Una introducción a los modelos de ciclo de negocios

Pedro Elosegui*

Mayo 2007

Introducción

Los ciclos económicos son definidos en general como fluctuaciones recurrentes del nivel de producto[1], incluyendo variaciones asociadas del resto de las variables económicas (consumo, inversión, etc.). Esta definición implica considerar que la evolución de la economía presenta una tendencia que muestra el crecimiento de largo plazo y variaciones que se reflejan en fluctuaciones recurrentes de corto plazo alrededor de la mencionada tendencia. A pesar de que el estudio de los ciclos económicos es un tópico recurrente en la literatura económica desde hace más de un siglo, el análisis sistemático de los ciclos económicos en un marco teórico de equilibrio y bajo el supuesto de expectativas racionales es algo mucho más reciente. Este enfoque de fluctuaciones cíclicas como resultado de equilibrio de la evolución del sistema económico se asocia a la literatura denominada *"Real Business Cycle"* cuya principal referencia es el trabajo seminal de Kydland y Prescott (1972). Esta literatura establece un enfoque típico para el análisis del ciclo en un modelo de equilibrio general con agentes que forman sus expectativas de manera racional, asociado con una contrastación empírica entre la evolución de la economía real y el equilibrio artificial del modelo económico. En particular, los autores muestran que aproximadamente un 70% de las fluctuaciones económicas observadas en EEUU se explicarían en el modelo de ciclo real a partir del efecto de shocks tecnológicos. Estos hallazgos condujeron a un importante auge reciente de la literatura teórica y empírica del análisis de ciclos económicos.

El enfoque de estos modelos de ciclo económico se distinguen de los modelos keynesianos de la década del 30, ya que estos últimos se enfocaban más en la determinación del nivel de producto, analizando las políticas que el gobierno podía realizar en el corto plazo para afectar el nivel de dicha variable, sin un marco conceptual de equilibrio general. Paralelamente, se desarrolló una corriente de literatura económica acerca de teorías de crecimiento económico, que se enfocaron en el análisis de largo plazo. El enfoque del ciclo económico

*Estas notas sólo son una versión borrador.

[1] Cooley y Hansen (1995) "Frontiers of Business Cycle Research". Ed. Princeton.

real constituye una especie de síntesis entre ambas propuestas, ya que trata de analizar la evolución de la economía en el largo plazo y las fluctuaciones recurrentes (el ciclo) de corto plazo en un único marco conceptual de equilibrio general. Estas economías artificiales pueden utilizarse como laboratorios para ayudar a entender las fluctuaciones recurrentes que se observan en las economías reales. Obviamente, que el desafío que constituye la premisa de generar modelos que permitan simular el comportamiento real de las series temporales que caracterizan la evolución de la economía, se refleja en modelos económicos de considerable complejidad, que en muchos casos no tienen soluciones analíticas cerradas y requieren soluciones numéricas.

Los modelos prototípicos tienen la estructura de un modelo de crecimiento neoclásico a los que se le adicionan shocks que originan las fluctuaciones respecto a la tendencia de largo plazo. A estos shocks se le suman mecanismos de transmisión que agregan persistencia al transmitir y, en muchos casos amplificar en el tiempo los efectos del shock inicial. Entre los shocks más utilizados en la economía se destacan los tecnológicos (internet, computación, precios del petróleo, etc.), clima y desastres naturales, fiscales y monetarios (shocks inesperados a la política monetaria, gastos e impuestos, etc.), políticos (elecciones, regulaciones y leyes, etc.). Entre los mecanismos de transmisión se cuentan la sustitución intratemporal e intertemporal, precios y salarios rígidos (en general asociado con modelos new keynesian que estudian el rol de la política monetaria) y fricciones financieras (diferencias de información, crisis financieras, etc.).

El estudio de las fluctuaciones recurrentes de las variables económicas tiene una vertiente empírica, que supone el estudio de las fluctuaciones de las variables observadas y del co-movimiento entre las mismas para la economía bajo estudio. Por otro lado, existe una vertiente teórica que se relaciona con el estudio de modelos que permiten estudiar en laboratorio estos ciclos con el objetivo de que esta maqueta permita replicar y explicar de alguna manera las fluctuaciones observadas en las variables reales. El análisis empírico escapa al alcance de la presente nota, aunque será desarrollada en la parte práctica del curso. En estas notas se realizará una aproximación inicial a la problemática de la resolución teórica de los modelos de ciclo real típicos, empezando por un modelo simple, siguiendo por modelos más sofisticados. Por último, la contrastación empírica de los modelos desarrollados y en cierta medida la resolución de los mismos, excede el alcance de estas notas, aunque se muestra un esquema de los pasos necesarios para llevar adelante tal solución.

Empezaremos en la primer sección por desarrollar un modelo simple de ciclo real basado en Doepke et al. (2001). En la sección siguiente introducimos el modelo de Kydland y Prescott (1982), indicando los ingredientes esenciales de estos modelos. Seguidamente se soluciona el modelo de Brock y Mirman (1972)[2] que sería un indicativo de la estructura mínina de un modelo de ciclo real del cual puede obtenerse una solución analítica cerrada. Por último veremos la resolución del modelo de Christiano (2001) que utilizaremos para mostrar los

[2] Brock, W. y Mirman, L. (1972) "Optimal Economic Growth and Uncertainty: The Discounted Case". Journal of Economic Theory 4, 479-513.

pasos requeridos para avanzar en la solución del modelo.

Modelo Simple de Ciclo Real[3]

Supongamos un modelo de generaciones superpuestas:

$$U(c_t^t, c_{t+1}^t) = \ln c_t^t + \ln c_{t+1}^t \tag{1}$$

Los agentes tienen una oferta de trabajo fija y no se preocupan por el ocio. Reciben un salario w_t por ese trabajo cuando son jóvenes. Los agentes ahorran invirtiendo en capital k_t cuando joven. Este capital es alquilado a las empresas, que utilizan el mismo y como retorno pagan a los agentes una tasa de interés (alquiler), r_{t+1} que los agentes recibirán cuando son ancianos.

