganancia real en períodos deflacionarios.

La ecuación (14) mostraba la restricción presupuestaria del sector privado. Sustituyendo (15) y (17) en dicha expresión y restando a cada lado de aquella m_{t-1}, puede obtenerse (21), que muestra que el ingreso real del sector privado, o de un agente, que para el caso es lo mismo, es igual al consumo real más el ahorro real, viniendo este último dado por la acumulación real de bonos y la acumulación real de dinero.

$$\underbrace{y_t - t_t + r_{t-1,t}b_{t-1}^P + \frac{m_{t-1}}{1+\hat{P}_t} - m_{t-1}}_{\text{ingreso real}} = \underbrace{c_t}_{\text{consumo real}} + \underbrace{\overbrace{b_t^P - b_{t-1}^P}^{\text{acumulacion real de bonos}} + \overbrace{m_t - m_{t-1}}^{\text{acumulacion real de dinero}}}_{\text{ahorro real}} \tag{21}$$

Operando algebraicamente, la ecuación (21) puede expresarse como

$$y_t - t_t + r_{t-1,t}b_{t-1}^P - \underbrace{m_{t-1}(\frac{\hat{P}_t}{1+\hat{P}_t})}_{\text{impuesto inflacionario}} = c_t + b_t^P - b_{t-1}^P + m_t - m_{t-1} \tag{22}$$

La ecuación (22) se interpreta de la misma manera que (21) (de hecho, constituyen la misma ecuación). Lo interesante de reexpresarla de tal manera es que muestra con mayor claridad que el ingreso real del agente no sólo viene dado por la dotación de bienes que recibe y por los intereses que cobra por sus créditos, sino que también el hecho de mantener dinero en cartera provoca un efecto real, el cual viene dado por el impuesto inflacionario. Suponiendo que la tasa de inflación es positiva, puede definirse al impuesto inflacionario como la pérdida real que enfrentan los individuos por mantener dinero en cartera, dado que en ese caso este activo rinde una tasa de interés real negativa[5]. Como todo impuesto, el impuesto inflacionario, aunque no legislado, también posee una base y una tasa. La base del impuesto es la cantidad de saldos reales que posee el agente. Cuando la inflación es alta, una manera que tienen los individuos para evitar el impuesto es reducir la base, lo que en este contexto significa reducir la demanda de saldos reales[6]. La tasa de este impuesto está asociada a la tasa de inflación, la cual es endógena. En forma intuitiva, puede notarse que un aumento de la tasa podría provocar

[5]Esto puede verse más claramente en la ecuación (20).

[6]Esto se desarrolla en forma más extensa luego, cuando se analiza la función de demanda de dinero de los agentes.

una disminución de la base, para poder eludir tal impuesto. Esta lógica constituye entonces una aproximación a la justificación de la curva de Laffer de recaudación del impuesto inflacionario [7].

La ecuación (22) puede reescribirse de la siguiente manera:

$$y_t - t_t + r_{t-1,t}b_{t-1} = c_t + b_t - b_{t-1} + m_t - m_{t-1} + m_{t-1}(\frac{\hat{P}_t}{1+\hat{P}_t}) \tag{23}$$

La acción que realiza la autoridad monetaria al emitir dinero recibe el nombre de señoreaje. En otras palabras, puede decirse que el señoreaje indica el valor real de la acumulación de saldos reales, lo que viene dado por el término $\frac{M_t - M_{t-1}}{P_t}$. El lector puede comprobar que la expresión para el señoreaje viene dada por

$$\frac{M_t - M_{t-1}}{P_t} = m_t - m_{t-1} + m_{t-1}(\frac{\hat{P}_t}{1+\hat{P}_t}) \tag{24}$$

Por lo tanto, introduciendo (24) en (23), ésta puede expresarse como

$$y_t - t_t + r_{t-1,t}b_{t-1} = c_t + b_t - b_{t-1} + \frac{M_t - M_{t-1}}{P_t} \tag{25}$$

Nuevamente, la lectura de esta última ecuación es la misma que la de (21), aunque esta última destaca cómo el señoreaje de la autoridad monetaria, que es una acción dirigida a una apropiación de recursos por parte de éste, forma parte de la restricción presupuestaria del sector privado de la economía.

