

Uma revisão sobre a parametrização de rotações finitas na dinâmica de corpos rígidos

M.A. Trindade e R. Sampaio

Departamento de Engenharia Mecânica, PUC-Rio

rua Marquês de São Vicente, 225, Rio de Janeiro, RJ, 22453-900, Brasil

e-mail: trindade@mec.puc-rio.br e rsampaio@mec.puc-rio.br

1 Introdução

A parametrização de rotações finitas tem sido objeto de continua análise devido a sua extensa aplicação à pesquisa aeronáutica e aeroespacial. Entretanto, o primeiro estudo sobre rotações foi publicado por Euler em 1776. Vários livros clássicos de dinâmica (Arnold, 1976, Goldstein, 1980, Meirovitch, 1970, Whittaker, 1965) apresentam conhecimentos básicos da cinemática de corpos rígidos, porém sem detalhar a parametrização de rotações finitas. Já Bottema e Roth (1979) e Angeles (1988) se dedicaram à cinemática propriamente dita. Adicionalmente, uma introdução simples à álgebra de rotações pode ser encontrada em (Mayer, 1964).

Atualmente, o problema da representação de rotações finitas continua sendo bastante estudado. Alguns autores (Cardona, 1989, Rochinha e Sampaio, 1996b, Trindade, 1996) apresentaram a importância da análise de rotações finitas na dinâmica tridimensional de multicorpos. O desenvolvimento da análise não-linear de estruturas, motivado principalmente pelo estudo de estruturas geometricamente não-lineares e de estruturas sujeitas a grandes deslocamentos, despertou o interesse da comunidade de dinâmica estrutural na representação de rotações finitas (Bathe e Bolourchi, 1979, Betsch, Menzel e Stein, 1998, Ibrahimbegovic, Frey e Kozar, 1995, Simo e Wong, 1991). Argyris (1982) e Atluri e Cazzani (1995) apresentaram uma revisão de rotações finitas e de suas aplicações à dinâmica estrutural.

Mais precisamente sobre a parametrização de rotações, uma discussão sobre a necessidade de cinco parâmetros para representar globalmente rotações é apresentada por Stuelpnagel (1964). Sistemas com quatro parâmetros, como quaternios, são suficientes para representar rotações na prática, com apenas um parâmetro redundante. Neste trabalho, mostra-se que a grande vantagem de utilizar o número mínimo de parâmetros, i.e. três, é de eliminar a redundância nos parâmetros de forma não originar equações de vínculo. Mesmo se, neste caso, singularidades na representação são inevitáveis (Stuelpnagel, 1964). Maiores discussões sobre singularidades podem ser encontradas em (Sampaio e Trindade, 1998). Uma revisão geral sobre diferentes sistemas de parametrização foi apresentada por G  radin e Rixen (1995).

O objetivo deste trabalho    apresentar uma revisão das possíveis abordagens para o problema da descri  o da cinemática espacial de corpos rígidos, que consiste basicamente em descrever as rota  es finitas de corpos rígidos. Este estudo    básico para a modelagem, simula  o, análise do comportamento dinâmico de estruturas.

Neste trabalho, inicialmente, será apresentada uma descrição intrínseca do operador rotação, i.e., sem o uso de componentes, atentando para as principais propriedades do operador. Em seguida, serão descritos o movimento geral de um corpo rígido e os seus campos de velocidades e acelerações.

Posteriormente, serão apresentadas diversas abordagens para a parametrização de rotações finitas. A representação de rotações finitas é objetivo de intensivo estudo e numerosos trabalhos nesta área vem sendo apresentados ao longo da última década. Não é objetivo deste trabalho esgotar o assunto de parametrização de rotações finitas, mas sim, apresentar uma discussão acerca dos mais importantes sistemas de parametrização encontrados na literatura.

Serão apresentados os seguintes sistemas de parametrização:

- Ângulos de Euler e Ângulos de Bryant: fornecem uma caracterização geométrica da rotação. São os sistemas de parametrização mais encontrados na literatura de dinâmica, principalmente, por apresentarem fácil visualização do problema.
- Parâmetros de Euler, Parâmetros de Rodrigues, Vetor Rotação e Vetor Rotação Conforme: derivam do teorema de Euler acerca da representação de rotações finitas em termos dos invariantes (eixo e ângulo de rotação). Possuem a vantagem de não serem específicos para determinados problemas como os ângulos de Euler e Bryant, sendo, a princípio, mais apropriados para o estudo de problemas gerais.
- Quaternios: trata de forma bastante peculiar e elegante o problema de rotação. Permite combinar rotações sucessivas através da multiplicação de quaternios, causando um número mínimo de operações algébricas.

Estas diferentes abordagens e suas relações serão apresentadas. Problemas como pontos de singularidade e propriedades de diferenciabilidade serão tratados. Através da comparação dos diversos sistemas de parametrização, serão apresentadas conclusões finais acerca da conveniência de uma dada parametrização, i.e., suas vantagens e desvantagens.

2 Descrição intrínseca do operador de rotações finitas

Seja o operador linear $\mathbf{R}$, representado na Figura 1, tal que

$$\mathbf{x} = \mathbf{R}\mathbf{X} \quad (1)$$

A imagem de $\mathbf{X}$ é obtida através de uma rotação na qual seu módulo permanece inalterado qualquer que seja $\mathbf{R}$. De modo que podemos escrever

$$\mathbf{X}^T \mathbf{X} = \mathbf{x}^T \mathbf{x} = \mathbf{X}^T \mathbf{R}^T \mathbf{R} \mathbf{X} \quad (2)$$

donde, podemos observar que

$$\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{I} \quad (3)$$

portanto $\mathbf{R}^T = \mathbf{R}^{-1}$, o que significa que o operador $\mathbf{R}$ pode ser representado por uma matriz ortogonal. Sabendo que os vetores $\mathbf{E}_i$ formam uma base ortonormal $\mathbf{E}$, temos

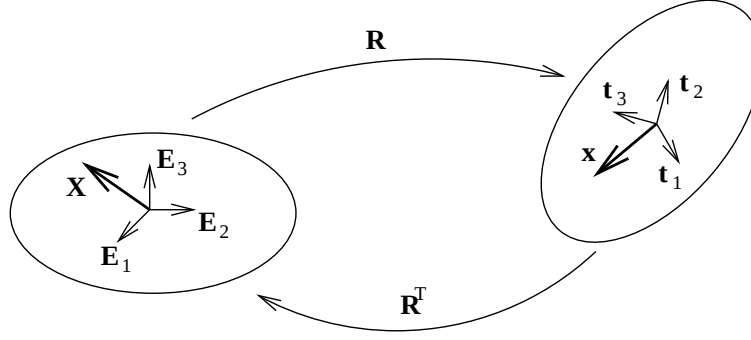


Figura 1: Representação de uma rotação finita

$$\mathbf{E}_i^T \mathbf{E}_j = \delta_{ij} \quad \text{e} \quad \mathbf{E}_3 = \tilde{\mathbf{E}}_1 \mathbf{E}_2 \quad (4)$$

e, portanto,

$$(\tilde{\mathbf{E}}_1 \mathbf{E}_2)^T \mathbf{E}_3 = 1 \quad (5)$$

Da mesma maneira, sabemos que os vetores $\mathbf{t}_i$ formam uma base ortonormal $\mathbf{t}$

$$\mathbf{t}_i^T \mathbf{t}_j = \delta_{ij} \quad \text{e} \quad \mathbf{t}_3 = \tilde{\mathbf{t}}_1 \mathbf{t}_2 \quad (6)$$

e, portanto,

$$(\tilde{\mathbf{t}}_1 \mathbf{t}_2)^T \mathbf{t}_3 = 1 \quad (7)$$

Vamos definir, então, as matrizes

$$\mathbf{A} = [\mathbf{E}_1 \quad \mathbf{E}_2 \quad \mathbf{E}_3] \quad \text{e} \quad \mathbf{B} = [\mathbf{t}_1 \quad \mathbf{t}_2 \quad \mathbf{t}_3] \quad (8)$$

que, devido às equações (5) e (7), têm determinante unitário

$$\det(\mathbf{A}) = 1 \quad \text{e} \quad \det(\mathbf{B}) = 1 \quad (9)$$

Sabendo que os vetores $\mathbf{t}_i$ da base $\mathbf{t}$ também são transformados pelo operador $\mathbf{R}$, tal que $\mathbf{t}_i = \mathbf{R}\mathbf{E}_i$, podemos observar que

$$\mathbf{B} = \mathbf{R}\mathbf{A} \quad (10)$$

e, portanto, podemos afirmar que

$$\det(\mathbf{R}) = +1 \quad (11)$$

o que mostra que o operador $\mathbf{R}$ pode ser representado por uma matriz ortogonal e própria. Consideremos o conjunto $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ e o conjunto $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \mathbf{h}_3$ como os autovalores e autovetores do operador $\mathbf{R}$, respectivamente. Portanto, podemos escrever:

$$\mathbf{R}\mathbf{h}_i = \lambda_i \mathbf{h}_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad (12)$$

Podemos, então, concluir que o produto dos autovalores de $\mathbf{R}$ é igual a 1.

$$\det(\mathbf{R}) = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1 \quad (13)$$

Além disso, de (12), podemos escrever

$$\|\mathbf{R}\mathbf{h}_i\| = |\lambda_i| \|\mathbf{h}_i\| \quad (i = 1, 2, 3) \quad (14)$$

Como foi verificado anteriormente, o módulo de um vetor que efetua uma rotação pura permanece inalterado, de modo que todos os autovalores têm módulo unitário

$$|\lambda_i| = 1 \quad (i = 1, 2, 3) \quad (15)$$

Como $\mathbf{R}$ é um operador 3×3 , a equação característica de $\mathbf{R}$ é uma equação cúbica em λ . Como $\mathbf{R}$ é real, esta equação deve possuir pelo menos uma raiz real. Devido ao fato de que o módulo dos autovalores é unitário, esta raiz real só pode ser ± 1 .

Consideremos, então, todos os possíveis autovalores de $\mathbf{R}$. Todos os três autovalores não podem ser reais e diferentes, pois raízes reais só podem ter valores ± 1 . Se todos os autovalores forem reais e dois deles iguais, o que é diferente deve ser $+1$, senão o determinante de $\mathbf{R}$ não poderia ser $+1$. Com exceção da solução trivial onde todos os autovalores têm valor $+1$ (que representa a matriz identidade), a única possibilidade remanescente é um autovalor real e outros dois complexos conjugados. Mas, os autovalores complexos conjugados possuem módulo unitário e, conseqüentemente, seu produto é igual a $+1$, portanto o autovalor real deve ser $+1$.

Como foi verificado, qualquer transformação ortogonal não-trivial representando o movimento de rotação de um corpo rígido tem um, e apenas um, autovalor igual a $+1$. Esta afirmação pode ser reescrita através do teorema de Euler: “o movimento geral de um corpo rígido com um ponto fixo é equivalente a uma rotação em torno de algum eixo”.