Agentes

Los agentes maximizan la función de utilidad sujeta a la restricción presupuestaria siguiente:

En el período t,

$$c_t^t + k_t = w_t. \tag{2}$$

En el período $t+1$,

$$c_{t+1}^t = (1 - \delta + r_{t+1})k_t. \tag{3}$$

En valor presente,

$$c_t^t + \frac{c_{t+1}^t}{(1 - \delta + r_{t+1})} = w_t. \tag{4}$$

De la optimización del agente, problema que denotaremos como {PH} surge:[4]

$$k_t = \frac{w_t}{2}. \tag{5}$$

Firmas

Las firmas optimizan beneficios, trabajando con una función de producción $f(l_t, k_t) = A_t l_t^{\alpha} k_{t-1}^{1-\alpha}$ que depende del capital (ofertado por el consumidor anciano) y el trabajo que es ofrecido inelásticamente por los jóvenes.

$$Max_{\{l_t, k_t\}}\{A_t l_t^{\alpha} k_{t-1}^{1-\alpha} - w_t l_t - r_t k_{t-1}\} \tag{6}$$

Este problema lo llamamos {PF} y las CPO son:

$$l_t : \alpha A_t l_t^{\alpha-1} k_{t-1}^{1-\alpha} - w_t = 0. \tag{7}$$

$$k_{t-1} : (\alpha - 1) A_t l_t^{\alpha} k_{t-1}^{-\alpha} - r_t = 0. \tag{8}$$

Luego, el equilibrio del mercado de bienes está dado por:

$$c_t^t + c_t^{t-1} + k_t = f(l_t, k_t) + (1 - \delta)k_{t-1}. \tag{9}$$

[3] Seguimos a Doepke et al (2001) ch. 9.

[4] Resolviendo por el método de Lagrange o simplemente reemplazando c_t^t y c_{t+1}^t en términos de capital y resolviendo para k_t.

En la función de producción, A_t es el componente aleatorio, nos va a dar una secuencia de observaciones aleatorias (shocks tecnológicos). Vamos a suponer más adelante, una forma para esta secuencia. Antes que esto definimos el equilbrio competitivo.

Un *equilibrio competitivo* en esta economía se define como una secuencia de precios $\{w_t \ y \ r_t\}_{t=0}^{\infty}$, la elección de los agentes $\{c_t, k_t, l_t\}_{t=0}^{\infty}$ con $l_t = 1$ y la secuencia de decisiones de las empresas, $\{k_t^d, l_t^d\}_{t=0}^{\infty}$ tal que:

(a) Dada la secuencia de precios contingentes los agentes (hogares) resuelven {PH}, eligiendo la secuencia óptima de cantidades;

(b) Dada la secuencia contingente de precios las empresas resuelven {PF} elijiendo las cantidades óptimas;

(c) Los mercados están en equilibrio, es decir:

Mercado de capital: $k_t^d = k_t$

Mercado de trabajo: $l_t^d = l_t$

Mercado de bienes: $c_t^t + c_t^{t-1} + k_t = f(l_t, k_t) + (1-\delta)k_{t-1}$.

(d) Las expectativas se cumplen en equilibrio.

A partir de la solución del agente y considerando la CPO de las firmas se obtiene la ecuación de movimiento para el capital, esta ecuación constituye la ecuación del ciclo.

$$k_t = \frac{w_t}{2} = \frac{\alpha A_t l_t^{\alpha-1} k_{t-1}^{1-\alpha}}{2}. \tag{10}$$

La dinámica de la acumulación del capital esta dada por esta ecuación que nos permite estudiar la estabilidad y analizar el efecto de cambios en A_t sobre el stock de capital. En este caso, el shock proviene de cambios tecnológicos en la función de producción y el mecanismo de ajuste intertemporal es la condición de Euler.

De hecho esta ecuación se puede linearizar, suponiendo que $l_t = 1$, y aplicando logaritmo natural surge que,

$$\ln k_t = \ln\frac{\alpha}{2} + \ln A_t + (1-\alpha)\ln k_{t-1}, \tag{11}$$

entonces,

$$\ln k_t = \gamma + \ln A_t + (1-\alpha)\ln k_{t-1}, \tag{12}$$

donde $\gamma = \ln\frac{\alpha}{2}$.

En estado estacionario,

$$\ln \overline{k} = \gamma + \ln \overline{A} + (1-\alpha)\ln \overline{k}, \tag{13}$$

de donde $\ln \overline{k} = \frac{\gamma + \ln \overline{A}}{\alpha}$.

Restando miembro a miembro, surge que la evolución de la economía como desvío del estado estacionario será:

$$\ln k_t - \ln \overline{k} = (\ln A_t - \ln \overline{A}) + (1-\alpha)(\ln k_{t-1} - \ln \overline{k}), \tag{14}$$

de donde la solución analítica viene dada por:

$$\ln k_t - \ln \overline{k} = \sum_{s=0}^{\infty}(1-\alpha)^{t-s}(\ln A_s - \ln \overline{A}) + (1-\alpha)^t(\ln k_0 - \ln \overline{k}), \tag{15}$$

Que resultados surgen de este modelo tan simple?

1) A partir de la condición de equilibrio del mercado de bienes surge que:

$$C_t = c_t^t + c_t^{t-1}$$

$$I_t = k_t - (1-\delta)k_{t-1}$$

Además,

$$Y_t = f(l_t, k_t)$$

Entonces,

$$C_t = Y_t - I_t$$

En tanto, reemplazando k_t, se tiene que,

$$I_t = \frac{\alpha A_t l_t^{\alpha-1} k_{t-1}^{1-\alpha}}{2} - (1-\delta)k_{t-1} \tag{16}$$

$$C_t = A_t l_t^{\alpha} k_{t-1}^{1-\alpha} - \frac{\alpha A_t l_t^{\alpha-1} k_{t-1}^{1-\alpha}}{2} + (1-\delta)k_{t-1} \tag{17}$$

Si se calcultan las elasticidades del consumo y la inversión ante cambios en la productividad (A_t) se tiene lo siguiente

$$\frac{dC_t}{dA_t}\frac{A_t}{C_t} = \frac{(1-\frac{\alpha}{2})A_t l_t^{\alpha-1} k_{t-1}^{1-\alpha}}{(1-\frac{\alpha}{2})A_t l_t^{\alpha-1} k_{t-1}^{1-\alpha} + (1-\delta)k_{t-1}} < 1 \tag{18}$$

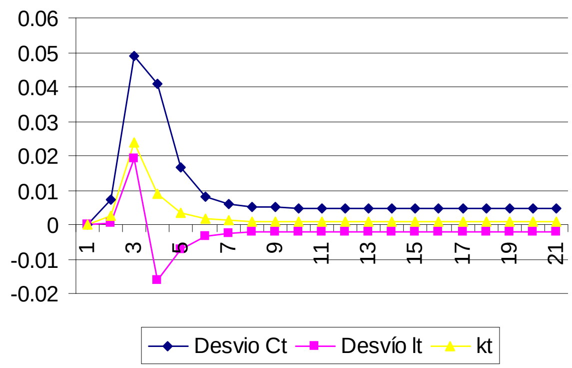
$$\frac{dI_t}{dA_t}\frac{A_t}{I_t} = \frac{(\frac{\alpha}{2})A_t l_t^{\alpha-1} k_{t-1}^{1-\alpha}}{(\frac{\alpha}{2})A_t l_t^{\alpha-1} k_{t-1}^{1-\alpha} - (1-\delta)k_{t-1}} > 1 \tag{19}$$

En consecuencia, si bien tanto el consumo como la inversión son procíclicos, la inversión es sustancialmente más procíclica ante cambios tecnológicos. Este resultado coincide, en términos generales, con lo que indica la evidencia empírica disponible.