Debe notarse que el impuesto inflacionario no implica necesariamente una apropiación de recursos por parte del Banco Central. Puede tenerse una tasa de inflación positiva, pero a la vez ser $M_t = M_{t-1}$. Esto indica que el señoreaje es nulo, para lo cual el individuo debe demandar una cantidad de saldos reales en t que es menor a la demandada en t-1[8].

La restricción nominal para infinitos períodos

Antes de resolver el problema del agente representativo de nuestra economía, plantearemos su restricción intertemporal en términos nominales, considerando

[7] Recuérdese que la curva de Laffer es aquella según la cual la función de recaudación de un impuesto es estrictamente cóncava, creciente en un primer tramo hasta alcanzar un nivel de tasa óptimo, a partir del cual es decreciente.

[8] Obsérvese que dado que la tasa de inflación es positiva (esto es, $P_t > P_{t-1}$), para $M_t = M_{t-1}$ se tiene $m_t = \frac{M_t}{P_t} < m_{t-1} = \frac{M_{t-1}}{P_{t-1}}$.

que el individuo tiene un horizonte temporal infinito. Para ello, lo primero que hacemos es adelantar la ecuación (11) un período, obteniendo la siguiente expresión:

$$Y_{t+1} - T_{t+1} + (1 + R_{t,t+1})B_t^P + M_t = C_{t+1} + B_{t+1}^P + M_{t+1} \tag{26}$$

La ecuación (26) está expresada en valores correspondientes al período t+1, mientras que la (11) está expresada en valores de t. Tales ecuaciones no pueden ser sumadas directamente, dado que no están expresadas en la misma unidad de medida. Para poder realizar tal adición, reexpresaremos a (26) en valores correspondientes a t. Para ello, descontamos (26) a valor presente, dividiéndola por $(1 + R_{t,t+1})$.

$$\frac{Y_{t+1} - T_{t+1}}{1 + R_{t,t+1}} + B_t^P + \frac{M_t}{1 + R_{t,t+1}} = \frac{C_{t+1}}{1 + R_{t,t+1}} + \frac{B_{t+1}^P}{1 + R_{t,t+1}} + \frac{M_{t+1}}{1 + R_{t,t+1}} \tag{27}$$

Luego, sumando (11) y (27), obtenemos (28), que es la restricción presupuestaria intertemporal del sector privado para dos períodos.

$$\begin{aligned} &Y_t - T_t + \frac{Y_{t+1} - T_{t+1}}{1 + R_{t,t+1}} + (1 + R_{t-1,t})B_{t-1}^P + M_{t-1} + \frac{M_t}{1 + R_{t,t+1}} = \\ &C_t + \frac{C_{t+1}}{1 + R_{t,t+1}} + \frac{B_{t+1}^P}{1 + R_{t,t+1}} + M_t + \frac{M_{t+1}}{1 + R_{t,t+1}} \end{aligned} \tag{28}$$

Trasponiendo términos y sacando factor común M_t, la ecuación (28) es equivalente a (29).

$$\begin{aligned} &Y_t - Tt + \frac{Y_{t+1} - Tt + 1}{1 + R_{t,t+1}} + (1 + R_{t-1,t})B_{t-1}^P + M_{t-1} = \\ &C_t + \frac{C_{t+1}}{1 + R_{t,t+1}} + \frac{B_{t+1}^P}{1 + R_{t,t+1}} + M_t(\frac{R_{t,t+1}}{1 + R_{t,t+1}}) + \frac{M_{t+1}}{1 + R_{t,t+1}} \end{aligned} \tag{29}$$

La ecuación (29), entre otras cosas, muestra que si un individuo guarda una unidad de dinero en t, se pierde de ganar en $t + 1$ por no tener un bono la tasa de interés; es decir, la tenencia de dinero en cartera provoca que que el individuo sacrifique intereses. Como los bonos pagan intereses en $t + 1$, para calcular el valor actual de los intereses sacrificados hay que descontarlos.