Consideremos a matriz Λ como sendo a matriz dos autovalores de $\mathbf{R}$. Podemos escrever o operador $\mathbf{R}$ como

$$\mathbf{R} = \mathbf{Q}\Lambda\mathbf{Q}^{-1} \quad \text{onde} \quad \mathbf{Q}^*\mathbf{Q} = \mathbf{I} \quad (16)$$

e onde

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \quad (17)$$

sendo que os autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ podem ser escritos da seguinte forma

$$\lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = \exp(i\phi) \quad \lambda_3 = \exp(-i\phi) \quad (\phi \text{ arbitrário}) \quad (18)$$

O operador $\mathbf{R}$ possui um autovetor $\mathbf{n}$ associado ao autovalor 1, tal que:

$$\mathbf{R}\mathbf{n} = \mathbf{n} \quad (19)$$

e, portanto, permanece inalterado na transformação. O vetor unitário $\mathbf{n}$ é denominado de eixo de rotação. Os autovetores associados aos outros dois autovalores λ_2 e λ_3 são complexos conjugados. Podemos escrever o operador $\mathbf{Q}$ na forma

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{n} & \mathbf{u} + i\mathbf{v} & \mathbf{u} - i\mathbf{v} \end{bmatrix} \quad (20)$$

portanto

$$\mathbf{Q}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{n}^T \\ (\mathbf{u} - i\mathbf{v})^T \\ (\mathbf{u} + i\mathbf{v})^T \end{bmatrix} \quad (21)$$

Utilizando a propriedade definida na equação (16), podemos escrever

$$\mathbf{Q}^* \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{n}^T \mathbf{n} & \mathbf{n}^T (\mathbf{u} + i\mathbf{v}) & \mathbf{n}^T (\mathbf{u} - i\mathbf{v}) \\ (\mathbf{u} - i\mathbf{v})^T \mathbf{n} & (\mathbf{u} - i\mathbf{v})^T (\mathbf{u} + i\mathbf{v}) & (\mathbf{u} - i\mathbf{v})^T (\mathbf{u} - i\mathbf{v}) \\ (\mathbf{u} + i\mathbf{v})^T \mathbf{n} & (\mathbf{u} + i\mathbf{v})^T (\mathbf{u} + i\mathbf{v}) & (\mathbf{u} + i\mathbf{v})^T (\mathbf{u} - i\mathbf{v}) \end{bmatrix} = \mathbf{I} \quad (22)$$

donde podemos escrever

$$\begin{aligned} \mathbf{n}^T \mathbf{u} &= \mathbf{n}^T \mathbf{v} = 0 \\ \mathbf{u}^T \mathbf{v} &= 0 \\ \mathbf{u}^T \mathbf{u} + \mathbf{v}^T \mathbf{v} &= 1 \end{aligned} \quad (23)$$

Das propriedades acima descritas, podemos deduzir que os vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ formam uma base ortogonal no plano perpendicular ao eixo de rotação $\mathbf{n}$. Além disso, podemos observar que os autovetores $(\mathbf{u} + i\mathbf{v})$ e $(\mathbf{u} - i\mathbf{v})$ obedecem às seguintes relações:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(\mathbf{u} + i\mathbf{v}) &= \exp(i\phi)(\mathbf{u} + i\mathbf{v}) \\ \mathbf{R}(\mathbf{u} - i\mathbf{v}) &= \exp(-i\phi)(\mathbf{u} - i\mathbf{v}) \end{aligned} \quad (24)$$

que podem ser reescritas da seguinte forma

$$\begin{aligned} \mathbf{R}\mathbf{u} + i\mathbf{R}\mathbf{v} &= (\mathbf{u} \cos \phi - \mathbf{v} \sin \phi) + i(\mathbf{u} \sin \phi + \mathbf{v} \cos \phi) \\ \mathbf{R}\mathbf{u} - i\mathbf{R}\mathbf{v} &= (\mathbf{u} \cos \phi - \mathbf{v} \sin \phi) - i(\mathbf{u} \sin \phi + \mathbf{v} \cos \phi) \end{aligned} \quad (25)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{R}\mathbf{u} &= \mathbf{u} \cos \phi - \mathbf{v} \sin \phi \\ \mathbf{R}\mathbf{v} &= \mathbf{u} \sin \phi + \mathbf{v} \cos \phi \end{aligned} \quad (26)$$

Este resultado mostra que os vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ apresentam uma rotação plana de um ângulo no plano perpendicular ao eixo de rotação. Os últimos resultados mostram que qualquer rotação $\mathbf{R}$ pode ser pensada globalmente como uma rotação plana de um ângulo ϕ em torno de um eixo $\mathbf{n}$.

3 Movimento geral de um corpo rígido

Na seção anterior, descrevemos o operador rotação através de uma transformação rígida de um vetor, onde eram consideradas apenas as configurações inicial e final. Agora, desejamos descrever o movimento de um corpo rígido. Para tal, passaremos a considerar que o operador rotação é variável no tempo. Isto porque o corpo rígido pode assumir várias configurações, uma para cada instante de tempo. Para descrever este movimento são necessários seis parâmetros, dos quais três são para descrever a translação de um ponto do corpo e outros três, como será demonstrado, para descrever a rotação em torno de um eixo que passa por este ponto.

Consideremos um corpo rígido se movendo no espaço, como representado na Figura 2. Seja O um ponto do corpo que adotaremos como origem do referencial inercial, representado na Figura 2 pela base $\mathbf{E}$. Sejam $\mathbf{X}$ e $\mathbf{x}_P$ os vetores-posição de um ponto arbitrário P do corpo. Suponhamos que o movimento do corpo seja a composição de dois movimentos, um de

translação pura e outro de rotação pura. No primeiro movimento, todos os pontos do corpo apresentam o mesmo deslocamento, que representaremos pelo deslocamento $\mathbf{x}_O$ do ponto O . No segundo movimento, o corpo rígido gira em torno de um eixo que passa pelo ponto O' . Tal que, o vetor-posição do ponto P , após o movimento, é

$$\mathbf{x}_P = \mathbf{x}_O + \mathbf{x} \quad (27)$$

onde $\mathbf{x}_P = \vec{OP'}$, $\mathbf{X} = \vec{OP}$, $\mathbf{x}_O = \vec{OO'}$ e $\mathbf{x} = \vec{O'P'}$.

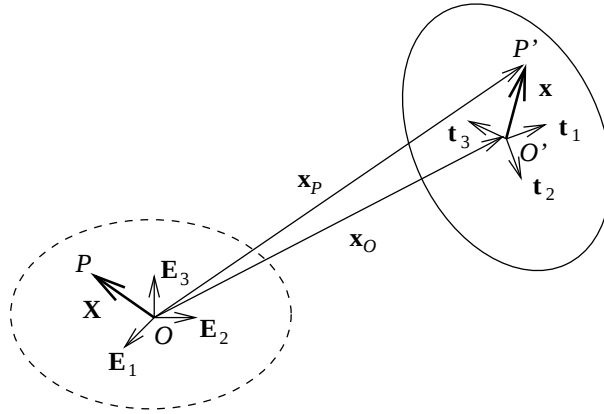


Figura 2: Representação de um corpo rígido no espaço

Como o segundo movimento é uma rotação pura, representada pelo operador $\mathbf{R}$, o vetor $\mathbf{x}$ é a imagem do vetor $\mathbf{X}$, de modo que podemos reescrever a equação (27) na seguinte forma:

$$\mathbf{x}_P = \mathbf{x}_O + \mathbf{R}\mathbf{X} \quad (28)$$

Podemos expressar o deslocamento do ponto P de sua posição de referência na forma

$$\mathbf{u}_P = \mathbf{x}_P - \mathbf{X} = \mathbf{u}_O + \mathbf{D}\mathbf{X} \quad (29)$$

onde $\mathbf{u}_O = \mathbf{x}_O$ é o deslocamento da origem, e onde

$$\mathbf{D} = \mathbf{R} - \mathbf{I} \quad (30)$$

O operador $\mathbf{D}$ tem pelo menos um autovalor nulo, pois

$$\mathbf{D}\mathbf{n} = \mathbf{D}^T\mathbf{n} = 0 \quad (31)$$

Portanto, o sistema

$$\mathbf{u}_O + \mathbf{D}\mathbf{X} = 0 \quad (32)$$

não tem solução em geral, o que significa que, geralmente, nenhum ponto do corpo permanece fixo durante a transformação definida na equação (28) a não ser que o deslocamento da origem $\mathbf{u}_O$ seja nulo. Porém, podemos encontrar um ponto C com o deslocamento mínimo $\|\mathbf{u}_C\|$. A sua posição pode ser encontrada resolvendo o seguinte problema

$$\|\mathbf{u}_C\|^2 = \min_{\mathbf{X}} \|\mathbf{D}\mathbf{X} + \mathbf{u}_O\|^2 \quad (33)$$

A solução do problema acima verifica a seguinte equação

$$\mathbf{D}^T(\mathbf{u}_O + \mathbf{D}\mathbf{X}_C) = 0 \quad (34)$$

o que mostra que o deslocamento do ponto C é paralelo ao eixo de rotação

$$\mathbf{u}_C = \mathbf{u}_O + \mathbf{D}\mathbf{X}_C = k\mathbf{n} \quad (35)$$

onde k é uma constante cujo valor pode ser obtido pré-multiplicando a equação (35) por $\mathbf{n}^T$

$$k = \mathbf{n}^T \mathbf{u}_O \quad (36)$$

e a posição do ponto C é solução de

$$\mathbf{D}\mathbf{X}_C = (\mathbf{n}\mathbf{n}^T - \mathbf{I})\mathbf{u}_O \quad (37)$$

No entanto, não podemos resolver este sistema, pois o operador $\mathbf{D}$ não é inversível, como pode ser observado em (31). De modo a eliminar a indeterminação na escolha do ponto C no eixo de rotação, podemos escolher um ponto M no eixo de rotação que satisfaça o sistema acima que seja o mais próximo da origem O . O vetor-posição de M está sujeito ao seguinte vínculo

$$\mathbf{n}^T \mathbf{X}_M = 0 \quad (38)$$

e é solução do seguinte sistema

$$\begin{bmatrix} \mathbf{D} \\ \mathbf{n}^T \end{bmatrix} \mathbf{X}_M = \begin{bmatrix} \mathbf{n}\mathbf{n}^T - \mathbf{I} \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}_O \quad (39)$$

Este sistema é formalmente sobre-determinado com quatro equações e três incógnitas. Porém, sua sobre-determinação é apenas formal, já que, apenas três das quatro equações são linearmente independentes. A solução do sistema acima pode ser obtida utilizando a inversa generalizada de Moore-Penrose (Campbell e Meyer 1979)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{D}^T & \mathbf{n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{D} \\ \mathbf{n}^T \end{bmatrix} \mathbf{X}_M = -\mathbf{D}^T \mathbf{u}_O \quad (40)$$

donde

$$\mathbf{X}_M = -\frac{\mathbf{D}^T \mathbf{u}_O}{2(1 - \cos\phi)} \quad (41)$$

Podemos verificar que o deslocamento do ponto M consiste apenas de uma translação

$$\mathbf{u}_M = k\mathbf{n} + \mathbf{D}(\mathbf{X}_M - \mathbf{X}_C) = k\mathbf{n} \quad (42)$$

A partir dos últimos resultados podemos escrever o teorema de Chasles: “*Em um movimento qualquer de um corpo rígido, a posição dos pontos do corpo que possuem o menor deslocamento é definida por uma linha paralela ao eixo de rotação que passa por um ponto M cujo vetor-posição é definido na equação (41)*”.

4 Campo de velocidades de um corpo rígido

Podemos, agora, analisar as velocidades envolvidas em um movimento geral de um corpo rígido. Para tal, como na seção anterior, vamos considerar o movimento de um ponto P do corpo. O vetor-velocidade do ponto P pode ser obtido através da diferenciação com relação ao tempo da equação (28) e é dado pela seguinte expressão

$$\dot{\mathbf{x}}_P = \dot{\mathbf{x}}_O + \dot{\mathbf{R}}\mathbf{X} + \mathbf{R}\dot{\mathbf{X}} \quad (43)$$

Consideremos o caso onde o ponto material é fixo com relação à base material e, portanto, $\dot{\mathbf{X}} = 0$. Desta forma, a equação acima se reduz a:

$$\dot{\mathbf{x}}_P = \dot{\mathbf{x}}_O + \dot{\mathbf{R}}\mathbf{X} \quad (44)$$

Podemos ainda eliminar $\mathbf{X}$ da equação acima exprimindo $\mathbf{X}$ em função $\mathbf{x}_P$. Para tal, podemos inverter a equação (28) obtendo:

$$\mathbf{X} = \mathbf{R}^T(\mathbf{x}_P - \mathbf{x}_O) \quad (45)$$

substituindo a equação (45) na equação (44), obtemos a forma final do vetor-velocidade do ponto P

$$\dot{\mathbf{x}}_P = \dot{\mathbf{x}}_O + \dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T(\mathbf{x}_P - \mathbf{x}_O) \quad (46)$$

onde o operador $\dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T$ é um operador anti-simétrico, já que

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{R}\mathbf{R}^T) = \dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T + \mathbf{R}\dot{\mathbf{R}}^T = \dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T + (\dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T)^T = 0 \quad (47)$$

portanto, podemos definir o operador

$$\tilde{\mathbf{w}} = \dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T \quad (48)$$

como sendo o operador anti-simétrico associado ao vetor-velocidade angular espacial $\mathbf{w}$ do corpo rígido. O isomorfismo entre um operador anti-simétrico e um vetor nos permite escrever $\tilde{\mathbf{w}}\mathbf{h} = \mathbf{w} \times \mathbf{h}$. Tal que, em qualquer base, podemos escrever a seguinte relação entre as componentes da matriz anti-simétrica e do vetor

$$[\tilde{\mathbf{w}}] = \begin{bmatrix} 0 & -w_3 & w_2 \\ w_3 & 0 & -w_1 \\ -w_2 & w_1 & 0 \end{bmatrix} \quad [\mathbf{w}] = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} \quad (49)$$

De forma que a velocidade $\mathbf{v}_P$ do ponto P pode ser escrita como

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_O + \tilde{\mathbf{w}}(\mathbf{x}_P - \mathbf{x}_O) \quad (50)$$

onde $\mathbf{v}_O = \dot{\mathbf{x}}_O$ é o vetor-velocidade do ponto de referência O . Desta maneira, se sabemos a posição e a velocidade de um ponto qualquer do corpo e a velocidade angular do corpo, podemos determinar o seu movimento.