Podemos también utilizar este modelo sencillo para "simular" el ciclo, usando como unica herramienta una planilla excel. Si se supone un $\alpha = 0.7$ y un $\delta = 0.08$, con $k_0 = 0.22$ y se supone además que el shock sobre la función de producción se comporta de la siguiente manera:

$$A_t = \overline{A} + \varepsilon_t = 1 + \varepsilon_t \tag{20}$$

donde, $\varepsilon_t \sim [-0.1, 0.1]$, entonces se puede simular el siguiente ciclo: (ver planilla excel bc).



Estructura del modelo de ciclo real

En esta sección introducimos la estructura básica de un modelo de ciclo real, para una economía cerrada y sin dinero, siguiendo al modelo de Kydland y Prescott (1982).

La economía tiene agentes (hogares) representativos que viven por infinitos períodos. Estos agentes son los dueños de las empresas de la economía. Reciben una dotación de tiempo ($=1$) que pueden destinar a trabajar h_t o a disfrutar del ocio l_t. Los hogares son los dueños del stock de capital inicial k_0, y reciben una dotación (la misma) de acciones de las empresas. Las empresas rentan en cada período el capital de los hogares y utilizan trabajo, que proviene también de los hogares, para producir el bien final y_t. Los hogares en cada período reciben el retorno del alquiler de capital realizado a las empresas y cobran un salario real w_t por las horas trabajadas en las mismas. Estas fuentes de ingreso son utilizadas para consumir c_t o para acumular más capital.

La acumulación de capital depende entonces del nivel de inversión (i_t) y muestra la siguiente evolución en el tiempo,

$$k_{t+1} = (1-\delta)k_t + i_t, \tag{21}$$

siendo δ la tasa de depreciación.

Se supone que en la economía los mercados operan de manera competitiva, con numerosas empresas ofreciendo el bien que es homogéneo, recibiendo los precios de insumos, salario real y tasa de interés real (w_t y r_t) y producto ($p_t = 1$) como dados.

El problema de las empresas (numerosas firmas idénticas), consiste en maximizar sus beneficios. La función de producción esta caracterizada por una tecnología F que combina capital (k_t^d) y trabajo (l_t^d) bajo los supuestos usuales[5] con un nivel de productividad dado por el parámetro z_t (que puede y va a ser en general aleatorio) y rendimientos constantes a escala.

[5] Condiciones de INADA.

$$Y_t = e^{z_t} F(k_t^d, l_t^d), \tag{22}$$

donde el shock de productividad es la fuente de incertidumbre en esta economía y evoluciona de la siguiente manera:

$$z_{t+1} = \rho z_t + \varepsilon_{t+1}, \tag{23}$$

con $\rho \epsilon$ (0,1) y donde ε está distribuído normalmente con media cero y varianza σ_ε^2.

Dada una secuencia de precios $\{p_t = 1, w_t \ y \ r_t\}$ las empresas eligen k_t^d, l_t^d de manera de maximizar beneficios.

$$Max_{\{k_t^d, l_t^d\}} \left\{ p_t e^{z_t} F(k_t^d, l_t^d) - w_t l_t - r_t k_t \right\}, \tag{24}$$

denominaremos a este problema el problema de las firmas o *{PF}*.

En tanto, los hogares resuelven su maximización de utilidad sujeto a la restricción de presupuesto y la evolución del *stock* de capital. Este problema que denominaremos *{PH}* viene dado entonces por,

$$Max_{\{c_t \ k_{t+1}, l_t\}} E_t \left\{ \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t, 1 - l_t) \right\}, \tag{25}$$

s.a. para todo período t.:

$$c_t + k_{t+1} = w l_t + r_t k_t + (1 - \delta) k_t \tag{26}$$

$$c_t, k_{t+1}, l_t > 0 \text{ y } k_0 \text{ dado.}$$

Debemos notar que en este ejercicio podríamos haber incluído al beneficio de las empresas como una fuente adicional de ingreso para los agentes, pero el supuesto de rendimientos constantes a escala hace que estos sea innecesario. Por qué?

Equilibrio competitivo: Un equilibrio competitivo en esta economía es una secuencia de precios contingentes[6] $\{w_t \ y \ r_t\}_{t=0}^{\infty}$, la elección de los agentes $\{c_t \ k_{t+1}, l_t\}_{t=0}^{\infty}$ que también es contingente y la secuencia de decisiones de las empresas, $\{k_t^d, l_t^d\}_{t=0}^{\infty}$ tal que:

(a) Dada la secuencia de precios contingentes los agentes (hogares) resuelven {PH}, eligiendo la secuencia óptima de cantidades;

(b) Dada la secuencia contingente de precios las empresas resuelven {PF} elijiendo las cantidades óptimas;

(c) Los mercados están en equilibrio, es decir:

Mercado de capital: $k_t^d = k_t$

Mercado de trabajo: $l_t^d = l_t$

Mercado de bienes: $c_t + k_{t+1} = e^{z_t} F(k_t^d, l_t^d) + (1 - \delta) k_t$

(d) Las expectativas (que podemos asumir son racionales) se cumplen en equilibrio.

[6] Asumimos $p_t = 1$.

Bajo los supuestos realizados las condiciones de primer orden para {PH}, están dadas por:

$$c_t : \qquad \beta^t u_c(c_t, 1 - l_t) - \lambda_t = 0, \tag{27}$$

$$l_t : \qquad -\beta^t u_l(c_t, 1 - l_t) - \lambda_t w_t = 0, \tag{28}$$

$$k_{t+1} : \qquad -\lambda_t + E_t\{\lambda_{t+1}[r_{t+1} + (1 - \delta)]\} = 0, \tag{29}$$

Evaluando 27 en $t + 1$, tenemos:

$$c_{t+1} : \qquad \beta^{t+1} u_c(c_{t+1}, 1 - l_{t+1}) - \lambda_{t+1} = 0, \tag{30}$$

de donde se obtienen las siguientes condiciones:

$$\frac{u_l(c_t, 1 - l_t)}{u_c(c_t, 1 - l_t)} = w_t, \tag{31}$$

que indica la condición de equilibrio intratemporal, constituyendo uno de los mecanismos de transmisión del modelo. En particular si hay un shock en la economía que reduce el salario real el agente reacciona ajustando su consumo de ocio aumentando el mismo de manera de disminuir en términos relativo la utilidad marginal del trabajo para mantener la igualdad en el óptimo. Esta caída del trabajo (aumento del consumo de ocio) genera menor producción propagando la recesión inicial.