Se verá luego que la demanda de dinero balancea la utilidad marginal del dinero contra el costo de oportunidad, constituido por la tasa de interés.

Cuanto mayor sea la tasa de interés, mayor será el costo de oportunidad de tener dinero, y por lo tanto su cantidad demandada será menor.

La ecuación (11) podría adelantarse para t+j, siendo j el período que puede ir desde t hasta infinito. Nuevamente, para poder sumar cada una de estas restricciones y constituir así la restricción intertemporal del sector privado para infinitos períodos, habría que descontar cada una de las restricciones a valor presente. Finalmente, sumando cada una de ellas, y teniendo en cuenta que

$$(1 + R_{t,t+j+1})^{j+1} = (1 + R_{t,t+j})^{j}(1 + R_{t+j,t+j+1}) \tag{30}$$

se obtendría la ecuación (30), que no es más que la restricción intertemporal que enfrenta el sector privado, considerando su horizonte temporal de decisiones como infinito.

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{\infty} \frac{Y_{t+j} - T_{t+j}}{(1 + R_{t,t+j})^{j}} + (1 + R_{t-1,t})B_{t-1} + M_{t-1} = \\
&\sum_{j=0}^{\infty} \frac{C_{t+j}}{(1 + R_{t,t+j})^{j}} + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{M_{t+j}}{(1 + R_{t,t+j})^{j}} \frac{R_{t+j,t+j+1}}{(1 + R_{t+j,t+j+1})} \\
&+ \underbrace{\lim_{j\to\infty} \frac{B_{t+j+1}}{(1 + R_{t,t+j})^{j}}}_{B} + \underbrace{\lim_{j\to\infty} \frac{M_{t+j+1}}{(1 + R_{t,t+j})^{j}}}_{C}
\end{aligned} \tag{31}$$

Los términos B y C merecen un análisis más detallado. Si B+C fuera positivo, esto estaría indicando que el agente estaría guardando recursos sin ningún sentido económico. En una interpretación muy poco rigurosa, podría decirse que el individuo se estaría "yendo del mundo" sin consumir toda su riqueza (la falta de rigor reside en que se están considerando infinitos períodos, por lo que en rigor el individuo nunca se va del mundo). Pero tal comportamiento no sería racional desde el punto del individuo, por lo cual es descartado. Que B+C tomara un valor negativo aumentaría la riqueza de la que dispone el agente para consumir a lo largo del tiempo. Nuevamente dejando el rigor lógico a un lado, podría decirse que en tal caso el individuo "se estaría yendo del mundo" sin pagar su deuda. Claramente, ningún individuo racional le permitiría a otro tal comportamiento, por lo que también se descarta un valor negativo para B+C. En consecuencia, B+C debe ser igual a cero (en realidad, tanto B como C deben ser cero), y esta lógica se conoce con el nombre de **condición de transversalidad**[9].

Finalmente, la restricción intertemporal de presupuesto para infinitos períodos es:

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{Y_{t+j} - T_{t+j}}{(1 + R_{t,t+j})^j} + (1 + R_{t-1,t})B_{t-1} + M_{t-1} =$$
$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{C_{t+j}}{(1 + R_{t,t+j})^j} + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{M_{t+j}}{(1 + R_{t,t+j})^j} \frac{R_{t+j,t+j+1}}{(1 + R_{t+j,t+j+1})} \tag{32}$$

El problema del agente

Estamos en condiciones de plantear el problema que resolverá el agente representativo de nuestra economía. Para ello, suponemos que la función objetivo de nuestro agente será maximizar su función de utilidad, la cual viene dada por $U(c_{t+j}, m_{t+j})$, siendo ésta una función compuesta por dos funciones separables, a saber[10]:

$$U_c = \frac{\delta U}{\delta c} = U_c(c_{t+j})$$

$$U_m = \frac{\delta U}{\delta m} = U_m(m_{t+j})$$

El problema de maximización de la utilidad del agente representativo consiste ahora en

$$\mathrm{Max} \sum_{\mathrm{j=0}}^{\infty} \beta^{\mathrm{t+j}} \mathrm{U}(\mathrm{c_{t+j}}, \mathrm{m_{t+j}}) \quad \text{s.a. (32)} \tag{33}$$