Podemos definir, também, a velocidade angular material que pode ser obtida através da transformação, apresentada na Figura 3,

$$\mathbf{W} = \mathbf{R}^T \mathbf{w} \quad \text{ou} \quad \tilde{\mathbf{W}} = \mathbf{R}^T \tilde{\mathbf{w}} \mathbf{R} \quad (51)$$

donde a velocidade angular material é expressa por

$$\tilde{\mathbf{W}} = \mathbf{R}^T \dot{\mathbf{R}} \quad (52)$$

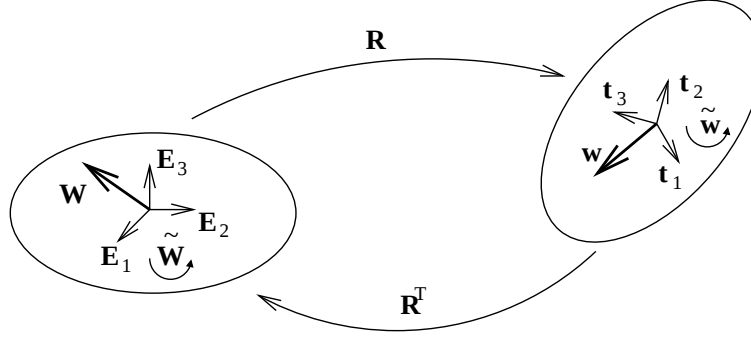


Figura 3: Transformação do vetor velocidade angular

Como a escolha da origem O é arbitrária, é interessante obtermos uma descrição invariante da velocidade do ponto P . Para isso, analogamente ao desenvolvimento da seção anterior, vamos definir um ponto C do corpo como sendo aquele que apresenta menor velocidade. Isto consiste em resolver o seguinte problema

$$\min_{\mathbf{x}_P} \left\{ \frac{1}{2} \mathbf{v}_P^2 \right\} = \min_{\mathbf{x}_P} \left\{ \frac{1}{2} \|\dot{\mathbf{x}}_O + \tilde{\mathbf{w}}(\mathbf{x}_P - \mathbf{x}_O)\|^2 \right\} = \frac{1}{2} \mathbf{v}_C^2 \quad (53)$$

Da equação acima, podemos observar que o vetor-posição $\mathbf{x}_C$ do ponto C verifica a seguinte condição

$$\tilde{\mathbf{w}}^T [\mathbf{v}_O + \tilde{\mathbf{w}}(\mathbf{x}_C - \mathbf{x}_O)] = 0 \quad (54)$$

o que significa que seu vetor-velocidade $\mathbf{v}_C$ é paralelo a direção da velocidade angular

$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_O + \tilde{\mathbf{w}}(\mathbf{x}_C - \mathbf{x}_O) = u \frac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|} \quad (55)$$

O valor de u pode ser obtido projetando a equação acima na direção de $\mathbf{w}$, ou seja, pré-multiplicando a equação por $\mathbf{w}^T$

$$u = \frac{1}{\|\mathbf{w}\|} \mathbf{w}^T \mathbf{v}_O \quad (56)$$

A posição $\mathbf{x}_C$ do ponto C pode ser obtida utilizando as equações (55) e (56)

$$\tilde{\mathbf{w}} \mathbf{x}_C = \tilde{\mathbf{w}} \mathbf{x}_O - \left(\mathbf{I} - \frac{\mathbf{w} \mathbf{w}^T}{\|\mathbf{w}\|^2} \right) \mathbf{v}_O \quad (57)$$

contudo, este sistema não tem solução única pois $\tilde{\mathbf{w}}$ não tem posto máximo. Portanto, vamos supor um conjunto de soluções $\mathbf{x}_C$ da forma

$$\mathbf{x}_C = \mathbf{x}_M + \alpha \mathbf{w} \quad (58)$$

onde $\mathbf{x}_M$ é uma solução particular da equação (57) e α é um parâmetro arbitrário. Todos os pontos $\mathbf{x}_C$ possuem a mesma velocidade mínima definida na equação (55). A equação (58) representa uma linha que passa pelo ponto $\mathbf{x}_M$ e segue na direção da velocidade angular $\mathbf{w}$. Esta linha é chamada de eixo de parafuso instantâneo (instantaneous screw axis) do corpo rígido. O ponto M pode ser considerado como sendo o ponto mais próximo ao ponto de referência, de modo que

$$\mathbf{w}^T \mathbf{x}_M = 0 \quad (59)$$

O vetor-posição do ponto M é, então, solução do seguinte sistema

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{w}} \\ \mathbf{w}^T \end{bmatrix} \mathbf{x}_M = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{w}} \mathbf{x}_O - \left(\mathbf{I} - \frac{\mathbf{w} \mathbf{w}^T}{\|\mathbf{w}\|^2} \right) \mathbf{v}_O \\ 0 \end{bmatrix} \quad (60)$$

Este sistema é formalmente sobre-determinado com quatro equações e três incógnitas, porém essa sobre-determinação é apenas formal, já que apenas três das quatro equações são linearmente independentes. Podemos obter a solução deste sistema utilizando a inversa generalizada de Moore-Penrose. Para tal, vamos pré-multiplicar este sistema por $\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{w}}^T & \mathbf{w} \end{bmatrix}$

$$\|\mathbf{w}\|^2 \mathbf{x}_M = \tilde{\mathbf{w}}^T \tilde{\mathbf{w}} \mathbf{x}_O + \tilde{\mathbf{w}} \mathbf{v}_O \quad (61)$$

donde

$$\mathbf{x}_M = \frac{\tilde{\mathbf{w}}^T \tilde{\mathbf{w}}}{\|\mathbf{w}\|^2} \mathbf{x}_O + \frac{\tilde{\mathbf{w}}}{\|\mathbf{w}\|^2} \mathbf{v}_O \quad (62)$$

A partir dos últimos resultados podemos escrever o seguinte teorema: “A posição dos pontos de um corpo rígido que possuem a menor velocidade é definida por uma linha paralela a velocidade angular espacial que passa por um ponto M cujo vetor-posição é definido na equação (62)”.

A componente u definida na equação (56) é chamada de deslizamento (sliding) do parafuso instantâneo e o passo do parafuso pode ser definido como

$$p = \frac{2\pi u}{\|\mathbf{w}\|} \quad (63)$$

A velocidade de um ponto P arbitrário do corpo rígido pode ser escrita da seguinte forma

$$\mathbf{v}_P = u \frac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|} + \tilde{\mathbf{w}}(\mathbf{x}_P - \mathbf{x}_M) \quad (64)$$

o que mostra que a velocidade de um corpo rígido é composta de uma translação ao longo do eixo instantâneo de rotação e de uma rotação em torno do mesmo eixo.

5 Campo de acelerações de um corpo rígido

Por último, podemos analisar as acelerações envolvidas em um movimento geral de um corpo rígido. Para tal, como nas seções anteriores, vamos considerar o movimento de um ponto P do corpo. O vetor-aceleração do ponto P pode ser obtido através da diferenciação da equação (44) e é dado pela seguinte expressão

$$\ddot{\mathbf{x}}_P = \ddot{\mathbf{x}}_O + \ddot{\mathbf{R}}\mathbf{X} \quad (65)$$

Podemos ainda eliminar $\mathbf{X}$ da equação acima utilizando a equação (45) obtendo:

$$\mathbf{a}_P = \mathbf{a}_O + \ddot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T (\mathbf{x}_P - \mathbf{x}_O) \quad (66)$$

O operador $\ddot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T$ pode ser escrito em termos do operador $\dot{\mathbf{w}} = \dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T$ associado à velocidade angular espacial da seguinte forma

$$\ddot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T = \frac{d}{dt}(\dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T) - \dot{\mathbf{R}}\dot{\mathbf{R}}^T = \dot{\mathbf{w}} + \tilde{\mathbf{w}}\tilde{\mathbf{w}} \quad (67)$$

O primeiro termo, que é anti-simétrico, representa a variação da velocidade angular espacial. A aceleração angular espacial pode ser definida como o vetor associado ao operador $\tilde{\mathbf{a}} = \dot{\mathbf{w}}$, ou seja

$$\boldsymbol{\alpha} = \text{vect}(\tilde{\boldsymbol{\alpha}}) = \text{vect}(\dot{\mathbf{w}}) \quad (68)$$

De maneira que podemos reescrever a equação (66) na forma

$$\mathbf{a}_P = \mathbf{a}_O + (\tilde{\boldsymbol{\alpha}} + \tilde{\mathbf{w}}^2) (\mathbf{x}_P - \mathbf{x}_O) \quad (69)$$

Esta equação determina o campo de acelerações do corpo rígido. Podemos definir, como na seção anterior, a aceleração angular material que pode ser obtida através da transformação

$$\mathbf{A} = \mathbf{R}^T \boldsymbol{\alpha} \quad \text{ou} \quad \tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{R}^T \tilde{\boldsymbol{\alpha}} \mathbf{R} \quad (70)$$

6 Representações do operador rotação

A propriedade de ortogonalidade do operador rotação $\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{I}$ apresentada anteriormente fornece as seis equações de vínculo seguintes:

$$\mathbf{r}_i^T \mathbf{r}_j = \delta_{ij} \quad (i = 1, \dots, j; j = 1, 2, 3) \quad (71)$$

onde $\mathbf{r}_i$ representa uma coluna de $\mathbf{R}$. Desta maneira, temos nove incógnitas e seis equações e portanto, podemos concluir que são necessários três parâmetros arbitrários para determinar o operador $\mathbf{R}$, ou

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \quad (72)$$

onde estes três parâmetros $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ podem ser escolhidos de várias maneiras diferentes.

Nas próximas seções, apresentaremos várias parametrizações possíveis que permitem a representação do operador rotação $\mathbf{R}$.

6.1 Representação de rotações em termos de produtos tensoriais

Podemos observar que os vetores $\mathbf{t}_i$ componentes da base $\mathbf{t}$ também são transformados pelo operador $\mathbf{R}$, como representado na Figura 1, de forma que:

$$\mathbf{t}_i = \mathbf{R}\mathbf{E}_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad (73)$$

portanto podemos representar o operador $\mathbf{R}$ na seguinte forma

$$\mathbf{R} = \mathbf{t}_1 \otimes \mathbf{E}_1 + \mathbf{t}_2 \otimes \mathbf{E}_2 + \mathbf{t}_3 \otimes \mathbf{E}_3 \quad (74)$$

o que significa que o operador $\mathbf{R}$ representado na base mista $(\mathbf{t}_i \otimes \mathbf{E}_j)$ é a própria matriz identidade, já que um vetor $\mathbf{X}$ operado por $\mathbf{R}$ gira solidário à base $\mathbf{t}$, ou seja, o vetor $\mathbf{x}$ representado na base $\mathbf{E}$ é igual ao vetor $\mathbf{x}$ representado na base $\mathbf{t}$.

$$[\mathbf{R}]_{\mathbf{E}}^{\mathbf{t}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (75)$$

Para representarmos o operador $\mathbf{R}$ nas bases $(\mathbf{E}_i \otimes \mathbf{E}_j)$ e $(\mathbf{t}_i \otimes \mathbf{t}_j)$, devemos representar os vetores componentes de uma base na outra. Deste modo, vamos escrever $\mathbf{t}_i$ na base $\mathbf{E}_i$

$$\mathbf{t}_i = (\mathbf{t}_i\mathbf{E}_1)\mathbf{E}_1 + (\mathbf{t}_i\mathbf{E}_2)\mathbf{E}_2 + (\mathbf{t}_i\mathbf{E}_3)\mathbf{E}_3 \quad (i = 1, 2, 3) \quad (76)$$

substituindo esta expressão na equação (74) obtemos a representação do operador $\mathbf{R}$ na base $\mathbf{E}_i \otimes \mathbf{E}_j$, em função dos cossenos diretores

$$\begin{aligned} \mathbf{R} = & (\mathbf{t}_1\mathbf{E}_1)\mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{E}_1 + (\mathbf{t}_1\mathbf{E}_2)\mathbf{E}_2 \otimes \mathbf{E}_1 + (\mathbf{t}_1\mathbf{E}_3)\mathbf{E}_3 \otimes \mathbf{E}_1 + \\ & + (\mathbf{t}_2\mathbf{E}_1)\mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{E}_2 + (\mathbf{t}_2\mathbf{E}_2)\mathbf{E}_2 \otimes \mathbf{E}_2 + (\mathbf{t}_2\mathbf{E}_3)\mathbf{E}_3 \otimes \mathbf{E}_2 + \\ & + (\mathbf{t}_3\mathbf{E}_1)\mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{E}_3 + (\mathbf{t}_3\mathbf{E}_2)\mathbf{E}_2 \otimes \mathbf{E}_3 + (\mathbf{t}_3\mathbf{E}_3)\mathbf{E}_3 \otimes \mathbf{E}_3 \end{aligned} \quad (77)$$

ou, na forma matricial,

$$[\mathbf{R}]_{\mathbf{E}}^{\mathbf{E}} = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_1\mathbf{E}_1 & \mathbf{t}_2\mathbf{E}_1 & \mathbf{t}_3\mathbf{E}_1 \\ \mathbf{t}_1\mathbf{E}_2 & \mathbf{t}_2\mathbf{E}_2 & \mathbf{t}_3\mathbf{E}_2 \\ \mathbf{t}_1\mathbf{E}_3 & \mathbf{t}_2\mathbf{E}_3 & \mathbf{t}_3\mathbf{E}_3 \end{bmatrix} \quad (78)$$

