

NÜKLEER FİZİĞİN BORSAYA UYGULANMASI: OPSİYON FİYATLARININ MESH FREE YÖNTEM ile MODELLENMESİ

M. Bilge KOÇ ve İsmail BOZTOSUN
Erciyes Üni., Fen-Ed. Fak., Fizik Bölümü, 38039 Kayseri

ÖZET

Bu çalışmada teorik nükleer fiziğin opsiyon fiyatlarına uygulanması ve numerik analizin bu alandaki incelenmesi yer almaktadır. Bu çalışma için bilinen konveksiyon-difüzyon tipi bir kısmi diferansiyel denklem kullanılmıştır. Bu kısmi diferansiyel denklemin çözümünde, geleneksel numerik metodlardan sonlu farklar metodu (finite difference methods), sonlu elemanlar metodu (finite elements) vb, dışında meshden bağımsız (mesh-free) bir metod olan RBF (radial basis functions) metodu kullanılmıştır.

Karşılaştırmalı bir çalışma ile meshden bağımsız ve mesh değişkenli (mesh-dependent) karşılaştırması yapılarak RBF metodunun kullanılan zaman ve çözüm adımları için seçilen aralıklar bakımından geleneksel metodlara göre çok daha başarılı olduğu gösterilmiştir.

Bu çalışma borsadaki alım ve satımlardaki mevcut risklerden korunmak için oluşturulan opsiyon seçenekleri için konveksiyon-difüzyon tipi kısmi diferansiyel denklem kullanılması ve opsiyon fiyatlarının numerik analizinin yapılması ile, bu alanda teorik nükleer fiziğin uygulanabilirliğini göstermiştir.

1- GİRİŞ

Fizik, kimya ve fen bilimlerinin diğer branşlarındaki birçok problem, adveksiyon-difüzyon denklem eşitliği ile modellenebilir. Örneğin, yoğun bir akışkanın durağan halde su içindeki dağılımı ve akışkan tarafından taşınması, çoklu kimyasal tepkimelerin incelenmesi, atmosferik zerreciklerin yayılması veya çekirdek bozunumunun gözenekli ortamdan geniş alana yayılması adveksiyon-difüzyon eşitliğiyle anlatılabilir.

Endüstriyel problemler de adveksiyon-difüzyon eşitliğinin çözümlerini içermektedir; çelik levhanın eritilmesi (galvanization) ve metal alaşımın katılaştırılması gibi akışkanlar dinamiği problemleri, günümüz iletim kablolarındaki ısı artışı ve sıcak çelik kablonun şok su soğutması ile hareketi gibi ısı transferi uygulamaları ve borsadaki varlık fiyatlarının değişimleri gibi finansal uygulamalar.

1973'ten beri Black ve Scholes ün Avrupa tipi opsiyonlara değer

biçmek için hazırladığı formül, genişletilerek kullanılmaktadır. Bu eşitliğin numerik çözümü kısmi diferansiyel denklem çözümüne benzetilebilir. Çözümlerine ulaşılmasının ve sonuçların durağanlığının sağlanmasının zor olduğu reaksiyon-difüzyon eşitliği ile özdeşleştirilebilir

Bu çalışmada meshden bağımsız bir yöntem olan RBF metodu kullanılmıştır. Bu yöntemin uygulanması ile aralıklara ayrılmış noktalardaki sonuçlar değil, istenilen noktadaki sonuçların çözümü elde edilmektedir. Bu da RBF metodunu problemin boyutlarından bağımsız kılmaktadır.

Bir sonraki bölümde opsiyon fiyatları için Black-Scholes modeli tanıtılmaktadır. 3. bölümde Black-Scholes eşitliğinin seçtiğimiz numerik metodla çözümlenmesi, 4. bölümde elde edilen karşılaştırmalı çözümler ve 5. bölümde de sonuç yer almaktadır

2-BLACK-SCHOLES EŞİTLİĞİ

Opsiyon fiyatlarının değerlendirilmesi için kullanılan Black-Scholes eşitliği aşağıdaki gibidir;

$$\frac{dV(S,t)}{dt} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{d^2V(S,t)}{dS^2} + rS \frac{dV(S,t)}{dS} - rV(S,t) = 0 \quad (1)$$

r = riskten bağımsız faiz oranı, σ = değişkenlik, T = opsiyonun dönem sonu bitiş zamanı ve $V(S, t) = t$ anında ve S stok değerinde opsiyon fiyatı $S \in [0, \infty)$ ve $t \in [0, T]$.