[9]En téminos económicos, tal condición recibe el nombre de **condición de solvencia**. Obsérvese de todas maneras que esta condición no indica que no pueda haber deuda "en el infinito". Un consol (que es un bono que nunca se amortiza) podría cumplir tal condición sin ningún problema, siempre que el valor presente de aquél cuando j tiende a infinito sea igual a cero. Analíticamente, puede notarse en (31) que para una tasa de interés nominal positiva y para un valor dado del bono, se cumple la condición de que tal límite sea igual a cero (ya que tanto el denominador de B como el de C tienden a infinito cuando j tiende a infinito, y en ambos casos el numerador es una constante).

[10]El lector que encuentre más simple el análisis sin la presencia del término j puede hacerlo pero considerando al período base como cero en lugar de t.

Dado que los individuos se suponen ultrarracionales y que consideran su horizonte temporal como infinito, se sobreentiende que en la resolución de este problema no van a existir problemas de inconsistencia temporal. En otras palabras, el individuo no va a tomar una decisión en algún período que provoque un perjuicio en la utilidad intertemporal que éste maximiza. Es decir, hay una ausencia total de miopía por parte de los agentes, por lo que en t se tomarán decisiones que sean óptimas para la maximización intertemporal que cada uno de ellos resuelve[11].

Para el problema planteado, el agente resuelve las condiciones de primer orden (C.P.O) para tomar las decisiones óptimas, y tales condiciones vienen dadas por (34) y (35), teniendo en cuenta que $c_t = P_t C_t$, y siendo L la función lagrangiana.

$$\frac{\delta L}{\delta c_{t+j}} = \beta^j U_c(c_{t+j}) - \lambda \frac{P_{t+j}}{(1+R_{t,t+j})^j} = 0 \tag{34}$$

$$\frac{\delta L}{\delta c_{t+j+1}} = \beta^{j+1} U_c(c_{t+j+1}) - \lambda \frac{P_{t+j+1}}{(1+R_{t,t+j+1})^{j+1}} = 0 \tag{35}$$

Las C.P.O (34) y (35) pueden reescribirse de la siguiente manera:

$$\beta^j U_c(c_{t+j}) = \lambda \frac{P_{t+j}}{(1+R_{t,t+j})^j} \tag{36}$$

$$\beta^{j+1} U_c(c_{t+j+1}) = \lambda \frac{P_{t+j+1}}{(1+R_{t,t+j+1})^{j+1}} \tag{37}$$

Dividiendo a (37) por (36), tenemos:

$$\frac{\beta^{j+1} U_c(c_{t+j+1})}{\beta^j U_c(c_{t+j})} = \frac{P_{t+j+1}}{P_{t+j}} \frac{(1+R_{t,t+j})^j}{(1+R_{t,t+j+1})^{j+1}} \tag{38}$$

Luego, haciendo uso de (15) y (30), se obtiene

$$\frac{\beta U_c(c_{t+j+1})}{U_c(c_{t+j})} = \frac{1}{(1+r_{t+j,t+j+1})} \tag{39}$$

A partir de (39), se obtiene en forma inmediata la ecuación de Euler, que viene dada por (40) y es una condición de optimalidad de notable importancia para la elección que lleva a cabo el individuo.

$$U_c(c_{t+j}) = \beta(1+r_{t+j,t+j+1}) U_c(c_{t+j+1}) \tag{40}$$

[11] Las decisiones se toman una sóla vez, en t, y son óptimas para los infinitos períodos. En este sentido, la previsión perfecta juega un rol clave.