Analogamente, podemos escrever $\mathbf{E}_i$ na base $\mathbf{t}_i$

$$\mathbf{E}_i = (\mathbf{E}_i\mathbf{t}_1)\mathbf{t}_1 + (\mathbf{E}_i\mathbf{t}_2)\mathbf{t}_2 + (\mathbf{E}_i\mathbf{t}_3)\mathbf{t}_3 \quad (i = 1, 2, 3) \quad (79)$$

substituindo esta expressão na equação (74) obtemos a representação do operador $\mathbf{R}$ na base $\mathbf{t}_i \otimes \mathbf{t}_j$, em função dos cossenos diretores

$$\begin{aligned} \mathbf{R} = & (\mathbf{E}_1\mathbf{t}_1)\mathbf{t}_1 \otimes \mathbf{t}_1 + (\mathbf{E}_1\mathbf{t}_2)\mathbf{t}_1 \otimes \mathbf{t}_2 + (\mathbf{E}_1\mathbf{t}_3)\mathbf{t}_1 \otimes \mathbf{t}_3 + \\ & + (\mathbf{E}_2\mathbf{t}_1)\mathbf{t}_2 \otimes \mathbf{t}_1 + (\mathbf{E}_2\mathbf{t}_2)\mathbf{t}_2 \otimes \mathbf{t}_2 + (\mathbf{E}_2\mathbf{t}_3)\mathbf{t}_2 \otimes \mathbf{t}_3 + \\ & + (\mathbf{E}_3\mathbf{t}_1)\mathbf{t}_3 \otimes \mathbf{t}_1 + (\mathbf{E}_3\mathbf{t}_2)\mathbf{t}_3 \otimes \mathbf{t}_2 + (\mathbf{E}_3\mathbf{t}_3)\mathbf{t}_3 \otimes \mathbf{t}_3 \end{aligned} \quad (80)$$

ou, na forma matricial,

$$[\mathbf{R}]_{\mathbf{t}}^{\mathbf{t}} = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_1\mathbf{E}_1 & \mathbf{t}_2\mathbf{E}_1 & \mathbf{t}_3\mathbf{E}_1 \\ \mathbf{t}_1\mathbf{E}_2 & \mathbf{t}_2\mathbf{E}_2 & \mathbf{t}_3\mathbf{E}_2 \\ \mathbf{t}_1\mathbf{E}_3 & \mathbf{t}_2\mathbf{E}_3 & \mathbf{t}_3\mathbf{E}_3 \end{bmatrix} \quad (81)$$

De modo que podemos observar que as representações de $\mathbf{R}$ nas bases $(\mathbf{E}_i \otimes \mathbf{E}_j)$ e $(\mathbf{t}_i \otimes \mathbf{t}_j)$ são iguais

$$[\mathbf{R}]_E^E = [\mathbf{R}]_t^t \quad (82)$$

6.2 Representação de rotações em termos de seus invariantes

Como já foi apresentado anteriormente, qualquer rotação $\mathbf{R}$ pode ser representada por uma rotação plana, de ângulo ϕ , em torno de um eixo $\mathbf{n}$. Nesta seção, apresentaremos os passos para representar o operador rotação $\mathbf{R}$ em termos destes dois invariantes $\mathbf{n}$ e ϕ . Podemos decompor os vetores $\mathbf{X}$ e $\mathbf{x} = \mathbf{R}\mathbf{X}$ em suas partes paralelas e ortogonais ao eixo de rotação $\mathbf{n}$.

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= \mathbf{n}\mathbf{n}^T \mathbf{X} + (\mathbf{I} - \mathbf{n}\mathbf{n}^T) \mathbf{X} \\ \mathbf{x} &= \mathbf{n}\mathbf{n}^T \mathbf{x} + (\mathbf{I} - \mathbf{n}\mathbf{n}^T) \mathbf{x} \end{aligned} \quad (83)$$

observando que

$$\mathbf{n}\mathbf{n}^T \mathbf{R} = \mathbf{n}\mathbf{n}^T \quad (84)$$

e definindo as partes ortogonais de $\mathbf{X}$ e $\mathbf{x}$ como $\mathbf{Y}$ e $\mathbf{y}$

$$\begin{aligned} \mathbf{Y} &= (\mathbf{I} - \mathbf{n}\mathbf{n}^T) \mathbf{X} \\ \mathbf{y} &= (\mathbf{I} - \mathbf{n}\mathbf{n}^T) \mathbf{x} = (\mathbf{I} - \mathbf{n}\mathbf{n}^T) \mathbf{R}\mathbf{X} \end{aligned} \quad (85)$$

Podemos reescrever a equação (83) na seguinte forma

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= \mathbf{n}\mathbf{n}^T \mathbf{X} + \mathbf{Y} \\ \mathbf{x} &= \mathbf{n}\mathbf{n}^T \mathbf{X} + \mathbf{y} \end{aligned} \quad (86)$$

Sabemos que, na transformação operada por $\mathbf{R}$, a parte ortogonal de $\mathbf{x}$ apresenta uma rotação plana no plano ortogonal a $\mathbf{n}$ e, conseqüentemente,

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{Y}}\mathbf{y} &= \|\mathbf{Y}\|^2 \mathbf{n} \sin \phi \\ \mathbf{Y}^T \mathbf{y} &= \|\mathbf{Y}\|^2 \cos \phi \end{aligned} \quad (87)$$

reescrevendo o sistema em forma matricial, obtemos

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{Y}} \\ \mathbf{Y}^T \end{bmatrix} \mathbf{y} = \|\mathbf{Y}\|^2 \begin{bmatrix} \mathbf{n} \sin \phi \\ \cos \phi \end{bmatrix} \quad (88)$$

Este sistema é formalmente sobre-determinado com quatro equações e três incógnitas. Porém, sua sobre-determinação é apenas formal, pois o operador $\tilde{\mathbf{Y}}$ não é inversível, já que $\tilde{\mathbf{Y}}\mathbf{Y} = 0$. Portanto, apenas três das quatro equações são linearmente independentes. Para resolver este sistema, vamos pré-multiplicar o sistema acima pela inversa generalizada de Moore-Penrose (Campbell e Meyer 1979) do primeiro termo $\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{Y}}^T & \mathbf{Y} \end{bmatrix}$

$$(\tilde{\mathbf{Y}}^T \tilde{\mathbf{Y}} + \mathbf{Y}\mathbf{Y}^T) \mathbf{y} = \|\mathbf{Y}\|^2 \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{Y}}^T & \mathbf{Y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{n} \sin \phi \\ \cos \phi \end{bmatrix} \quad (89)$$

onde, a seguinte expressão é verdadeira para qualquer $\mathbf{Y}$

$$\tilde{\mathbf{Y}}^T \tilde{\mathbf{Y}} + \mathbf{Y}\mathbf{Y}^T = \|\mathbf{Y}\|^2 \mathbf{I} \quad (90)$$

Desta forma, podemos escrever

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{Y}}^T & \mathbf{Y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{n} \sin \phi \\ \cos \phi \end{bmatrix} \quad (91)$$

ou

$$\mathbf{y} = (\tilde{\mathbf{n}} \sin \phi + \mathbf{I} \cos \phi) \mathbf{Y} \quad (92)$$

Da equação (85), podemos eliminar $\mathbf{Y}$ e $\mathbf{y}$, obtendo

$$\mathbf{x} = [\mathbf{I} \cos \phi + (1 - \cos \phi) \mathbf{n} \mathbf{n}^T + \tilde{\mathbf{n}} \sin \phi] \mathbf{X} \quad (93)$$

resultado que nos fornece a forma do operador rotação $\mathbf{R}$, em função de $\mathbf{n}$ e ϕ

$$\boxed{\mathbf{R}(\mathbf{n}, \phi) = \mathbf{I} \cos \phi + (1 - \cos \phi) \mathbf{n} \mathbf{n}^T + \tilde{\mathbf{n}} \sin \phi} \quad (94)$$

onde podemos observar que o operador $\mathbf{R}$ possui os seguintes invariantes lineares, que serão bastante úteis para obter os parâmetros a partir de uma dada matriz de rotação

$$\begin{aligned} \text{tr}(\mathbf{R}) = 1 + 2 \cos \phi &\Rightarrow \phi = \cos^{-1} \left[\frac{\text{tr}(\mathbf{R}) - 1}{2} \right] \\ \text{vect}(\mathbf{R}) = \mathbf{n} \sin \phi &\Rightarrow \mathbf{n} = \frac{\text{vect}(\mathbf{R})}{\sin \phi} \end{aligned} \quad (95)$$

Se reescrevermos a transformação através da relação

$$\mathbf{x} = \mathbf{R} \mathbf{X} \quad (96)$$

e derivarmos a relação em termos do ângulo de rotação ϕ , obtemos

$$\frac{d\mathbf{x}}{d\phi} = \frac{d\mathbf{R}}{d\phi} \mathbf{x} = \frac{d\mathbf{R}}{d\phi} \mathbf{R}^T \mathbf{x} \quad (97)$$

onde

$$\frac{d\mathbf{R}}{d\phi} = \tilde{\mathbf{n}} \cos \phi - (\mathbf{I} - \mathbf{n} \mathbf{n}^T) \sin \phi \quad (98)$$

Podemos verificar que

$$\frac{d\mathbf{R}}{d\phi} \mathbf{R}^T = \tilde{\mathbf{n}} \quad (99)$$

Portanto, substituindo este resultado na equação (97) podemos verificar que $\mathbf{x}$ satisfaz a seguinte equação

$$\frac{d\mathbf{x}}{d\phi} - \tilde{\mathbf{n}} \mathbf{x} = 0 \quad \text{onde} \quad \mathbf{x}|_{\phi=0} = \mathbf{X} \quad (100)$$

cuja solução é

$$\mathbf{x} = \exp(\tilde{\mathbf{n}} \phi) \mathbf{X} \quad (101)$$

onde concluímos que o operador rotação $\mathbf{R}$ pode também ser representado pelos invariantes $\mathbf{n}$ e ϕ através da seguinte relação

$$\boxed{\mathbf{R}(\mathbf{n}, \phi) = \exp(\tilde{\mathbf{n}} \phi)} \quad (102)$$

Agora, podemos representar as velocidades angulares espacial $\mathbf{w}$ e material $\mathbf{W}$ em termos dos invariantes $\mathbf{n}$ e ϕ , e de suas derivadas $\dot{\mathbf{n}}$ e $\dot{\phi}$. Para tal, vamos relembrar as seguintes propriedades de invariância do operador rotação

$$\mathbf{R}\mathbf{n} = \mathbf{n} \quad \mathbf{R}^T \mathbf{n} = \mathbf{n} \quad (103)$$

Derivando as duas expressões acima no tempo

$$(\mathbf{R} - \mathbf{I}) \dot{\mathbf{n}} = -\dot{\mathbf{R}}\mathbf{n} \quad (\mathbf{R}^T - \mathbf{I}) \dot{\mathbf{n}} = -\dot{\mathbf{R}}^T \mathbf{n} \quad (104)$$