$$V(S,t) = \begin{cases} \max(E - S, 0) & \text{for put (satmak)} \\ \min(S - E, 0) & \text{for call (almak)} \end{cases} \quad (2)$$

Black-Scholes modelinin temelinde, opsiyona konu teşkil eden varlığın fiyatının, vade sonuna kadar nasıl bir gelişme göstereceği ve vade sonunda hangi olasılıkla hangi fiyata sahip olacağını belirlemek yatmaktadır. Vade sonunda opsiyonun değeri, varlığın fiyatına bağlı olduğundan, varlık fiyatının tahmin edilmesi opsiyon

değerinin de belirlenmesine olanak verecektir.

Black-Scholes'un numerik çözümü için kullandığımız RBF yöntemi varlık fiyatını vade sonundan önce, istenilen herhangi bir t anında da tahmin edilmesine olanak sağladığı için bu yöntem tercih edilmiş ve elde edilen sonuçlardan hata payının 0'a yakın olduğu görülmüştür.

3- BLACK-SCHOLES 'UN NUMERİK ÇÖZÜMÜ

Black-Scholes eşitliğinin numerik çözümü için iki farklı metod kullandık. Bunların başarılarına bakılmış ve sonuçlar ilerki bölümlerde tartışılmıştır. Ayrıca RBF metoduna bağlı olan

dört farklı yöntem; thinplate spline, multiquadric, cubic ve gaussian kullanılarak kendi aralarında karşılaştırmaları sunulmuştur.

3.1- Radial Basis Function Metodu

Bu çalışmada kullanılan RBF metodları aşağıda verilmiştir:

$$\begin{aligned}
 TPS: \quad \phi(x, x_j) &= \phi(r_j) = r_j^4 \log(r_j), \\
 MQ: \quad \phi(x, x_j) &= \phi(r_j) = \sqrt{c^2 + r_j^2}, \\
 CUBIC: \quad \phi(x, x_j) &= \phi(r_j) = r_j^3, \\
 GAUSSIAN: \quad \phi(x, x_j) &= \phi(r_j) = e^{-c^2 r_j^2}
 \end{aligned} \tag{3}$$

(1) numaralı eşitlik Crank-Nicholson metodu kullanılarak düzenlenmiştir. Bu zamana bağlı geri dönüşümlü bir denklemdir (backward).

$$\begin{aligned}
 &V(x, t) - V(x, t + \delta t) + \delta t(1 - \theta) \left[\frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \nabla^2 V(x, t) + r S \nabla V(x, t) - r V(x, t) \right] + \\
 &\delta t \theta \left[\frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \nabla^2 V(x, t + \delta t) + r S \nabla V(x, t + \delta t) - r V(x, t + \delta t) \right] = 0
 \end{aligned} \tag{4}$$

$u^n = u(x, t^n)$, $t^n = t^{n-1} + \Delta t$ olmak üzere, (4) denkleminde yerine yazılırsa aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\left[-1 + \alpha \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \nabla^2 + \alpha r S \nabla - \alpha r \right] V^{n+1} = \left[-1 - \beta \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \nabla^2 - \beta r S \nabla - \beta r \right] V^n \tag{5}$$

Burada $\alpha = \theta \Delta t$ ve $\beta = (1 - \theta) \Delta t$ olarak alınır. $\theta = 0.5$ için $\alpha = \beta$ olur. Eğer $V(x, t^n) = V(x, y, t^n)$

$$V^n(x) \cong \sum_{j=1}^N \lambda_j^n \phi(r_j) \tag{6}$$

$$V^n(x_i) \cong \sum_{j=1}^N \lambda_j^n \phi(r_{ij}) \quad i = 1, \dots, N \tag{7}$$

olarak alınır ve

$$H_+ = -1 + \alpha \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \nabla^2 + \alpha r S \nabla - \alpha r, \quad H_- = -1 - \beta \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \nabla^2 - \beta r S \nabla + \beta r$$

şeklinde tanımlanırsa, $r_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2}$ olmak üzere

$$\sum_{j=1}^N \lambda_j^{n+1} H_+ \phi(r_{ij}) = \sum_{j=1}^N \lambda_j^n H_- \phi(r_{ij}) \quad (8)$$

şeklinde bir denklem elde edilir. RBF metodu meshden bağımsız bir yöntemdir. Bilinen Black-Scholes eşitliğine uygulanarak çözümler elde edilir.