Por otro lado, combinando 27, 30 y 29, obtenemos la condición de Euler o equilibrio intertemporal,

$$u_c(c_t, 1 - l_t) = E_t\{\beta^t u_c(c_{t+1}, 1 - l_{t+1})[r_{t+1} + (1 - \delta)]\}, \tag{32}$$

que indica que cualquier shock que afecte el nivel de utilidad marginal del consumo en el primer período lleva a ajustes en las variables correspondientes al período posterior de manera de mantener el equilibrio. De esta manera se propaga el efecto inicial en el tiempo en la medida que los agentes suavizan el nivel de consumo intertemporalmente.

A estas ecuaciones se agregan las condiciones de óptimo que se derivan del problema de las firmas, es decir:

$$w_t = e^{z_t} F_l(k_t^d, l_t^d) \tag{33}$$

$$r_t = e^{z_t} F_k(k_t^d, l_t^d) \tag{34}$$

Uno de los problemas usuales con estos modelos de ciclo es que es casi imposible encontrar soluciones cerradas para los mismos de manera de poder realizar estática comparativa. Note que si agregamos estas ecuaciones de óptimo en un sistema que nos permita solucionar el modelo tendríamos lo siguiente:

$$u_c(c_t, 1 - l_t) = E_t\{\beta^t u_c(c_{t+1}, 1 - l_{t+1})[r_{t+1} + (1 - \delta)]\},$$

$$\frac{u_l(c_t, 1 - l_t)}{u_c(c_t, 1 - l_t)} = w_t,$$

$$w_t = e^{z_t} F_l(k_t, l_t),$$
$$r_t = e^{z_t} F_k(k_t, l_t),$$
$$k_{t+1} = (1-\delta)k_t + i_t,$$
$$c_t + i_t = e^{z_t} F(k_t, l_t),$$
$$z_{t+1} = \rho z_t + \varepsilon_{t+1},$$

Este es un sistema de siete ecuaciones en siete incógnitas: $c_t, i_t, l_t, k_t, r_t, w_t, z_t$. El sistema puede comprimirse considerando el vector $s_t = \{c_t, i_t, l_t, k_t, r_t, w_t, z_t\}$, compactando el sistema a la siguiente relación:

$$E_t[f(s_{t+1}, s_t)] = 0 \tag{35}$$

Dado que varias de las ecuaciones del sistema son no lineales, por ej. la función de producción, el sistema anterior constituye un sistema de ecuaciones en diferencias no lineales y estocástico. Analíticamente es, en general, muy dificil resolver por lo cual se opta por aproximar una solución lineal a un equilibrio de estado estacionario determinístico. La estrategia de solución implica entonces:

(a) Usar la versión determinística del problema (sin incertidumbre) para encontrar una expresión de estado estacionario para las variables de interés. Como estas dependerán de los parámetros del modelo, los mismos se pueden *calibrar* a las características de la economía bajo estudio.

(b) Resolver el modelo mediante una aproximación lineal alrededor del equilibrio.

(c) Generar series de tiempo que puedan compararse con la evidencia empírica disponible de la economía real.

Empezaremos por analizar un model simple que permite una solución analítica, luego veremos uno más complicado que requiere de una aproximación lineal y solución computacional.

El Modelo de Brock y Mirman (1972)

El modelo de Brock y Mirman (1972), brinda un esquema simplificado y (relativamente) sencillo que permite introducir no sólo la estructura propia de este tipo de modelos sino también la metodología de resolución de los mismos.

En este caso, utilizamos un modelo de agente representativo, donde se supone una economía cerrada, donde el capital se deprecia en un 100% cada período y la población es constante y puede ser normalizada a $L = 1$. Se supone además que no hay crecimiento tendencial de la tecnología.

La función de utilidad es logarítmica en el consumo c_t, en tanto se supone que los agentes no valoran el ocio. La función de producción es de tipo Cobb Douglas, $Y_t{=}A_t k_t^{\alpha}$. El agente representativo decide los niveles óptimos de consumo y capital, optimizando la siguiente ecuación:

$$Max_{\{c_t \;\; k_{t+1}\}} E_t \left\{ \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \log c_t \right\} \tag{36}$$

sujeto a,

$$c_t + k_{t+1} = A_t k_t^\alpha \tag{37}$$

con k_{t-1} dado y $c_t \geqq 0$ y $k_{t+1} \geqq 0$

Luego de resolver las condiciones de primer orden, la Ecuación de Euler para este problema esta dada por,

$$\frac{1}{c_t} = E_t \left[\frac{\beta\alpha A_{t+1} k_{t+1}^{\alpha-1}}{c_{t+1}} \right]. \tag{38}$$

Esto nos da una ecuación en diferencias para c_t. La resolución surge de asumir que el agente va a consumir una fracción constante del producto, $c_t = \omega A_t k_t^\alpha$, hipótesis que debe chequearse como correcta reemplazando la solución postulada en la ecuación en diferencias:

$$\frac{1}{\omega A_t k_t^\alpha} = E_t \left[\frac{\beta\alpha A_{t+1} k_{t+1}^{\alpha-1}}{\omega A_{t+1} k_{t+1}^\alpha} \right]. \tag{39}$$

Simplificando, se obtiene:

$$1 = \frac{\beta\alpha A_t k_t^\alpha}{k_{t+1}}. \tag{40}$$

De donde,

$$k_{t+1} = \beta\alpha A_t k_t^\alpha. \tag{41}$$

Reemplazando en la condición de equilibrio del mercado de bienes,

$$c_t = A_t k_t^\alpha - k_{t+1} = (1-\beta\alpha) A_t k_t^\alpha. \tag{42}$$

Entonces, la solución c_t esta dada por:

$$c_t = (1-\alpha\beta) A_t k_t^\alpha \tag{43}$$

coincidiendo con nuestra solución propuesta, siendo $\omega = 1 - \alpha\beta$.