Se pré-multiplicarmos a primeira equação por $\mathbf{R}^T$ e a segunda por $\mathbf{R}$, obtemos

$$(\mathbf{R}^T - \mathbf{I}) \dot{\mathbf{n}} = \mathbf{R}^T \dot{\mathbf{R}}\mathbf{n} = \tilde{\mathbf{W}}\mathbf{n} \quad (\mathbf{I} - \mathbf{R}) \dot{\mathbf{n}} = -\mathbf{R}\dot{\mathbf{R}}^T \mathbf{n} = \tilde{\mathbf{w}}\mathbf{n} \quad (105)$$

e, consequentemente,

$$(\mathbf{I} - \mathbf{R}^T) \dot{\mathbf{n}} = \tilde{\mathbf{n}}\mathbf{W} \quad (\mathbf{R} - \mathbf{I}) \dot{\mathbf{n}} = \tilde{\mathbf{n}}\mathbf{w} \quad (106)$$

Porém, não podemos resolver estas equações já que os operadores $(\mathbf{I} - \mathbf{R}^T)$ e $(\mathbf{R} - \mathbf{I})$ não são inversíveis, pois

$$(\mathbf{I} - \mathbf{R}^T) \mathbf{n} = 0 \quad (\mathbf{R} - \mathbf{I}) \mathbf{n} = 0 \quad (107)$$

Mas, sabemos também que o vetor $\mathbf{n}$ é unitário, portanto, podemos obter a seguinte relação adicional

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{n}^T \mathbf{n}) = 2\mathbf{n}^T \dot{\mathbf{n}} = 0 \quad (108)$$

donde $\dot{\mathbf{n}}$ é solução dos seguintes sistemas

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} - \mathbf{R}^T \\ \mathbf{n}^T \end{bmatrix} \dot{\mathbf{n}} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{n}}\mathbf{W} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{R} - \mathbf{I} \\ \mathbf{n}^T \end{bmatrix} \dot{\mathbf{n}} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{n}}\mathbf{w} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (109)$$

Os sistemas acima representam um sistema formalmente sobre-determinado de quatro equações e três incógnitas. Porém, a sobre-determinação destes sistemas é apenas formal, pois as três primeiras equações não são linearmente independentes. Estes sistemas podem ser resolvidos pré-multiplicando-os pela inversa de Moore-Penrose (Campbell e Meyer 1979) do primeiro termo

$$\begin{aligned} [2\mathbf{I} - (\mathbf{R} + \mathbf{R}^T) + \mathbf{n}\mathbf{n}^T] \dot{\mathbf{n}} &= (\mathbf{I} - \mathbf{R}) \tilde{\mathbf{n}}\mathbf{W} \\ [2\mathbf{I} - (\mathbf{R} + \mathbf{R}^T) + \mathbf{n}\mathbf{n}^T] \dot{\mathbf{n}} &= (\mathbf{R}^T - \mathbf{I}) \tilde{\mathbf{n}}\mathbf{w} \end{aligned} \quad (110)$$

Sendo que, da expressão de $\mathbf{R}$, obtida na equação (94), podemos verificar que

$$[2\mathbf{I} - (\mathbf{R} + \mathbf{R}^T) + \mathbf{n}\mathbf{n}^T] \dot{\mathbf{n}} = 2(1 - \cos\phi) \dot{\mathbf{n}} \quad (111)$$

e

$$\begin{aligned} (\mathbf{I} - \mathbf{R}) \tilde{\mathbf{n}} &= (1 - \cos\phi) \tilde{\mathbf{n}} - \sin\phi \tilde{\mathbf{n}}\tilde{\mathbf{n}} \\ (\mathbf{R}^T - \mathbf{I}) \tilde{\mathbf{n}} &= -(1 - \cos\phi) \tilde{\mathbf{n}} - \sin\phi \tilde{\mathbf{n}}\tilde{\mathbf{n}} \end{aligned} \quad (112)$$

Então, obtemos as seguintes relações

$$\mathbf{B}\mathbf{W} = \dot{\mathbf{n}} \quad \mathbf{B}^T \mathbf{w} = \dot{\mathbf{n}} \quad (113)$$

onde

$$\mathbf{B} = \left[\frac{1}{2} \tilde{\mathbf{n}} + \frac{\sin \phi}{2(1 - \cos \phi)} (\mathbf{I} - \mathbf{n}\mathbf{n}^T) \right] \quad (114)$$

Porém, estes sistemas não podem ser resolvidos porque o operador $\mathbf{B}$ não tem posto máximo. Portanto, escrevamos as seguintes relações adicionais entre as velocidades angulares $\mathbf{W}$ e $\mathbf{w}$ e a derivada do ângulo de rotação $\dot{\phi}$

$$\text{tr}(\dot{\mathbf{R}}) = \text{tr}(\mathbf{R}\tilde{\mathbf{W}}) = \text{tr}(\tilde{\mathbf{w}}\mathbf{R}) = \frac{d}{dt}(\text{tr}(\mathbf{R})) = -2\dot{\phi} \sin \phi \quad (115)$$

Vamos decompor o operador $\mathbf{R}$ em suas partes simétrica e anti-simétrica

$$\mathbf{R} = \mathbf{S} + \tilde{\mathbf{a}} \quad \text{onde} \quad \mathbf{a} = \mathbf{n} \sin \phi \quad (116)$$

Podemos verificar, também, as duas seguintes propriedades válidas para quaisquer $\mathbf{a}$, $\mathbf{u}$ e $\mathbf{S}$ (simétrica)

$$\begin{aligned} \text{tr}(\mathbf{S}\tilde{\mathbf{u}}) &= \text{tr}(\tilde{\mathbf{u}}\mathbf{S}) = 0 \\ \text{tr}(\tilde{\mathbf{a}}\tilde{\mathbf{u}}) &= \text{tr}(\tilde{\mathbf{u}}\tilde{\mathbf{a}}) = -2\mathbf{a}^T \mathbf{u} \end{aligned} \quad (117)$$

donde, obtemos

$$\text{tr}(\mathbf{R}\tilde{\mathbf{W}}) = -2\dot{\phi} \sin \phi = -2\mathbf{n}^T \mathbf{W} \sin \phi \quad (118)$$

$$\text{tr}(\tilde{\mathbf{w}}\mathbf{R}) = -2\dot{\phi} \sin \phi = -2\mathbf{n}^T \mathbf{w} \sin \phi \quad (119)$$

Agora, podemos obter os vetores $\mathbf{w}$ e $\mathbf{W}$ resolvendo os seguintes sistemas

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{n}^T \end{bmatrix} \mathbf{W} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{n}} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{B}^T \\ \mathbf{n}^T \end{bmatrix} \mathbf{w} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{n}} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} \quad (120)$$

cujas soluções podem ser escritas na forma

$$\mathbf{W} = \mathbf{A}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{B}^T & \mathbf{n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{n}} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} \quad \mathbf{w} = \mathbf{A}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{n}} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} \quad (121)$$

onde o operador $\mathbf{A} = \mathbf{B}^T \mathbf{B} + \mathbf{n}\mathbf{n}^T$ possui como inverso

$$\mathbf{A}^{-1} = [2(1 - \cos \phi) (\mathbf{I} - \mathbf{n}\mathbf{n}^T) + \mathbf{n}\mathbf{n}^T] \quad (122)$$

Desta forma, obtemos as expressões de $\mathbf{w}$ e $\mathbf{W}$ em termos dos invariantes $\mathbf{n}$ e ϕ , e suas derivadas

$$\boxed{\mathbf{W} = \mathbf{M}\dot{\mathbf{n}} + \mathbf{n}\dot{\phi} \quad ; \quad \mathbf{w} = \mathbf{M}^T \dot{\mathbf{n}} + \mathbf{n}\dot{\phi}} \quad (123)$$

onde

$$\boxed{\mathbf{M} = \sin \phi \mathbf{I} - (1 - \cos \phi) \tilde{\mathbf{n}}} \quad (124)$$

Agora, podemos, também, obter as expressões das acelerações angulares em termos dos invariantes $\mathbf{n}$ e ϕ , e suas derivadas $\dot{\mathbf{n}}$, $\ddot{\mathbf{n}}$, $\dot{\phi}$, $\ddot{\phi}$, derivando diretamente a equação (123)

$$\mathbf{A} = \dot{\mathbf{W}} = \mathbf{M}\ddot{\mathbf{n}} + \mathbf{n}\ddot{\phi} + \dot{\mathbf{M}}\dot{\mathbf{n}} + \dot{\mathbf{n}}\dot{\phi} \quad ; \quad \alpha = \dot{\mathbf{w}} = \mathbf{M}^T \ddot{\mathbf{n}} + \mathbf{n}\ddot{\phi} + \dot{\mathbf{M}}^T \dot{\mathbf{n}} + \dot{\mathbf{n}}\dot{\phi} \quad (125)$$

onde o operador $\dot{\mathbf{M}}$ pode ser simplificado notando que

$$\dot{\mathbf{n}}\dot{\mathbf{n}} = 0 \quad (126)$$

portanto,

$$\boxed{\mathbf{A} = \mathbf{M}\ddot{\mathbf{n}} + \mathbf{n}\ddot{\phi} + \mathbf{N}\dot{\mathbf{n}} + \dot{\mathbf{n}}\dot{\phi} \quad ; \quad \alpha = \mathbf{M}^T \ddot{\mathbf{n}} + \mathbf{n}\ddot{\phi} + \mathbf{N}^T \dot{\mathbf{n}} + \dot{\mathbf{n}}\dot{\phi}} \quad (127)$$

onde

$$\boxed{\mathbf{N} = \dot{\phi}(\cos\phi\mathbf{I} - \text{sen}\phi\tilde{\mathbf{n}})} \quad (128)$$

6.3 Representação de rotações em termos do vetor rotação

A representação do operador rotação em termos dos invariantes $\mathbf{n}$ e ϕ possui o inconveniente de ser escrita em termos de quatro parâmetros: as três componentes de $\mathbf{n}$ e o ângulo ϕ . Portanto, é interessante apresentarmos o vetor rotação. O vetor rotação é definido como o vetor que possui a direção do eixo instantâneo de rotação e o comprimento igual a amplitude de rotação

$$\boldsymbol{\Psi} = \mathbf{n}\phi \quad (129)$$

Desta forma, podemos representar o operador $\mathbf{R}$ em termos do vetor rotação, substituindo a equação (129) na equação (94) e utilizando a expressão (90)

$$\boxed{\mathbf{R}(\boldsymbol{\Psi}) = \mathbf{I} + \frac{\text{sen}\|\boldsymbol{\Psi}\|}{\|\boldsymbol{\Psi}\|}\tilde{\boldsymbol{\Psi}} + \frac{1 - \cos\|\boldsymbol{\Psi}\|}{\|\boldsymbol{\Psi}\|^2}\tilde{\boldsymbol{\Psi}}\tilde{\boldsymbol{\Psi}}} \quad (130)$$

ou na forma exponencial substituindo a equação (129) na equação (102)

$$\boxed{\mathbf{R}(\boldsymbol{\Psi}) = \exp(\tilde{\boldsymbol{\Psi}})} \quad (131)$$

O vetor rotação pode ser obtido a partir do operador rotação, calculando-se o traço e o vetor associado de $\mathbf{R}$

$$\begin{aligned} \text{tr}(\mathbf{R}) &= 1 + 2\cos\|\boldsymbol{\Psi}\| \quad \Rightarrow \quad \|\boldsymbol{\Psi}\| = \cos^{-1} \frac{\text{tr}(\mathbf{R}) - 1}{2} \\ \text{vect}(\mathbf{R}) &= \frac{1}{\|\boldsymbol{\Psi}\|}\boldsymbol{\Psi}\text{sen}\|\boldsymbol{\Psi}\| \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\Psi} = \frac{\|\boldsymbol{\Psi}\|}{\text{sen}\|\boldsymbol{\Psi}\|}\text{vect}(\mathbf{R}) \end{aligned} \quad (132)$$

Para obtermos as expressões de velocidade angular em termos do vetor rotação e de sua derivada temporal, é interessante notar as seguintes relações

$$\dot{\boldsymbol{\Psi}} = \dot{\mathbf{n}}\phi + \mathbf{n}\dot{\phi} \quad \text{e} \quad \mathbf{n}^T \dot{\mathbf{n}} = 0 \quad (133)$$

Invertendo o sistema acima, obtemos

$$\dot{\phi} = \mathbf{n}^T \dot{\boldsymbol{\Psi}} = \frac{1}{\|\boldsymbol{\Psi}\|}\boldsymbol{\Psi}^T \dot{\boldsymbol{\Psi}} \quad ; \quad \dot{\mathbf{n}} = (\mathbf{I} - \mathbf{n}\mathbf{n}^T) \frac{\dot{\boldsymbol{\Psi}}}{\phi} = -\frac{\tilde{\boldsymbol{\Psi}}\tilde{\boldsymbol{\Psi}}}{\|\boldsymbol{\Psi}\|^3}\dot{\boldsymbol{\Psi}} \quad (134)$$