3.2- Finite Difference Metodu (Sonlu Farklar Metodu)

Hem belirgin (explicit) hem de dolaylı (implicit) finite difference metodları kullanılmıştır;. Her ikisinde de ikinci dereceden diferansiyel ve geriye dönüşümlü diferansiyel formüllere Laplace ve Gradient operatörleri uygulanmıştır.

Dolaylı (implicit) finite difference metoduna çok benzer olan belirgin (explicit) finite difference metodunun kararlılık ve convergence problemleri vardır. Kararlılık problemi α 'nın değeriyle değişen aralık boyutuna bağlıdır. α , 0 ile 0.5 arasında değerlere sahipse kararlı, eğer 0.5 'ten büyük ise kararsız hale geçmektedir. Convergence problemi ise zaman aralığından kaynaklanmaktadır. Bu yöntemin bir noktada birleşerek

doğru sonucu vermesi için zaman aralığının çok küçük tutulması gerekmektedir. Bundan dolayıdır ki bu yöntem çok yavaş çalışmaktadır. Bunun yanında dolaylı finite difference metodunun kararlılık problemi hiçbir α değeri için bulunmamakla birlikte converge problemi yine zaman aralığına bağlı ve hesaplamaları çok yavaşlatmaktadır.

FD uygulamaları H_+ ve H_- operatörlerinde yerine konulursa, sınır ve başlangıç koşulları uygulanırsa ve eşitlik yeniden düzenlenirse doğrusal eşitliğin, simetrik sisteme dönüşümünü elde ederiz. Bu da Gauss eliminasyon yöntemi ile $V(x,t)$ 'nin hesaplanması sağlanır.

4-SONUÇLAR

Yöntemin değerlendirilmesini tamamlanması için birimlerinin de gereklidir. Bu da ancak, ifadeyle opsiyon fiyatlarının bir noktada birleşerek gerçek değerinin bulunması için, yararlı ek ilaveleri arttırmamızla gerçekleşir. . Bahsedildiği gibi yavaş convergence, opsiyon numerik fiyatlarının, fonksiyonlarının tamamlanabilmesinde önemlidir. Bilindiği gibi eğer zaman aralığını (Δt) küçültürsek, opsiyon fiyatlarının ya da denklemin convergence şartını sağlamış oluruz. Bununla kastedilen numerik çözüm uygulamasına katılan ek ilavelerdir (underlyings).

| Stock S | TPS | MQ | CUBIC | GAUSSIAN |
|---------|--------|--------|--------|----------|
| 0.00 | 9.7531 | 9.7531 | 9.7531 | 9.7531 |
| 1.00 | 8.7531 | 8.7531 | 8.7998 | 8.7530 |
| 2.00 | 7.7531 | 7.7531 | 7.8423 | 7.7531 |
| 3.00 | 6.7531 | 6.7531 | 6.8809 | 6.7530 |
| 4.00 | 5.7531 | 5.7531 | 5.9158 | 5.7533 |
| 5.00 | 4.7531 | 4.7531 | 4.9475 | 4.7529 |
| 6.00 | 3.7532 | 3.7532 | 3.9760 | 3.7533 |
| 7.00 | 2.7568 | 2.7568 | 3.0018 | 2.7577 |
| 8.00 | 1.7983 | 1.7983 | 2.0252 | 1.7996 |
| 9.00 | 0.9871 | 0.9870 | 1.0463 | 0.9878 |
| 10.00 | 0.4409 | 0.4408 | 0.0655 | 0.4411 |
| 11.00 | 0.1598 | 0.1598 | 0.0584 | 0.1603 |
| 12.00 | 0.0479 | 0.0479 | 0.0500 | 0.0487 |
| 13.00 | 0.0122 | 0.0122 | 0.0405 | 0.0132 |
| 14.00 | 0.0027 | 0.0027 | 0.0302 | 0.0037 |
| 15.00 | 0.0005 | 0.0006 | 0.0195 | 0.0014 |
| 16.00 | 0.0001 | 0.0001 | 0.0086 | 0.0008 |
| 17.00 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0006 |

| | | | | |
|-------|------------|------------|------------|------------|
| 18.00 | 0.0000 | 0.0000 | -0.0001 | 0.0006 |
| 19.00 | 0.0000 | 0.0000 | -0.0002 | 0.0008 |
| HATA | 0.00013971 | 0.00013637 | 0.06190414 | 0.00464602 |