La ecuación de Euler resume la condición que debe cumplir la decisión del individuo para que sea óptima. Teniendo en cuenta que $\beta = \frac{1}{1+\rho}$, y dado que ha supuesto que la utilidad marginal del consumo es decreciente, entonces tal ecuación muestra que si la tasa de interés real de la economía es mayor que la tasa de impaciencia que tiene el individuo, entonces éste elegirá un sendero de consumo creciente. Puede verse que en este caso c_{t+j} será menor que c_{t+j+1} para todo j. Esta conclusión puede comprenderse de manera intuitiva teniendo en cuenta que la tasa de impaciencia es el costo que tiene para el individuo dejar de consumir en el presente para aumentar su consumo en el futuro, mientras que la tasa de interés real es la ganancia de esa espera. Por lo tanto, si r supera a ρ, al individuo le compensa esperar para consumir, y así obtener una mayor nivel de utilidad. La variable que actúa como un mecanismo de transmisión de consumo en el tiempo son los bonos[12]. Conclusiones opuestas podrían obtenerse para el caso en que r sea menor a ρ, en cuyo caso el individuo elegiría un sendero de consumo decreciente.

Hallaremos ahora la tasa marginal de sustitución entre la tenencia de saldos reales y el consumo de bienes, que viene dada por el cociente de las respectivas utilidades marginales. Para ello buscamos la condición de primer orden respecto a los saldos reales, recordando que $m_t = P_t M_t$:

$$\frac{\delta L}{\delta m_{t+j}} = \beta^j U_m(m_{t+j}) - \lambda \frac{P_{t+j}}{(1+R_{t,t+j})^j} \frac{R_{t+j,t+j+1}}{(1+R_{t+j,t+j+1})} = 0 \tag{41}$$

Reescribiendo (41), se tiene

$$\beta^j U_m(m_{t+j}) = \lambda \frac{P_{t+j}}{(1+R_{t,t+j})^j} \frac{R_{t+j,t+j+1}}{(1+R_{t+j,t+j+1})} \tag{42}$$

Finalmente, dividiendo a (42) por (36), se obtiene la tasa marginal de sustitución buscada:

$$TMS_{m,c} = \frac{U_m(m_{t+j})}{U_c(c_{t+j})} = \frac{R_{t+j,t+j+1}}{(1+R_{t+j,t+j+1})} \tag{43}$$

Vemos entonces que la tasa marginal de sustitución entre m y c es equivalente al costo de oportunidad de mantener dinero en cartera. Este costo de oportunidad puede ser interpretado de la siguente manera: demandar una unidad

[12] Por lo tanto, la ecuación de Euler podría obtenerse a partir de la condición de primer orden respecto a b_{t+j}, haciendo uso de (34) y (35). Esto es así dado que los bonos constituyen el activo que vincula las utilidades marginales del consumo en los distintos períodos.

de dinero en t+j permite incrementar el consumo en t+j+1; sin embargo, esto trae un sacrificio de consumo presente, que puede ser interpretado como el consumo en t+j+1 implícito en la tasa de interés a la cual se renunció, que es igual al precio del bien en t+j multiplicado por la tasa de interés nominal entre t+j y t+j+1, dividido por el precio del bien en t+j+1 (que era el momento en el que el bien podía ser consumido), descontado por la tasa de interés real, de lo que surge el valor $\frac{R_{t+j,t+j+1}}{(1+R_{t+j,t+j+1})}$[13].

Si la utilidad marginal del dinero es cero, la única forma de mantener dinero en cartera consiste en que el costo de oportunidad de mantenerlo en ella sea nulo, es decir, $\mathrm{R}_{t+j,t+j+1} = 0$. De la misma manera, cuando la tasa de interés nominal es positiva, el dinero tiene que brindar algún servicio adicional al de trasladar consumo en el tiempo para que exista una demanda positiva de tal activo, dado que para aquella función hay otros activos que lo denominan, que son los bonos.