Substituindo estes resultados na equação (123) podemos escrever as velocidades angulares na forma

$$\boxed{\mathbf{W} = \mathbf{T}(\Psi) \dot{\Psi} \quad \mathbf{w} = \mathbf{T}^T(\Psi) \dot{\Psi}} \quad (135)$$

onde o operador $\mathbf{T}$ é

$$\boxed{\mathbf{T}(\Psi) = \mathbf{I} + \left(\frac{\cos \|\Psi\| - 1}{\|\Psi\|^2} \right) \tilde{\Psi} + \left(1 - \frac{\sin \|\Psi\|}{\|\Psi\|} \right) \frac{\tilde{\Psi} \tilde{\Psi}}{\|\Psi\|^2}} \quad (136)$$

A aparente singularidade em $\|\Psi\| = 0$ que aparece nas expressões (130) e (136) dos operadores $\mathbf{R}$ e $\mathbf{T}$ é facilmente eliminada notando que

$$\lim_{\|\Psi\| \rightarrow 0} \mathbf{T}(\Psi) = \lim_{\|\Psi\| \rightarrow 0} \mathbf{R}(\Psi) = \mathbf{I} \quad (137)$$

As acelerações angulares podem ser obtidas derivando as equações (135)

$$\boxed{\mathbf{A} = \mathbf{T}(\Psi) \ddot{\Psi} + \dot{\mathbf{T}}(\Psi) \dot{\Psi} \quad \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{T}^T(\Psi) \ddot{\Psi} + \dot{\mathbf{T}}^T(\Psi) \dot{\Psi}} \quad (138)$$

6.4 Forma de Cayley de uma matriz ortogonal – Parâmetros de Rodrigues

Se reiniciarmos da transformação descrita através da relação

$$\mathbf{x} = \mathbf{R}\mathbf{X} \quad \text{onde} \quad \mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{I} \quad (139)$$

sendo que sabemos que esta transformação preserva o comprimento do vetor inicial. Podemos expressar este fato da seguinte forma

$$\mathbf{x}^T \mathbf{x} - \mathbf{X}^T \mathbf{X} = (\mathbf{x} + \mathbf{X})^T (\mathbf{x} - \mathbf{X}) = 0 \quad (140)$$

Podemos introduzir dois vetores $\mathbf{f}$ e $\mathbf{g}$ definidos por

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= \mathbf{x} - \mathbf{X} = (\mathbf{R} - \mathbf{I})\mathbf{X} \\ \mathbf{g} &= \mathbf{x} + \mathbf{X} = (\mathbf{R} + \mathbf{I})\mathbf{X} \end{aligned} \quad (141)$$

substituindo $\mathbf{f}$ e $\mathbf{g}$ na equação (140)

$$\mathbf{g}^T \mathbf{f} = 0 \quad (142)$$

Utilizando a equação (141) obtemos a seguinte relação entre $\mathbf{f}$ e $\mathbf{g}$

$$\mathbf{f} = (\mathbf{R} - \mathbf{I})(\mathbf{R} + \mathbf{I})^{-1} \mathbf{g} = \mathbf{B}\mathbf{g} \quad (143)$$

donde obtemos o seguinte resultado

$$\mathbf{g}^T \mathbf{B}\mathbf{g} = 0 \quad (144)$$

Através da última expressão, deduzimos que o operador $\mathbf{B}$ é, necessariamente, anti-simétrico. O isomorfismo entre uma matriz anti-simétrica e um vetor nos permite relacionar as componentes da matriz e do vetor correspondentes. Portanto, podemos definir o vetor $\mathbf{b}$, cujas componentes em uma base qualquer são $[b_1 \ b_2 \ b_3]$, tal que o isomorfismo entre a matriz anti-simétrica $\mathbf{B}$ e o vetor $\mathbf{b}$ nos permite escrever a seguinte relação

$$[\mathbf{B}] = [\tilde{\mathbf{b}}] = \begin{bmatrix} 0 & -b_3 & b_2 \\ b_3 & 0 & -b_1 \\ -b_2 & b_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (145)$$

Podemos inverter a relação entre $\mathbf{B}$ e $\mathbf{R}$ definida na equação (143), obtendo a seguinte expressão de $\mathbf{R}$

$$\mathbf{R} = (\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{b}})^{-1}(\mathbf{I} + \tilde{\mathbf{b}}) \quad (146)$$

Esta última expressão corresponde a uma escolha de três parâmetros para descrever o operador rotação. Porém, é conveniente expandirmos o primeiro termo da multiplicação da última equação. Para tal, consideremos a seguinte identidade

$$(\alpha \mathbf{I} + \beta \mathbf{h} \otimes \mathbf{h} + \gamma \tilde{\mathbf{h}})^{-1} = (\alpha_1 \mathbf{I} + \beta_1 \mathbf{h} \otimes \mathbf{h} + \gamma_1 \tilde{\mathbf{h}}) \quad (147)$$

onde

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{\alpha}{\gamma^2 \|\mathbf{h}\|^2 + \alpha^2} \\ \beta_1 &= \frac{(\gamma^2 - \alpha\beta)}{(\gamma^2 \|\mathbf{h}\|^2 + \alpha^2)(\alpha + \beta \|\mathbf{h}\|^2)} \\ \gamma_1 &= \frac{-\gamma}{\gamma^2 \|\mathbf{h}\|^2 + \alpha^2} \end{aligned} \quad (148)$$

Baseados nesta igualdade, podemos calcular o operador

$$(\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{b}})^{-1} = \frac{1}{1 + \|\mathbf{b}\|^2} [\mathbf{I} + \mathbf{b} \otimes \mathbf{b} + \tilde{\mathbf{b}}] \quad (149)$$

Substituindo o último resultado na equação (146), obtemos a forma algébrica geral do operador rotação

$$\boxed{\mathbf{R}(\mathbf{b}) = \mathbf{I} + \frac{2}{1 + \|\mathbf{b}\|^2} (\tilde{\mathbf{b}} + \tilde{\mathbf{b}}\tilde{\mathbf{b}})} \quad (150)$$

em termos de três parâmetros $[b_1 \ b_2 \ b_3]$. Comparando a equação (94) com a última equação, podemos deduzir a seguinte relação

$$\mathbf{n} \sin \phi = \frac{2\mathbf{b}}{1 + \|\mathbf{b}\|^2} \quad (151)$$

e, portanto,

$$\boxed{\mathbf{b} = \mathbf{n} \tan \frac{\phi}{2}} \quad (152)$$

O conjunto de três parâmetros b_i definidos acima são, normalmente, chamados de parâmetros de Rodrigues. O vetor $\mathbf{b}$ formado pelos parâmetros de Rodrigues é também conhecido por Vetor de Gibbs (Wertz, 1978, Shuster, 1993a).

Os parâmetros de Rodrigues oferecem a vantagem de representar a rotação através de uma expressão simples em função de apenas três parâmetros. Eles podem ser obtidos a partir do operador $\mathbf{R}$, calculando o traço e o vetor associado de $\mathbf{R}$

$$\begin{aligned} \text{tr}(\mathbf{R}) &= \frac{3 - \|\mathbf{b}\|^2}{1 + \|\mathbf{b}\|^2} \Rightarrow \|\mathbf{b}\|^2 = \frac{3 - \text{tr}(\mathbf{R})}{1 + \text{tr}(\mathbf{R})} \\ \text{vect}(\mathbf{R}) &= \frac{2\mathbf{b}}{1 + \|\mathbf{b}\|^2} \Rightarrow \mathbf{b} = \frac{1}{2} (1 + \|\mathbf{b}\|^2) \text{vect}(\mathbf{R}) \end{aligned} \quad (153)$$

Este procedimento de inversão apresenta uma singularidade quando $\phi = \pm\pi$. Para obtermos as expressões das velocidades angulares em termos dos parâmetros de Rodrigues e suas derivadas, podemos derivar a equação (152)

$$\dot{\mathbf{b}} = \dot{\mathbf{n}} \tan \frac{\phi}{2} + \mathbf{n} \frac{\dot{\phi}}{2} \frac{1}{\cos^2 \frac{\phi}{2}} \quad (154)$$

Pré-multiplicando a última equação por $\mathbf{n}^T$, obtemos a expressão

$$\dot{\phi} = 2 \cos^2 \frac{\phi}{2} \mathbf{n}^T \dot{\mathbf{b}} \quad (155)$$

e, substituindo esta expressão na anterior, obtemos

$$\dot{\mathbf{n}} = \frac{1}{\tan \frac{\phi}{2}} (\mathbf{I} - \mathbf{n}\mathbf{n}^T) \dot{\mathbf{b}} \quad (156)$$

Substituindo os últimos resultados na equação (123), obtemos as expressões das velocidades angulares

$$\boxed{\mathbf{W} = \mathbf{T}(\mathbf{b}) \dot{\mathbf{b}} \quad \mathbf{w} = \mathbf{T}^T(\mathbf{b}) \dot{\mathbf{b}}} \quad (157)$$

onde o operador $\mathbf{T}$ é

$$\boxed{\mathbf{T}(\mathbf{b}) = \frac{2}{1 + \|\mathbf{b}\|^2} (\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{b}})} \quad (158)$$

As acelerações angulares podem ser obtidas através do mesmo procedimento utilizado na seção anterior.

6.5 Representação de rotações em termos dos parâmetros de Euler

A representação do operador rotação em termos dos parâmetros de Euler, conhecidos também por parâmetros simétricos de Euler ou parâmetros de Euler-Rodrigues (ver Cheng e Gupta, 1989, Wertz, 1978 e Shuster, 1993a), pode ser obtida diretamente da representação em termos dos invariantes $\mathbf{n}$ e ϕ . Eles aparecem através da seguinte mudança de variáveis

$$\boxed{e_0 = \cos \frac{\phi}{2} \quad \mathbf{e} = \mathbf{n} \sin \frac{\phi}{2}} \quad (159)$$

onde

$$-1 \leq e_i \leq 1 \quad i = (0, \dots, 3) \quad (160)$$

Os parâmetros e_i não são quantidades independentes já que são relacionados pela seguinte restrição

$$e_0^2 + e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 1 \quad (161)$$

Podemos, também, observar que os parâmetros de Euler são relacionados com os parâmetros de Rodrigues da seguinte forma

$$\mathbf{b} = \frac{1}{e_0} \mathbf{e} \quad (162)$$

A partir desta última relação e da equação (150), podemos, facilmente, escrever o operador rotação em termos dos parâmetros de Euler

$$\boxed{\mathbf{R}(e_0, \mathbf{e}) = \mathbf{I} + 2e_0 \tilde{\mathbf{e}} + 2\tilde{\mathbf{e}}\tilde{\mathbf{e}}} \quad (163)$$

O operador rotação $\mathbf{R}$ também pode ser expresso como produto de dois operadores 4×3 que são escritos em termos dos parâmetros de Euler na seguinte forma

$$\boxed{\mathbf{R} = \mathbf{H}\mathbf{G}^T} \quad (164)$$

onde

$$\boxed{\mathbf{H} = \begin{bmatrix} -\mathbf{e} & e_0 \mathbf{I} + \tilde{\mathbf{e}} \end{bmatrix} \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} -\mathbf{e} & e_0 \mathbf{I} - \tilde{\mathbf{e}} \end{bmatrix}} \quad (165)$$

A desvantagem dos parâmetros de Euler é representar a rotação através de quatro parâmetros dependentes, mas esta representação não apresenta nenhuma singularidade. Eles podem ser obtidos a partir da operador $\mathbf{R}$, calculando o traço e o vetor associado de $\mathbf{R}$

$$\begin{aligned} \text{tr}(\mathbf{R}) = 4e_0^2 - 1 &\Rightarrow e_0 = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\text{tr}(\mathbf{R}) + 1} \\ \text{vect}(\mathbf{R}) = 2e_0 \mathbf{e} &\Rightarrow \mathbf{e} = \frac{\text{vect}(\mathbf{R})}{2e_0}, e_0 \neq 0 \end{aligned} \quad (166)$$

Porém, este procedimento não apenas só é útil quando e_0 não é nulo, i.e., quando $\phi \neq \pm\pi$, mas é numericamente ineficiente quando e_0 se aproxima de zero. Portanto, apresentaremos uma fórmula (Spurrier 1978) que permite a inversão com máximas precisão e eficiência.