Esto nos lleva al primer resultado de este modelo: el consumo, al igual que el ahorro, es proporcional al ingreso. El nivel de producto en equilibrio estará dado por:

$$Y_t = A_t k_t^\alpha = A_t(\beta\alpha A_{t-1} k_{t-1}^\alpha)^\alpha = A_t(\beta\alpha Y_{t-1})^\alpha. \tag{44}$$

En términos lineales, aplicando logaritmos de ambos lados de la ecuación, se obtiene:

$$y_t = \gamma + \alpha y_{t-1} + a_t, \tag{45}$$

donde, $y_t = \ln Y_t$, $a_t = \ln A_t$, mientras que $\gamma = \alpha \ln(\beta\alpha)$. En estado estacionario, se cumple que:

$$\overline{y} = \gamma + \alpha\overline{y} + \overline{a}, \tag{46}$$

de donde,

$$\overline{y} = \frac{\gamma + \overline{a}}{1-\alpha}, \tag{47}$$

entonces, restando miembro a miembro ambas ecuaciones, se obtiene:

$$y_t - \overline{y} = \alpha(y_{t-1} - \overline{y}) + a_t - \overline{a}, \tag{48}$$

sustituyendo recursivamente, se llega a la siguiente ecuación:

$$y_t - \overline{y} = \alpha^t(y_0 - \overline{y}) + \sum_{s=0}^{\infty}(a_s - \overline{a})\alpha^{t-s} \tag{49}$$

Es posible demostrar que un shock permanente impacta positiva y más que proporcionalmente sobre el ingreso permante:

$$\frac{d\overline{y}}{d\overline{a}} = \frac{1}{1-\alpha}, \tag{50}$$

De donde surge que un shock tecnológico lleva a más acumulación de capital y producto amplificando por lo tanto el efecto inicial. En tanto que un cambio transitorio, de a_t, solo genera un efecto en la proporción α.

Por lo tanto para explicar un nivel de persistencia mayor, los shocks de productividad deben ser más persistentes. Además, como $\alpha < 1$, la dinámica interna del modelo es débil. Por lo que se hace necesario algun mecanismo de propagación adicional.[7]

Una introducción a la resolución de modelos

El modelo de Christiano (2001)[8]

Como ya mencionamos, la resolución de modelos estocásticos dinámicos de equilibrio general no es, en general una tarea tan sencilla como la que se observa al resolver el modelo desarrollado en la sección anterior. Por el contrario, aún agregando pequeñas cambios surgen dificultades para encontrar una solución analítica cerrada. Como también mencionáramos, en general las soluciones a los modelos conforman un sistema de ecuaciones estocásticas en diferencias no lineales. Los sistemas de ecuaciones lineales son relativamente más sencillos de resolver, por ende se utiliza una linealización del sistema de soluciones original alrededor de algún equilibrio conocido (por ejemplo, el estado estacionario de la versión no estocástica del modelo). Adicionalmente, se utiliza el método de coeficientes indeterminados para encontrar la solución final. Los pasos claves para la metodología de resolución son los siguientes:

[7] Una alternativa es considerar modelos con costos de ajuste, donde desvíos importantes en las decisiones previas de inversión y empleo sean muy costosas:

$$\frac{d}{2}\left(K_t - K_{t-1}\right)^2$$

$$\frac{d}{2}\left(N_t - N_{t-1}\right)^2$$

Esto generaría modelos con mayor persistencia. Sin embargo, estos modelos simples aún distan de poder replicar los ciclos económicos, incluso en economías estables y desarrolladas.

[8] Christiano, L. (2001) "Solving Dynamic Equilibrium Models by a Method of Undetermined Coefficients," Mimeo, Northwestern University.

(a) Encontrar las condiciones necesarias que caracterizan el equilibrio (CPO)

(b) Encontrar el equilibrio de estado estacionario del modelo no estocástico.

(c) Linearizar (o más precisamente log-linearizar) las condiciones encontradas en (a) alrededor de los valores de equilibrio de estado estacionario encontrados en (b) Se utiliza la aproximación de Taylor, puede usarse para ello el método de Uhlig (2001)[9].

(d) Resolver las leyes de movimiento recursivas utilizando el método de coeficientes indeterminados.

(e) Analizar la solución a través de funciones de impulso respuesta y propiedades de segundo orden.

Condiciones necesarias de equilibrio (a)

El ejemplo que vemos a continuación nos permite analizar los pasos (a) a (d), mientras que el paso (e) requiere de soluciones numéricas aplicadas. [10] Aquí desarrollaremos un modelo extraído de Christiano (2001), en el cuál las preferencias están dadas por:

$$U = E_0 \left\{ \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \frac{C_t^{1-\gamma}}{1-\gamma} \right\}. \tag{51}$$

La tecnología de producción está dada por,

$$Y_t = A_t^{1-\alpha} K_t^{\alpha} N_t^{1-\alpha}, \tag{52}$$

con $\alpha \epsilon (0,1)$ y

$$\ln A_{t+1} = \rho \ln A_t + \epsilon_{t+1}, \tag{53}$$

siendo $\epsilon_{t+1} \tilde{} N(0, \sigma_\epsilon^2)$ y $\rho \epsilon (0,1)$. Suponemos, además que la población puede normalizarse en 1. De esta manera estamos en condiciones de resolver los pasos (a) a (d).

Para el paso (a), el equilibrio en esta economía si se supone una tasa de depreciación δ, estará dado por las siguientes condiciones de primer orden (Resolver como ejercicio):

$$C_t^{-\gamma} = \beta E_t \left[C_{t+1}^{-\gamma} (\alpha A_{t+1}^{1-\alpha} K_{t+1}^{1-\alpha} + (1-\delta)) \right], \tag{54}$$

$$C_t + K_{t+1} = A_t^{1-\alpha} K_t^{\alpha} + (1-\delta) K_t, \tag{55}$$

junto con la condición de transversalidad, y el sendero aleatorio de A_t.

[9] Uhlig, H. (1999) " A Toolkit for Analyzing Nonlinear Stochastic Models Easely". Computational Methods for the Study of Dynamic Economies, Marinon and Scott Ed.

[10] Ver Oviedo, Marcelo (2006).

El estado estacionario (b)

El paso (b) requiere calcular el equilibrio no estocástico de estado estacionario. Es decir, aquel en el cuál se verifica que $K_t = K_{t+1} = \overline{K}$ y $A_t = A_{t+1} = \overline{A}$, donde, dado el proceso estocástico de A_t, el valor de estado estacionario es $\overline{A} = 1$.

El estado estacionario está dado entonces por:

$$\overline{C}^{-\gamma} = \beta \left[\overline{C}^{-\gamma}(\alpha\overline{A}^{1-\alpha}\overline{K}^{1-\alpha} + (1-\delta))\right], \tag{56}$$

es decir,

$$1 = \beta \left[\alpha\overline{AK}^{1-\alpha} + (1-\delta)\right], \tag{57}$$

o,

$$\frac{1}{\beta} = \alpha\overline{AK}^{1-\alpha} + (1-\delta). \tag{58}$$

De esta manera, recordando que suponemos $\overline{A} = 1$, el nivel de capital de estado estacionario está dado por:

$$\overline{K} = \frac{1}{\alpha}[\frac{1}{\beta} - (1-\delta)]^{\frac{1}{\alpha-1}}. \tag{59}$$

Utilizando la restricción de recursos de la economía se tiene que:

$$\overline{C} = \overline{K}^{\alpha} - \delta\overline{K}. \tag{60}$$

Es posible, entonces, caracterizar el equilibrio de estado estacionario de esta economía. Incluso se pueden utilizar parámetros de la economía real para calibrar los mismos, con una tasa de depreciación acorde, conociendo la participación del trabajo en el ingreso nacional y utilizando una tasa de descuento usual. En nuestro país estos valores podrían ubicarse en $\alpha = 0.43$, $\beta = 0.98$ y $\delta = 0.05$.