Demanda de dinero

A partir de la expresión para la tasa marginal de sustitución entre saldos reales y consumo puede hallarse la función de demanda de dinero del agente representativo, la cual tendrá validez para un modelo con las especificaciones dadas anteriormente. De (43), trasponiendo términos (y omitiendo el subíndice j) se tiene

$$U_m(m_t) = U_c(c_t)\frac{R_{t,t+1}}{(1+R_{t,t+1})} \tag{44}$$

Luego, de (44), podemos pasar al miembro de la derecha la función de utilidad como su inversa, obteniéndose

$$m_t^D = U_m^{-1}[U_c(c_t)\frac{R_{t,t+1}}{(1+R_{t,t+1})}] \tag{45}$$

[13]Obsérvese que

$$\begin{aligned} TMS_{m,c} &= \frac{P_{t+j}}{P_{t+j+1}}R_{t+j,t+j+1}\frac{1}{1+r_{t+j,t+j+1}} \\ &= \frac{P_{t+j}}{P_{t+j+1}}R_{t+j,t+j+1}\frac{P_{t+j+1}}{P_{t+j}}\frac{1}{1+R_{t+j,t+j+1}} \\ &= \frac{R_{t+j,t+j+1}}{(1+R_{t+j,t+j+1})} \end{aligned}$$

lo que constituye la función de demanda de dinero del agente representativo. Podemos ver que un aumento en el consumo provoca un descenso en la utlidad marginal del consumo, lo que implica un aumento en la cantidad demandada de dinero (por la función inversa especificada). Esta conclsión es intuitiva, dado que para consumir una mayor cantidad de bienes se necesita de una mayor liquidez, por lo que la tenencia de saldos reales tendería a ser mayor. Asimismo, un aumento de la tasa de interés nominal implica una disminución en la cantidad demandada de dinero. Esta conclusión también es intuitivamente obvia, ya que un aumento de la tasa de interés hace más atractivo a los bonos, que son el activo alternativo al dinero, por lo que la demanda de éste tendería a reducirse. En general, la función de demanda de dinero del agente viene dada por

$$m_t^D = m(c_t, R_{t,t+1}) \tag{46}$$

siendo

$$\frac{\delta m^D}{\delta c} > 0$$

$$\frac{\delta m^D}{\delta R} < 0$$

Modelo de Ramsey con dinero

Hasta este momento, hemos supuesto que la producción de bienes en la economía venía dada de manera exógena. Este es un supuesto que de ninguna manera se ajusta a la realidad. De hecho, la inversión en bienes de capital tiene un rol fundamental en la explicación del crecimiento de las economías. Por lo tanto, en esta sección levantaremos el supuesto de que la producción se determina de manera exógena, y supondremos que ésta depende del stock de capital real, k, acumulado en el período anterior. Para simplificar, supondremos que los individuos no pueden demandar bonos, por lo que la única manera que tienen de trasladar consumo en el tiempo es mediante acumulación de capital o de dinero. El capital se deprecia a una tasa δ. El resto de los supuestos se mantienen iguales, por lo que la estructura de decisión será similar.

En este nuevo caso, el problema de maximización del agente consiste en

$$\mathrm{Max} \sum \beta^t \mathrm{U}(\mathrm{c_t}, \mathrm{m_t}) \quad \text{s.a.} \quad \mathrm{P_t f(k_{t-1}) = P_t c_t + P_t[k_t - (1-\delta)k_{t-1}] + M_t - M_{t-1}}$$

La función lagrangiana del problema es

$$L = \sum \beta^t U(c_t, m_t) + \lambda_t [P_t f(k_{t-1}) - P_t c_t - P_t k_t + P_t k_{t-1} - P_t \delta k_{t-1} - M_t + M_{t-1}]$$

Para el problema de maximización dado, las condiciones de primer orden vienen dadas por (47) y (48):

$$\frac{\delta L}{\delta c_t} = \beta^t U_c(c_t) - \lambda_t P_t = 0 \rightarrow \beta^t U_c(c_t) = \lambda_t P_t \tag{47}$$

$$\frac{\delta L}{\delta k_t} = \lambda_{t+1} P_{t+1}[f'(k_t) + 1 - \delta] - \lambda_t P_t = 0 \tag{48}$$

$$\frac{\delta L}{\delta c_{t+1}} = \beta^{t+1} U_c(c_{t+1}) - \lambda_{t+1} P_{t+1} = 0 \tag{49}$$