O primeiro passo é construir uma matriz simétrica $\mathbf{S}$ a partir dos elementos r_i da matriz $\mathbf{R}$, tal que

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 + r_{11} + r_{22} + r_{33} & r_{32} - r_{23} & r_{13} - r_{31} & r_{21} - r_{12} \\ r_{32} - r_{23} & 1 + r_{11} - r_{22} - r_{33} & r_{12} + r_{21} & r_{13} + r_{31} \\ r_{13} - r_{31} & r_{21} + r_{12} & 1 - r_{11} + r_{22} - r_{33} & r_{23} + r_{32} \\ r_{21} - r_{12} & r_{13} + r_{31} & r_{23} + r_{32} & 1 - r_{11} - r_{22} + r_{33} \end{bmatrix} \quad (167)$$

sendo que, substituindo os elementos de $\mathbf{R}$, podemos observar facilmente que

$$\mathbf{S} = 4 \begin{bmatrix} e_0^2 & e_1 e_0 & e_2 e_0 & e_3 e_0 \\ e_0 e_1 & e_1^2 & e_2 e_1 & e_3 e_1 \\ e_0 e_2 & e_1 e_2 & e_2^2 & e_3 e_2 \\ e_0 e_3 & e_1 e_3 & e_2 e_3 & e_3^2 \end{bmatrix} \quad (168)$$

Portanto, podemos usar o maior elemento da diagonal para calcular os parâmetros

$$\mathbf{S}_{ii} = \max_k \{\mathbf{S}_{kk}\} \rightarrow \begin{cases} e_i = \frac{1}{2} \sqrt{\mathbf{S}_{ii}} \\ e_k = \frac{\mathbf{S}_{ik}}{4e_i} \quad k = 0, \dots, 3 \quad (k \neq i) \end{cases} \quad (169)$$

Para obtermos as expressões das velocidades angulares em termos dos parâmetros de Euler e suas derivadas, vamos derivar a equação (159) com respeito ao tempo. Obtemos o seguinte sistema de equações

$$\begin{cases} \dot{e}_0 = -\frac{1}{2} \dot{\phi} \sin \frac{\phi}{2} \\ \dot{\mathbf{e}} = \dot{\mathbf{n}} \sin \frac{\phi}{2} + \frac{1}{2} \mathbf{n} \dot{\phi} \cos \frac{\phi}{2} \end{cases} \quad (170)$$

o qual pode ser invertido na forma

$$\begin{cases} \dot{\phi} = -\frac{2}{\sin \frac{\phi}{2}} \dot{e}_0 \\ \dot{\mathbf{n}} = \frac{1}{\sin^2 \frac{\phi}{2}} \left[\dot{\mathbf{e}} \sin \frac{\phi}{2} + \dot{e}_0 \mathbf{n} \cos \frac{\phi}{2} \right] \end{cases} \quad (171)$$

Substituindo a equação acima na equação (123) e nomeando $\mathbf{p}^T = [e_0 \ \mathbf{e}^T]$, o vetor dos parâmetros de Euler, obtemos

$$\boxed{\mathbf{W} = 2\mathbf{G}(\mathbf{p}) \dot{\mathbf{p}} \quad \mathbf{w} = 2\mathbf{H}(\mathbf{p}) \dot{\mathbf{p}}} \quad (172)$$

onde os operadores $\mathbf{H}$ e $\mathbf{G}$ foram introduzidos na equação (165). As acelerações angulares podem ser obtidas através da diferenciação das expressões das velocidades angulares.

6.6 Álgebra de quatérnios

A álgebra de quatérnios (Wehage, 1984) fornece uma maneira muito elegante de descrever rotações finitas. Ela conduz ao mesmo conceito dos parâmetros de Euler mas, de maneira completamente diferente. A regra fundamental de multiplicação de quatérnios fornece uma maneira eficiente de expressar a velocidade angular e, também, de combinar rotações sucessivas.

6.6.1 Definição e propriedades

Um quatérnio é definido como um número complexo quadri-dimensional

$$\boxed{\hat{q} = q_0 + iq_1 + jq_2 + kq_3} \quad (173)$$

onde i, j e k são símbolos tais que

$$\begin{aligned} i^2 &= j^2 = k^2 = -1 \\ jk &= -kj = i \\ ki &= -ik = j \\ ij &= -ji = k \end{aligned} \quad (174)$$

Podemos adotar também a notação vetorial

$$\hat{\mathbf{q}} = q_0 + \mathbf{q} \quad (175)$$

onde q_0 é a parte escalar e $\mathbf{q}$ é a parte vetorial do quaternion. A regra de multiplicação de quaternios é derivada da propriedade (174) dos símbolos

$$\hat{\mathbf{r}} = \hat{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{q}} = p_0q_0 - \mathbf{p}^T\mathbf{q} + p_0\mathbf{q} + q_0\mathbf{p} + \tilde{\mathbf{p}}\mathbf{q} \quad (176)$$

é importante ressaltar que a regra de multiplicação não é comutativa devido a presença do produto vetorial no último termo cujo sinal é invertido ao se inverter a ordem de $\hat{\mathbf{p}}$ e $\hat{\mathbf{q}}$.

1. O quaternion conjugado é definido como

$$\hat{\mathbf{q}}^* = q_0 - iq_1 - jq_2 - kq_3 = q_0 - \mathbf{q} \quad (177)$$

2. A norma de um quaternion é definida como

$$\|\hat{\mathbf{q}}\|^2 = \hat{\mathbf{q}}\hat{\mathbf{q}}^* = q_0^2 + \mathbf{q}^T\mathbf{q} \quad (178)$$

3. Um quaternion é definido como unitário quando

$$\|\hat{\mathbf{q}}\| = 1 \quad (179)$$

4. Um quaternion vetorial é definido como um quaternion cuja parte escalar é nula

$$\hat{\mathbf{q}} = 0 + \mathbf{q} \Rightarrow \hat{\mathbf{q}} + \hat{\mathbf{q}}^* = 0 \quad (180)$$

6.6.2 Representação de rotações em termos de quaternios

Sejam $\hat{\mathbf{q}}$ e $\hat{\mathbf{X}}$ quaternios unitário e vetorial, respectivamente

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{q}} &= q_0 + \mathbf{q} \quad \text{onde} \quad \|\hat{\mathbf{q}}\| = 1 \\ \hat{\mathbf{X}} &= 0 + \mathbf{X} \end{aligned} \quad (181)$$

podemos verificar que a rotação de um vetor $\mathbf{x}$ é dada por

$$\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{q}}\hat{\mathbf{X}}\hat{\mathbf{q}}^* \quad (182)$$

A prova é obtida verificando que

1. a norma de $\hat{\mathbf{X}}$ é preservada na transformação:

$$\begin{aligned} \|\hat{\mathbf{x}}\|^2 &= \hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}^* = (\hat{\mathbf{q}}\hat{\mathbf{X}}\hat{\mathbf{q}}^*)(\hat{\mathbf{q}}\hat{\mathbf{X}}\hat{\mathbf{q}}^*)^* \\ &= \hat{\mathbf{q}}\hat{\mathbf{X}}\hat{\mathbf{q}}^*\hat{\mathbf{q}}\hat{\mathbf{X}}\hat{\mathbf{q}}^* = \hat{\mathbf{q}}\|\hat{\mathbf{X}}\|^2\hat{\mathbf{q}}^* = \|\hat{\mathbf{X}}\|^2 \end{aligned} \quad (183)$$

2. o quaternio resultante $\hat{\mathbf{x}}$ é também um quaternio vetorial:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{x}}^* &= (\hat{\mathbf{q}}\hat{\mathbf{X}}\hat{\mathbf{q}}^*) + (\hat{\mathbf{q}}\hat{\mathbf{X}}\hat{\mathbf{q}}^*)^* = \hat{\mathbf{q}}\hat{\mathbf{X}}\hat{\mathbf{q}}^* + \hat{\mathbf{q}}\hat{\mathbf{X}}^*\hat{\mathbf{q}}^* \\ &= \hat{\mathbf{q}}(\hat{\mathbf{X}} + \hat{\mathbf{X}}^*)\hat{\mathbf{q}}^* = 0\end{aligned}\quad (184)$$

A operação de rotação inversa pode ser escrita na seguinte forma

$$\hat{\mathbf{X}} = \hat{\mathbf{q}}^*\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{q}} \quad (185)$$

indicando que a transposição inverte o sentido da rotação. Podemos notar a equivalência dos quaternios com os parâmetros de Euler colocando o quaternio unitário na forma

$$\hat{\mathbf{q}} = \cos \frac{\phi}{2} + \mathbf{n} \sin \frac{\phi}{2} \quad \text{onde} \quad \|\mathbf{n}\| = 1 \quad (186)$$

Utilizando a equação (182) e a regra de multiplicação de quaternios, obtemos

$$\hat{\mathbf{x}} = 0 + (\mathbf{I} \cos \phi + (1 - \cos \phi) \mathbf{nn}^T + \tilde{\mathbf{n}} \sin \phi) \mathbf{x} \quad (187)$$

Esta transformação é a anteriormente apresentada na equação (94). Consideremos, agora, duas rotações sucessivas $\hat{\mathbf{q}}_1$ e $\hat{\mathbf{q}}_2$

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{X}}_1 &= \hat{\mathbf{q}}_1 \hat{\mathbf{X}} \hat{\mathbf{q}}_1^* \\ \hat{\mathbf{X}}_2 &= \hat{\mathbf{q}}_2 \hat{\mathbf{X}}_1 \hat{\mathbf{q}}_2^* = (\hat{\mathbf{q}}_2 \hat{\mathbf{q}}_1) \hat{\mathbf{X}} (\hat{\mathbf{q}}_2 \hat{\mathbf{q}}_1)^*\end{aligned}\quad (188)$$

elas originam a seguinte rotação resultante

$$\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{q}} \hat{\mathbf{X}} \hat{\mathbf{q}}^* \quad \text{onde} \quad \hat{\mathbf{q}} = \hat{\mathbf{q}}_2 \hat{\mathbf{q}}_1 \quad (189)$$

Este resultado nos permite afirmar o seguinte: “*Duas rotações sucessivas podem ser combinadas multiplicando-se os quaternios correspondentes na ordem apropriada*”.

Para obtermos as expressões das velocidades angulares em termos de quaternios, vamos derivar a equação (182) com respeito ao tempo para $\dot{\mathbf{X}} = 0$

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \dot{\hat{\mathbf{q}}} \hat{\mathbf{X}} \hat{\mathbf{q}}^* + \hat{\mathbf{q}} \dot{\hat{\mathbf{X}}} \hat{\mathbf{q}}^* \quad (190)$$

Substituindo a equação (185) na equação acima e utilizando (179), obtemos

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \dot{\hat{\mathbf{q}}} \hat{\mathbf{q}}^* \hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{x}} \hat{\mathbf{q}} \dot{\hat{\mathbf{q}}}^* \quad (191)$$

Se derivarmos a equação (179) no tempo, obtemos a importante relação

$$\dot{\hat{\mathbf{q}}} \hat{\mathbf{q}}^* + \hat{\mathbf{q}} \dot{\hat{\mathbf{q}}}^* = \dot{\hat{\mathbf{q}}} \hat{\mathbf{q}}^* + (\dot{\hat{\mathbf{q}}} \hat{\mathbf{q}}^*)^* = 0 \quad (192)$$

que mostra que o quaternio $\dot{\hat{\mathbf{q}}} \hat{\mathbf{q}}^*$ é um quaternio vetorial e pode ser escrito na seguinte forma

$$\dot{\hat{\mathbf{q}}} \hat{\mathbf{q}}^* = \frac{1}{2} \hat{\mathbf{w}} = 0 + \frac{1}{2} \mathbf{w} \quad (193)$$

Substituindo esta relação na equação (191) obtemos

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \frac{1}{2} (\hat{\mathbf{w}}\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{w}}) = 0 + \frac{1}{2} (\tilde{\mathbf{w}}\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}\mathbf{w}) \quad (194)$$

e, consequentemente,

$$\dot{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{w}}\mathbf{x} \quad (195)$$

mostrando que a parte vetorial de $\hat{\mathbf{w}}$ é a velocidade angular espacial cuja expressão pode ser desenvolvida a partir de (193)

$$\boxed{\mathbf{w} = 2(q_0\dot{\mathbf{q}} - \dot{q}_0\mathbf{q} + \tilde{\mathbf{q}}\dot{\mathbf{q}})} \quad (196)$$

Podemos, também, obter a expressão da velocidade angular material, utilizando a equação (191)

$$\dot{\hat{\mathbf{X}}} = \hat{\mathbf{q}}^*\dot{\hat{\mathbf{x}}}\hat{\mathbf{q}} = \hat{\mathbf{q}}^*\dot{\hat{\mathbf{q}}}\hat{\mathbf{X}} + \hat{\mathbf{X}}\dot{\hat{\mathbf{q}}}^*\hat{\mathbf{q}} \quad (197)$$