Aproximación de Taylor y log-linearización (c)

El paso (c) requiere algo más de trabajo. A fin de analizar el proceso de log linearización veremos en primera instancia el concepto de aproximación de Taylor, luego veremos el método de *Uhlig* para log linearizar alrededor del estado estacionario. Supongamos un conjunto de ecuaciones tal que,[11]

$$F(x_t) = G(x_t)H(x_t). \tag{61}$$

El proceso de *log linearización* implica aplicar logaritmo a la ecuación anterior y posteriormente realizar una aproximación de Taylor alrededor del equilibrio elegido. Al aplicar logaritmos, linealizamos la función,

$$\ln F(x_t) = \ln G(x_t) + \ln H(x_t). \tag{62}$$

[11] Seguimos al trabajo de McCandless, G. (2007) "The ABCs of RBCs".

La expansión de Taylor de una función $F(x,y)$, continua y diferenciable, alrededor de un equilibrio $(\overline{x},\overline{y})$ se define (utilizando sólo una aproximación de primer orden) como,

$$F(x,y)_{(\overline{x},\overline{y})} \approx F(\overline{x},\overline{y}) + F_1(\overline{x},y)(x-\overline{x}) + F_2(x,\overline{y})(y-\overline{y}). \tag{63}$$

En nuestro ejemplo, si el estado estacionario está dado por $\overline{x}$, la aproximación será igual a:

$$\ln F(\overline{x}) + \frac{F'(\overline{x})}{F(\overline{x})}(x_t-\overline{x}) \approx \ln G(\overline{x}_t) + \frac{G'(\overline{x})}{G(\overline{x})}(x_t-\overline{x}) + \ln H(\overline{x}_t)\frac{H'(\overline{x})}{H(\overline{x})}(x_t-\overline{x}). \tag{64}$$

Cabe notar que en estado estacionario se cumple que:

$$\ln F(\overline{x}) = \ln G(\overline{x}) + \ln H(\overline{x}). \tag{65}$$

Entonces,

$$\frac{F'(\overline{x})}{F(\overline{x})}(x_t-\overline{x}) \approx \frac{G'(\overline{x})}{G(\overline{x})}(x_t-\overline{x}) + \frac{H'(\overline{x})}{H(\overline{x})}(x_t-\overline{x}). \tag{66}$$

Existe una metodología sencilla, desarrollada por *Uhlig* para resolver la aproximación lineal de funciones alrededor del estado estacionario. Parte de considerar la variable en término de los desvíos logarítmicos (lineales) respecto al valor de equilibrio deseado (en este caso el estado estacionario no estocástico). Si en el modelo de Christiani se definen las variables en términos del desvío respecto al estado estacionario, de la siguiente manera,

$$\widetilde{c}_t = \ln C_t - \ln \overline{C}, \tag{67}$$

$$\widetilde{k}_t = \ln K_t - \ln \overline{K}, \tag{68}$$

con

$$\widetilde{a}_t = \ln A_t - \ln \overline{A} = \ln A_t, \tag{69}$$

entonces cada variable se transforma, en la notación de *Uhlig*, de la siguiente manera,[12]

$$C_t = \overline{C}e^{\widetilde{c}_t},\ K_t = \overline{K}e^{\widetilde{k}_t},\ \ A_t = e^{\widetilde{a}_t}$$

Esta especificación permite simplificar considerablemente la resolución de la log-linearización.[13] Como ejemplo podemos aplicar el método de *Uhlig* a una función de producción tipo Cobb Douglas:

$$Y_t = \Theta_t K_t^{\alpha}. \tag{70}$$

[12]Note que si $\widetilde{c}_t = \ln C_t - \ln \overline{C}$, entonces se cumple que

$$e^{\widetilde{c}_t} = e^{\ln C_t - \ln \overline{C}} = e^{\ln(\frac{C_t}{\overline{C}})} = \frac{C_t}{\overline{C}},$$

entonces $C_t = \overline{C}e^{\widetilde{c}_t}$.

[13]Note que en estado estacionario se verifica que:

$$\widetilde{c}_t = \ln \overline{C} - \ln \overline{C} = 0.$$

Entonces,

$$\widetilde{y}_t = \ln Y_t - \ln \overline{Y}, \tag{71}$$

$$\widetilde{k}_t = \ln K_t - \ln \overline{K}, \tag{72}$$

$$\widetilde{\theta}_t = \ln \Theta_t - \ln \overline{\Theta} = \ln \Theta_t. \tag{73}$$

Debemos reemplazar en la función de producción,

$$Y_t = \overline{Y} e^{\widetilde{y}_t},\ K_t = \overline{K} e^{\widetilde{k}_t},\quad \Theta_t = e^{\widetilde{\theta}_t},$$

lo que resulta en

$$\overline{Y} e^{\widetilde{y}_t} = e^{\widetilde{\theta}_t} (\overline{K} e^{\widetilde{k}_t})^{\alpha}, \tag{74}$$

$$\overline{Y} e^{\widetilde{y}_t} = \overline{K}^{\alpha} e^{\widetilde{\theta}_t} e^{\alpha \widetilde{k}_t} = \overline{K}^{\alpha} e^{\widetilde{\theta}_t + \alpha \widetilde{k}_t}, \tag{75}$$