Tablo 1: $t=100$, $n=121$ için Radial Basis Fonksiyonunun Karşılaştırması

Kullanılan RBF metodu sadece eşitlik için değil aynı zamanda türevleri için de çözüm oluşturmaktadır. RBF uygulamasından çıkan formülasyon sayısal alanda tanımlanabilir ve bunun en önemli göstergesi de, başka bir yöntem gerektirmeden bir bonus olarak elde edebileceğimiz delta değerleridir. Opsiyon ya da opsiyon portföyü için delta değeri çok önemlidir ve opsiyonun ya da portföyün hassasiyetini gösterir. Delta varlık değerindeki değişim oranını gösterir, stok fiyatlarının alt uygulamalarında ki küçük değişimlerin, opsiyon fiyatlarındaki hareketinin derecesidir.

O halde delta hedging'e risk faktörlerini azaltma diyebiliriz. Bunun en iyi yolu opsiyon ve onun alt uygulamaları arasındaki uyumu sağlamaktır.

Biz bu çalışmada meshden bağımsız olan RBF metodunu kullanarak, mesh-değişkenli FD metodunun sonuçları ile karşılaştırdık. Bu sonuçları karşılaştırabilmek için Willmott'un FD sonuçlarını ele aldık ve kullandığımız RBF uygulamasında da Avrupa tipi put (satım) opsiyonunu, $E=10$, $r=0.005$, $\sigma=0.20$, $T=0.5$ (yıl) ve $S=[0,30]$ değerleri için kullandık.

| Stock S | TPS | MQ | CUBIC | GAUSSIAN |
|---------|------------|------------|------------|------------|
| 0.00 | -0.9995 | -1.0000 | 0.9559 | -0.7103 |
| 1.00 | -1.0000 | -1.0000 | 0.8945 | -0.9990 |
| 2.00 | -1.0000 | -1.0000 | 0.8351 | -0.9991 |
| 3.00 | -1.0000 | -1.0000 | 0.7777 | -0.9994 |
| 4.00 | -1.0000 | -1.0000 | 0.7224 | -1.0003 |
| 5.00 | -1.0000 | -1.0000 | 0.6691 | -1.0001 |
| 6.00 | -0.9996 | -0.9996 | 0.6178 | -0.9989 |
| 7.00 | -0.9887 | -0.9887 | 0.5686 | -0.9880 |
| 8.00 | -0.9088 | -0.9089 | 0.5215 | -0.9090 |
| 9.00 | -0.6910 | -0.6911 | 0.4763 | -0.6917 |
| 10.00 | -0.4022 | -0.4021 | 0.4333 | -0.4023 |
| 11.00 | -0.1780 | -0.1779 | 0.3922 | -0.1777 |
| 12.00 | -0.0618 | -0.0618 | 0.3532 | -0.0615 |
| 13.00 | -0.0176 | -0.0176 | 0.3163 | -0.0175 |
| 14.00 | -0.0042 | -0.0043 | 0.2814 | -0.0043 |
| 15.00 | -0.0009 | -0.0009 | 0.2485 | -0.0010 |
| 16.00 | -0.0002 | -0.0002 | 0.2177 | -0.0003 |
| 17.00 | 0.0000 | 0.0000 | 0.1889 | -0.0001 |
| 18.00 | 0.0000 | 0.0000 | 0.1622 | 0.0000 |
| 19.00 | 0.0000 | 0.0000 | 0.1375 | 0.0003 |
| HATA | 0.00008954 | 0.00017647 | 0.63676377 | 0.00379306 |