De (48) puede deducirse el valor de $\lambda_t P_t$, e introduciendo ese resultado en (47), se tiene

$$\beta^t U_c(c_t) = \lambda_{t+1} P_{t+1}[1 - \delta + f'(k_t)] \tag{50}$$

Análogamente, de (49) puede deducirse el valor de $\lambda_{t+1} P_{t+1}$, y sustituyendo en (50), se tiene

$$\beta^t U_c(c_t) = \beta^{t+1} U_c(c_{t+1})[1 - \delta + f'(k_t)] \tag{51}$$

La ecuación (51) es la **Ecuación de Euler** para el modelo de Ramsey con dinero. Acumular una unidad más de capital tiene un costo y un beneficio. El costo viene dado por el sacrificio de consumo presente que tal acción provoca. El beneficio viene dado por el hecho de que una unidad más de capital permite consumir en el período siguiente esa unidad más la productividad marginal neta que aquella rinde (que viene dada por la productividad marginal bruta, $f'(k)$, menos la tasa de depreciación, δ). Este beneficio se descuenta por β (el factor de descuento), dado que al existir una cierta impaciencia consumir una unidad en el presente no tiene estrictamente el mismo valor que consumir una unidad en el futuro. La ecuación de Euler muestra que la acumulación de capital óptima viene dada por el punto en el los costos marginales de acumular capital se igualan a los beneficios marginales.

Dado que en este modelo el dinero sigue dando utilidad a los agentes, puede buscarse una condición para que la tenencia de saldos reales sea óptima. La C.P.O respecto a la demanda de saldos reales viene dada por (52), teniendo en cuenta que $m_t = \frac{M_t}{P_t}$.

$$\frac{\delta L}{\delta m_t} = \beta^t U_m(m_t) - \lambda_t P_t + \lambda_{t+1} P_t = 0 \tag{52}$$

Para continuar con nuestro desarrollo analítico nos resultará útil la siguiente expresión:

$$\lambda_{t+1}P_t = \lambda_{t+1}P_{t+1}\frac{P_t}{P_{t+1}}$$

Luego, teniendo en cuanta la anterior ecuación, y sustituyendo en (52) por (47) y por el valor de $\lambda_{t+1}P_{t+1}$ que surge de (49), se tiene

$$U_m(m_t) = U_c(c_t) - \beta U_c(c_{t+1})\frac{P_t}{P_{t+1}} \tag{53}$$

la cual puede reexpresarse como

$$U_c(c_t) = U_m(m_t) + \beta U_c(c_{t+1})\frac{P_t}{P_{t+1}} \tag{54}$$

La ecuación (54) es una nueva ecuación de Euler, que en este caso relaciona la demanda de saldos reales con el consumo presente y el consumo futuro. Al acumularse una unidad más de saldos monetarios, se sacrifica la utilidad marginal que hubiera dado consumir esa unidad en el presente, lo que constituye un costo marginal. Sin embargo, esa decisión también produce un beneficio marginal, dado que la tenencia de saldos reales ocasiona una utilidad positiva, y además ese dinero puede ser utilizado en el futuro para consumir bienes. En este caso, esta última utilidad marginal no sólo se descuenta por la tasa de impaciencia, sino también por la tasa de inflación, dado que el dinero es un activo que está expuesto a esa tasa. Nuevamente, la ecuación de Euler indica que se acumularán saldos reales hasta el punto en que el beneficio marginal de acumular tales saldos se iguale al costo marginal. Pueden obtenerse conclusiones congruentes con el análisis de la demanda de dinero realizado en el apartado anterior. Cuanto mayor sea la tasa de inflación, menor será la utilidad marginal de acumular saldos reales, dado que la cantidad que podrá ser consumida en el futuro será menor. Por lo tanto, la demanda de dinero tenderá a ser baja en períodos con alta inflación.[14]

[14]En la presente nota se deja de lado el estudio de la dinámica de este modelo en una situación de estado estacionario. Podría demostrarse que en el estado estacionario los niveles de consumo y acumulación de capital son independientes de la oferta monetaria decidida por el Banco Central, lo que da la idea de un modelo con una dinámica **superneutral**.