Aplicar la regla de Taylor a las variables exponenciales nos da la regla de Uhlig:

$$e^{\widetilde{\theta}_t + \alpha \widetilde{k}_t} = e^{\widetilde{\theta} + \alpha \widetilde{k}} + e^{\widetilde{\theta} + \alpha \widetilde{k}} (\widetilde{\theta}_t - \widetilde{\theta}) + \alpha e^{\widetilde{\theta} + \alpha \widetilde{k}} (\widetilde{k}_t - \widetilde{k}), \tag{76}$$

donde las variables sin el subíndice t indican el valor estacionario de las log diferencias, que se suponen son cero. Entonces esto se resume a:

$$e^{\widetilde{\theta}_t + \alpha \widetilde{k}_t} = 1 + \widetilde{\theta}_t + \alpha \widetilde{k}_t, \tag{77}$$

que replica simplemente el término en el exponente. Aplicado al caso que venimos tratando nos quedaría:

$$\overline{Y} e^{\widetilde{y}_t} = \overline{Y}(1 + \widetilde{y}_t) = \overline{K}^{\alpha} (1 + \widetilde{\theta}_t + \alpha \widetilde{k}_t), \tag{78}$$

dado que en estado estacionario,$\overline{Y} = \overline{K}^{\alpha}$, resulta:[14]

$$\widetilde{y}_t = \widetilde{\theta}_t + \alpha \widetilde{k}_t. \tag{79}$$

Esta última ecuación nos da la aproximación lineal de la función de producción como desvío del estado estacionario. Algunas reglas útiles para utilizar el método de *Uhlig* son:

$$\widetilde{x}_t = \ln X_t - \ln \overline{X}, \tag{80}$$

$$X_t \approx \overline{X} e^{\widetilde{x}_t} \tag{81}$$

$$e^{\widetilde{x}_t + \alpha \widetilde{y}_t} \approx 1 + \widetilde{x}_t + \alpha \widetilde{y}_t \tag{82}$$

$$\widetilde{k}_t . \widetilde{y}_t \approx 0. \tag{83}$$

[14] Recuerde que $Y_t = \Theta_t K_t^{\alpha}$, y que en estado estacionario supusimos $\overline{\Theta} = 1$.

Resolviendo el modelo (c)

Volviendo al modelo bajo análisis, a fin de completar el paso (c) podemos aplicar el método de *Uhlig* a las CPO para obtener el modelo log linearizado, empecemos por la primer condición de óptimo:

$$C_t^{-\gamma} = \beta E_t \left[C_{t+1}^{-\gamma}(\alpha A_{t+1}^{1-\alpha} K_{t+1}^{1-\alpha} + (1-\delta)) \right], \tag{84}$$

reemplazando las variables en términos de Uhlig nos queda,

$$(\overline{C}e^{\widetilde{C}_t})^{-\gamma} = \beta E_t \left[(\overline{C}e^{\widetilde{C}_{t+1}})^{-\gamma}(\alpha(e^{\widetilde{a}_{t+1}})^{1-\alpha}(\overline{K}e^{\widetilde{k}_{t+1}})^{\alpha-1} + (1-\delta)) \right], \tag{85}$$

$$\overline{C}^{-\gamma}e^{-\gamma\widetilde{C}_t} = \beta E_t \left[\overline{C}^{-\gamma}e^{-\gamma\widetilde{C}_{t+1}}(\alpha e^{(1-\alpha)\widetilde{a}_{t+1}}\overline{K}^{1-\alpha}e^{(\alpha-1)\widetilde{k}_{t+1}} + (1-\delta)) \right], \tag{86}$$

$$\overline{C}^{-\gamma}e^{-\gamma\widetilde{C}_t} = \beta E_t \left[\overline{C}^{-\gamma}e^{-\gamma\widetilde{C}_{t+1}}\alpha e^{(1-\alpha)\widetilde{a}_{t+1}}\overline{K}^{1-\alpha}e^{(\alpha-1)\widetilde{k}_{t+1}} + \overline{C}^{-\gamma}e^{-\gamma\widetilde{C}_{t+1}} - \overline{C}^{-\gamma}e^{-\gamma\widetilde{C}_{t+1}}\delta \right], \tag{87}$$

$$(1-\gamma\widetilde{c}_t) = \beta E_t \left[(1-\gamma\widetilde{c}_{t+1} + (1-\alpha)\widetilde{a}_{t+1} + (\alpha-1)\widetilde{k}_{t+1})\alpha\overline{K}^{\alpha-1} + (1-\delta)(1-\gamma\widetilde{c}_{t+1}) \right], \tag{88}$$

como en estado estacionario sabemos que,

$$1 = \beta \left[\alpha\overline{K}^{1-\alpha} + (1-\delta) \right], \tag{89}$$

$$-\gamma\widetilde{c}_t = \beta E_t \left[(-\gamma\widetilde{c}_{t+1} + (1-\alpha)\widetilde{a}_{t+1} + (\alpha-1)\widetilde{k}_{t+1})\alpha\overline{K}^{\alpha-1} - (1-\delta)\gamma\widetilde{c}_{t+1} \right], \tag{90}$$

$$\begin{aligned} -\gamma\widetilde{c}_t \quad = \quad & -\beta\alpha\overline{K}^{1-\alpha}E_t\gamma\widetilde{c}_{t+1} + (1-\alpha)\beta\alpha\overline{K}^{1-\alpha}E_t\widetilde{a}_{t+1} + .. \\ & .. + (\alpha-1)\beta E_t\widetilde{k}_{t+1}\alpha\overline{K}^{\alpha-1} - (1-\delta)\gamma\beta E_t\widetilde{c}_{t+1}, \end{aligned} \tag{91}$$

utilizando nuevamente la condición de estado estacionario para simplificar el término del consumo futuro,

$$-\gamma\widetilde{c}_t = -\gamma E_t\widetilde{c}_{t+1} + (1-\alpha)\beta\alpha\overline{K}^{\alpha-1}E_t\widetilde{a}_{t+1} + (\alpha-1)\beta E_t\widetilde{k}_{t+1}\alpha\overline{K}^{\alpha-1}, \tag{92}$$

llegamos entonces a la ecuación deseada, definida en términos lineales como desvío de los valores de estado estacionario:

$$\gamma E_t\widetilde{c}_{t+1} = \gamma\widetilde{c}_t + (1-\alpha)\beta\alpha\overline{K}^{\alpha-1}E_t(\widetilde{a}_{t+1} - \widetilde{k}_{t+1}). \tag{93}$$

La ecuación restante de las condiciones de equilibrio resulta ser:

$$C_t + K_{t+1} = A_t^{1-\alpha}K_t^{\alpha} + (1-\delta)K_t, \tag{94}$$

aplicando la definición de *Uhlig* para las variables se tiene,

$$\overline{C}e^{\widetilde{C}_t} + \overline{K}e^{\widetilde{k}_{t+1}} = e_t^{(1-\alpha)\widetilde{a}_t}(\overline{K}e^{\widetilde{k}_t})^{\alpha} + (1-\delta)(\overline{K}e^{\widetilde{k}_t}), \tag{95}$$

$$\overline{C}(1+\widetilde{c}_t)+\overline{K}(1+\widetilde{k}_{t+1}) = K^{\alpha}(1+\widetilde{a}_t(1-\alpha)+\alpha\widetilde{k}_t)+\overline{K}(1-\delta)\widetilde{k}_t, \tag{96}$$

se simplifica utilizando la condición de que en estado estacionario:

$$\overline{C}+\overline{K} = \overline{K}_t + (1-\delta)\overline{K}, \tag{97}$$