Tablo 2: $t=100$, $n=121$ iken Tablo 1 ile aynı fakat Delta için

| Stock S | TPS | MQ | CUBIC | GAUSSIAN |
|---------|------------|------------|------------|------------|
| 40 | 0.00130294 | 0.00130526 | 0.06138752 | 7.71100769 |
| 41 | 0.00065001 | 0.00053212 | 0.06006126 | 7.70508390 |
| 50 | 0.00042345 | 0.00035310 | 0.05988777 | 7.10907512 |
| 51 | 0.00050754 | 0.00042699 | 0.06069781 | 6.85233992 |
| 70 | 0.00041497 | 0.00040278 | 0.06170775 | 0.00326177 |
| 71 | 0.00020256 | 0.00017067 | 0.06126799 | 0.00267421 |
| 100 | 0.00020239 | 0.00019625 | 0.06191282 | 0.00020160 |
| 101 | 0.00009659 | 0.00008336 | 0.06158383 | 0.00008586 |
| 120 | 0.00008250 | 0.00008250 | 0.06173100 | 0.00099817 |
| 121 | 0.00013971 | 0.00013637 | 0.06190414 | 0.00464602 |

Tablo 3: Farklı node (n) değerleri için gerçel hatalar $t=100$

| Stock S | TPS | MQ | CUBIC | GAUSSIAN |
|---------|------------|------------|------------|------------|
| 40 | 0.00094501 | 0.00100075 | 0.60947830 | 0.31948619 |
| 41 | 0.00059034 | 0.00048427 | 0.61047430 | 0.32907185 |
| 50 | 0.00036618 | 0.00036037 | 0.61763871 | 0.59364399 |
| 51 | 0.00039951 | 0.00038904 | 0.61827842 | 0.63489574 |
| 70 | 0.00028038 | 0.00037626 | 0.62695586 | 0.13775177 |
| 71 | 0.00016520 | 0.00022685 | 0.62728377 | 0.13044955 |
| 100 | 0.00013199 | 0.00022412 | 0.63393781 | 0.00867712 |
| 101 | 0.00007368 | 0.00015430 | 0.63409905 | 0.00755410 |
| 120 | 0.00005907 | 0.00005907 | 0.63665164 | 0.00058427 |
| 121 | 0.00008954 | 0.00017647 | 0.63676377 | 0.00379306 |

Tablo 4: $t=100$ iken Tablo 3 ile aynı fakat Delta için.

5- TARTIŞMA

Çözümlerimizde RBF metodunu kullanmayı tercih ettik çünkü öncelikli avantajı iki belirleyici niteliğinin olması; uygulanan yöntemin fonksiyonları düzgün açık ve diferansiyellenebilir.

Meshden bağımsız bir yöntem olan RBF metodunun da kendi içinde numeriksel analiz yöntemlerinin farklılıklar gösterdiği alt metodları aynı değerler göz önüne alınarak çözümleri karşılaştırılmıştır. Elde edilen sonuçlara göre kullanılan node (n) sayısı arttıkça TPS (thin plate spline) diğerlerine göre çok daha iyi sonuçlar vermiş ve hata oranı 0'a yaklaşmıştır. Aynı sonuç delta değerleri içinde gözlenmiştir.

FD (finite difference) metodunda gözlenen ani sıçrayışlar gözlenmemiş ve RBF metodunun meshden bağımsız olması sebebiyle istenilen andaki değeri vade sonuna bağlı kalmadan gözlenebilmiştir.

Bu çalışmada gösterilmek istenen nükleer fizikte kullanılan adveksiyon-difüzyon tipi bir denklemin , numerik çözümleri sayesinde farklı alanlarda çözümlerinin sağlanabileceğidir. Bu çalışma ile bu tip bir denklemin opsiyon fiyatları üzerinde de çözümlerinin sağlanması gösterilmiştir. Opsiyon fiyatları meshden bağımsız bir yöntem ile modellenerek, nükleer fiziğin borsaya uygulanabilirliği gösterilmiştir.

Teşekkür: Bu proje EPSRC tarafından desteklenmiştir (Grant

No: GR/N09268).

Kaynakça:

[1] Choi S. and Marcozzi M.D., A Numerical Approach to American Curreny Option Valuation, Journal of Derivatives, 19, 2001.

[2] Boztosun I. and Charafi A., An Analysis of the Linear Advection-Diffusion Equation using Mesh-free and Mesh-dependent Methods, Journal of Engineering Analysis with Boundary Elements, Vol: 26, Issue 10, pp: 889 2002.

[3] Boztosun I. , Boztosun D. and Charafi A., On the Numerical Solution of Linear Advection-Diffusion Equation using Compactly Supported Radial Basis Functions, Lecture Notes in Computational Science and Engineering, Vol: 26, edited by M. Griebel and M. A. Schweitzer, pp: 63, 2002.