entonces nos queda,

$$\overline{C}\widetilde{c}_t + \overline{K}\widetilde{k}_{t+1} = \overline{K}^{\alpha}(\widetilde{a}_t(1-\alpha)+\alpha\widetilde{k}_t)+\overline{K}(1-\delta)\widetilde{k}_t, \tag{98}$$

$$\widetilde{c}_t = \frac{K^{\alpha}(1-\alpha)}{\overline{C}}\widetilde{a}_t - \frac{\overline{K}}{\overline{C}}\widetilde{k}_{t+1} + \frac{\overline{K}(\alpha\overline{K}^{\alpha}+(1-\delta))}{\overline{C}}\widetilde{k}_t, \tag{99}$$

$$\widetilde{c}_t = \frac{K^{\alpha}(1-\alpha)}{\overline{C}}\widetilde{a}_t - \frac{\overline{K}}{\overline{C}}\widetilde{k}_{t+1} + \frac{\overline{K}}{\beta\overline{C}}\widetilde{k}_t. \tag{100}$$

Ahora podemos reemplazar esta expresión en la condición de primer orden derivada en primer lugar, resultando una ecuación diferencial de segundo orden en $\widetilde{k}_t$, que requiere ser resuelta por el método de coeficientes indeterminados:

$$\begin{aligned}\gamma E_t[\frac{K^{\alpha}(1-\alpha)}{\overline{C}}\widetilde{a}_{t+1} - \frac{\overline{K}}{\overline{C}}\widetilde{k}_{t+2} + \frac{\overline{K}}{\beta\overline{C}}\widetilde{k}_{t+1}] = \\ \gamma[\frac{\overline{K}^{\alpha}(1-\alpha)}{\overline{C}}\widetilde{a}_t - \frac{\overline{K}}{\overline{C}}\widetilde{k}_{t+1} + \frac{\overline{K}}{\beta\overline{C}}\widetilde{k}_t] + (1-\alpha)\beta\alpha\overline{K}^{\alpha-1}E_t(\widetilde{a}_{t+1}-\widetilde{k}_{t+1}),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma E_t[\frac{\overline{K}}{\overline{C}}\widetilde{k}_{t+2} - [(1+\frac{1}{\beta})\frac{\overline{K}}{\overline{C}} + \frac{(1-\alpha)\beta\alpha\overline{K}^{\alpha-1}}{\gamma}]\widetilde{k}_{t+1} + .. \\ + \frac{\beta}{\gamma}[\alpha(1-\alpha)\overline{K}^{\alpha-1} - (1-\alpha)\frac{\overline{K}^{\alpha}}{\overline{C}}]\widetilde{a}_{t+1} + \frac{\overline{K}}{\beta\overline{C}}\widetilde{k}_t + (1-\alpha)\overline{K}^{\alpha}\widetilde{a}_t] = 0\end{aligned}$$

$$\gamma E_t[\alpha_0\widetilde{k}_{t+2} + \alpha_1\widetilde{k}_{t+1} + \beta_0\widetilde{a}_{t+1} + \alpha_2\widetilde{k}_t + \beta_1\widetilde{a}_t] = 0 \tag{101}$$

En el paso (d) aplicamos el método de coeficientes indeterminados para encontrar los coeficientes de solución de ésta última ecuación en diferencias. Postulamos una solución del siguiente tipo:

$$k_{t+1} = g(\widetilde{k}_t, \widetilde{a}_t) = C\widetilde{k}_t + D\widetilde{a}_t, \tag{102}$$

reemplazando nos da,

$$\gamma E_t[\alpha_0(C\widetilde{k}_{t+1} + D\widetilde{a}_{t+1}) + \alpha_1(C\widetilde{k}_t + D\widetilde{a}_t) + \beta_0\widetilde{a}_{t+1} + \alpha_2\widetilde{k}_t + \beta_1\widetilde{a}_t] = 0, \tag{103}$$

$$\gamma E_t[\alpha_0(C(C\widetilde{k}_t + D\widetilde{a}_t) + D\widetilde{a}_{t+1}) + \alpha_1(C\widetilde{k}_t + D\widetilde{a}_t) + \beta_0\widetilde{a}_{t+1} + \alpha_2\widetilde{k}_t + \beta_1\widetilde{a}_t] = 0, \tag{104}$$

podemos usar el hecho que $\widetilde{a}_t = \ln A_t - \ln\overline{A} = \ln A_t$ y que $\ln A_{t+1} = \rho\ln A_t + \epsilon_{t+1}$, con $\epsilon_{t+1}\tilde{}N(0,\sigma_{\epsilon}^2)$. De manera que, $\widetilde{a}_{t+1} = \ln A_{t+1} = \rho\ln A_t + \epsilon_{t+1}$

$$\gamma E_t[\alpha_0 C^2\widetilde{k}_t + \alpha_0 CD\widetilde{a}_t + \alpha_0 D\rho\widetilde{a}_t + \alpha_1 C\widetilde{k}_t + \alpha_1 D\widetilde{a}_t + \beta_0\rho\widetilde{a}_t + \alpha_2\widetilde{k}_t + \beta_1\widetilde{a}_t] = 0 \tag{105}$$

$$\gamma E_t[(\alpha_0 C^2 + \alpha_1 C + \alpha_2)\widetilde{k}_t + (\alpha_0 CD + \alpha_0 D\rho + \alpha_1 D + \beta_0\rho + \beta_1)\widetilde{a}_t] = 0. \quad (106)$$

Esta ecuación se cumple si y sólo si, los dos argumentos que acompañan a $\widetilde{k}_t$ y $\widetilde{a}_t$ son igual a cero simultáneamente. De modo que,

$$\alpha_0 C^2 + \alpha_1 C + \alpha_2 = 0, \quad (107)$$

y,

$$(\beta_0 + \alpha_0 D)\rho + [(\alpha_0 C + \alpha_1)D + \beta_1] = 0. \quad (108)$$

Existen dos valores reales que satisfacen la primera de estas dos condiciones, las raíces del polinomio de orden dos son, $C_1 \epsilon (0,1)$ y $C_2 > \frac{1}{\beta}$. Podemos elegir entonces un valor de raíz estable, dado que $k_{t+1} = g(\widetilde{k}_t, \widetilde{a}_t)$ cruza la línea de 45° desde arriba. Conociendo C se puede obtener D a partir de la segunda de las ecuaciones anteriores. Entonces con k_0 y el conjunto de shocks podemos construir series para la evolución de capital, producción, consumo, inversión. Pudiendo evaluar entonces con estas series como se comporta nuestra economía genérica comparada con la economía real.

El último paso, (e) requiere, como mencionáramos el auxilio de programas matemáticos como el Matlab o el Scilab.