Analogamente ao caso anterior, podemos escrever o quaternio $\hat{\mathbf{q}}^*\dot{\hat{\mathbf{q}}}$ na seguinte forma

$$\hat{\mathbf{q}}^*\dot{\hat{\mathbf{q}}} = \frac{1}{2}\hat{\mathbf{W}} = 0 + \frac{1}{2}\mathbf{W} \quad (198)$$

Substituindo esta relação na equação (197) obtemos

$$\dot{\hat{\mathbf{X}}} = \frac{1}{2} (\hat{\mathbf{W}}\hat{\mathbf{X}} - \hat{\mathbf{X}}\hat{\mathbf{W}}) = 0 + \frac{1}{2} (\tilde{\mathbf{W}}\mathbf{X} - \tilde{\mathbf{X}}\mathbf{W}) \quad (199)$$

e, consequentemente,

$$\dot{\mathbf{X}} = \tilde{\mathbf{W}}\mathbf{X} \quad (200)$$

mostrando que a parte vetorial de $\hat{\mathbf{W}}$ é a velocidade angular material cuja expressão pode ser desenvolvida a partir de (198)

$$\boxed{\mathbf{W} = 2(q_0\dot{\mathbf{q}} - \dot{q}_0\mathbf{q} - \tilde{\mathbf{q}}\dot{\mathbf{q}})} \quad (201)$$

6.6.3 Representação matricial de quaternios

Podemos representar os quaternios na forma matricial através de uma matriz coluna quadridimensional

$$\hat{\mathbf{q}} = [q_0 \ q_1 \ q_2 \ q_3]^T \quad (202)$$

O produto de dois quaternios $\hat{\mathbf{a}} = \hat{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{q}}$ pode ser escrito na seguinte forma

$$\hat{\mathbf{a}} = \mathbf{A}_p\hat{\mathbf{q}} = \mathbf{B}_q\hat{\mathbf{p}} \quad (203)$$

com as matrizes 4×4

$$\mathbf{A}_p = \begin{bmatrix} p_0 & -\mathbf{p}^T \\ \mathbf{p} & p_0\mathbf{I} + \tilde{\mathbf{p}} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{B}_q = \begin{bmatrix} q_0 & -\mathbf{q}^T \\ \mathbf{q} & q_0\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{q}} \end{bmatrix} \quad (204)$$

Na forma matricial, o operador rotação (182) em um quaternio vetorial pode ser escrito como

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_q \mathbf{B}_q^T \hat{\mathbf{X}} \quad (205)$$

onde o produto matricial

$$\mathbf{A}_q \mathbf{B}_q^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{R} \end{bmatrix} \quad (206)$$

Desta forma, podemos extrair o operador $\mathbf{R}$

$$\boxed{\mathbf{R}(\hat{\mathbf{q}}) = (2q_0^2 - 1) \mathbf{I} + 2\mathbf{q}\mathbf{q}^T + 2q_0\tilde{\mathbf{q}}} \quad (207)$$

Podemos verificar que a expressão obtida é similar a expressão em termos dos parâmetros de Euler, portanto podemos facilmente escrever as velocidades angulares

$$\boxed{\mathbf{W} = 2\mathbf{G}(\hat{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} \quad \mathbf{w} = 2\mathbf{H}(\hat{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}}} \quad (208)$$

onde os operadores $\mathbf{H}$ e $\mathbf{G}$ foram introduzidos na equação (165), ou na forma de quatérnios

$$\boxed{\hat{\mathbf{W}} = 2\mathbf{A}^T \dot{\hat{\mathbf{q}}} \quad \hat{\mathbf{w}} = 2\mathbf{B}^T \dot{\hat{\mathbf{q}}}} \quad (209)$$

As acelerações angulares podem ser obtidas através da diferenciação das expressões das velocidades angulares.

6.7 Representação de rotações em termos do vetor rotação conforme

O vetor rotação conforme (VRC) é obtido aplicando-se um rotação conforme nos parâmetros de Euler (Milenkovic 1982)

$$c_i = \frac{4e_i}{1 + e_0} \quad (i = 0, \dots, 3) \quad (210)$$

Esta rotação produz um conjunto de três parâmetros independentes função da quarta parte do ângulo de rotação

$$\boxed{\mathbf{c} = 4\mathbf{n} \tan \frac{\phi}{4}} \quad (211)$$

e, onde

$$c_0 = \frac{1}{8} (16 - \|\mathbf{c}\|^2) \quad (212)$$

Uma vantagem importante do VRC é sua relação praticamente linear com o ângulo de rotação ϕ no intervalo $[-\pi, +\pi]$, ilustrada na Figura 4 que apresenta a relação do ângulo ϕ e suas primeira e segunda derivadas com o módulo do VRC.

A representação de rotações em termos do vetor rotação conforme possui uma singularidade em $\phi = \pm 2\pi$, pois $\|\mathbf{c}\| = \pm\infty$. Porém, ao contrário dos parâmetros de Rodrigues, no intervalo $\phi \in [-\pi, +\pi]$, o VRC não apresenta nenhuma singularidade já que neste intervalo

$$\begin{cases} 0 \leq c_0 \leq 2 \\ -4 \leq c_i \leq +4 \end{cases} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (213)$$

Utilizando algumas relações trigonométricas, podemos observar facilmente que

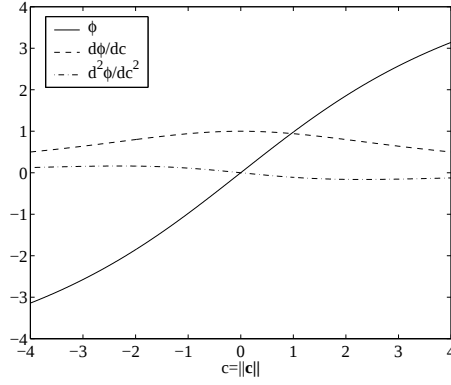


Figura 4: Variação do ângulo de rotação e suas derivadas em termos do VRC

$$\mathbf{b} = \frac{\mathbf{c}}{c_0} \quad (214)$$

Substituindo este resultado na equação (150) e utilizando a equação (212), obtemos a expressão do operador $\mathbf{R}$ em termos do VRC

$$\mathbf{R}(c_0, \mathbf{c}) = \mathbf{I} + \frac{2}{(c_0 - 4)^2} (c_0 \tilde{\mathbf{c}} + \tilde{\mathbf{c}}\tilde{\mathbf{c}}) \quad (215)$$

A principal propriedade do VRC é o fato de que a rotação total $\mathbf{R}$ pode ser dividida em duas rotações $\mathbf{F}$ de mesma amplitude $\frac{1}{2}\phi$, a qual pode ser computada em termos dos parâmetros de Rodrigues considerando meia rotação.

$$\mathbf{R} = \mathbf{F}^2 \quad (216)$$

onde $\mathbf{F}$ pode ser escrita da seguinte forma

$$\mathbf{F} = \mathbf{I} + \frac{1}{(c_0 - 4)} \left(\tilde{\mathbf{c}} + \frac{1}{4} \tilde{\mathbf{c}}\tilde{\mathbf{c}} \right) \quad (217)$$

Para obtermos as expressões das velocidades angulares em termos do VRC e suas derivadas, podemos derivar a equação (211)

$$\dot{\mathbf{c}} = 4\dot{\mathbf{n}} \tan \frac{\phi}{4} + \frac{\mathbf{n}}{\cos^2 \frac{\phi}{4}} \dot{\phi} \quad (218)$$

Pré-multiplicando a última equação por $\mathbf{n}^T$, obtemos a expressão

$$\dot{\phi} = \cos^2 \frac{\phi}{4} \mathbf{n}^T \dot{\mathbf{c}} \quad (219)$$

e, substituindo esta expressão na anterior, obtemos

$$\dot{\mathbf{n}} = \frac{1}{4 \tan \frac{\phi}{4}} (\mathbf{I} - \mathbf{n}\mathbf{n}^T) \dot{\mathbf{c}} \quad (220)$$

Substituindo os últimos resultados na equação (123) e utilizando algumas relações trigonométricas, obtemos as expressões das velocidades angulares

$$\boxed{\mathbf{W} = \mathbf{T}(c_0, \mathbf{c}) \dot{\mathbf{c}} \quad \mathbf{w} = \mathbf{T}^T(c_0, \mathbf{c}) \dot{\mathbf{c}}} \quad (221)$$

onde o operador $\mathbf{T}$ é

$$\boxed{\mathbf{T}(c_0, \mathbf{c}) = \frac{2}{(4 - c_0)^2} \left[(4 - c_0) \mathbf{I} - \tilde{\mathbf{c}} + \frac{1}{4} \tilde{\mathbf{c}} \tilde{\mathbf{c}} \right]} \quad (222)$$

As acelerações angulares podem ser obtidas através do mesmo procedimento utilizado na seção anterior.

6.8 Representação de rotações no plano

A rotação mais simples que podemos considerar é a rotação plana de um ângulo finito em torno de um eixo coordenado. Sejam os eixos $\mathbf{E}_1\mathbf{E}_2\mathbf{E}_3$ e $\mathbf{t}_1\mathbf{t}_2\mathbf{t}_3$, apresentados na Figura 5. O eixo $\mathbf{E}_1\mathbf{E}_2\mathbf{E}_3$ é fixo no espaço e o eixo $\mathbf{t}_1\mathbf{t}_2\mathbf{t}_3$ é solidário a um vetor $\mathbf{X}$. Suponhamos, agora, que giremos o vetor $\mathbf{X}$ de um ângulo ϕ em torno do eixo $\mathbf{E}_3$.

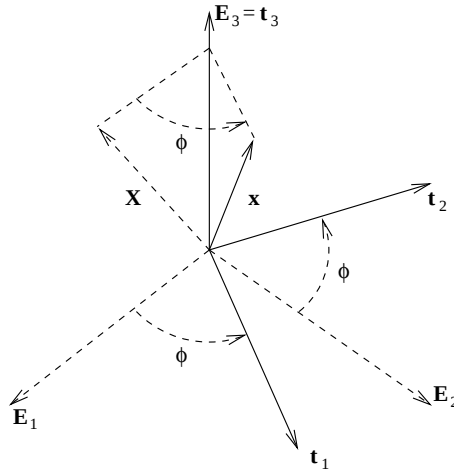


Figura 5: Rotação no plano $\mathbf{E}_1\mathbf{E}_2$

Se considerarmos que o vetor $\mathbf{X}$ possui componentes $[X_1 \ X_2 \ X_3]$ na base material $\mathbf{E}$, as novas componentes do mesmo vetor na base espacial $\mathbf{t}$, após a rotação ϕ , podem ser escritas da seguinte forma:

$$\begin{cases} x_1 = X_1 \cos \phi - X_2 \sin \phi \\ x_2 = X_1 \sin \phi + X_2 \cos \phi \\ x_3 = X_3 \end{cases} \quad (223)$$

Se escrevermos em forma matricial, obtemos:

$$\mathbf{x} = \mathbf{R}\mathbf{X} \quad (224)$$

onde o operador rotação $\mathbf{R}$ é da seguinte forma:

$$[\mathbf{R}(\mathbf{z}, \varphi)]_{\mathbf{t}}^{\mathbf{t}} = [\mathbf{R}(\mathbf{z}, \varphi)]_{\mathbf{E}}^{\mathbf{E}} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (225)$$

Da mesma forma, podemos obter o operador rotação para rotações nos outros eixos coordenados $\mathbf{E}_1$ e $\mathbf{E}_2$ de ângulos ψ e θ , respectivamente.

$$[\mathbf{R}(\mathbf{x}, \psi)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \psi & -\sin \psi \\ 0 & \sin \psi & \cos \psi \end{bmatrix} \quad (226)$$

$$[\mathbf{R}(\mathbf{y}, \theta)] = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (227)$$

6.9 Não-comutatividade de rotações

Consideremos um corpo rígido submetido a duas rotações sucessivas $\mathbf{R}_1$ e $\mathbf{R}_2$ de 90° em torno dos eixos $\mathbf{z}$ e $\mathbf{y}$, respectivamente (Figura 6)

$$\mathbf{R}_1 = \mathbf{R}_1(\mathbf{z}, 90^\circ) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathbf{R}_2 = \mathbf{R}_2(\mathbf{y}, 90^\circ) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (228)$$

Sabemos que o produto de matrizes não é comutativo, i.e.

$$\mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \mathbf{R}_2 \mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (229)$$

No caso de rotações finitas, a não-comutatividade significa que a inversão da ordem das operações de rotação dá origem a diferentes configurações geométricas do corpo no qual as operações foram aplicadas. Esta propriedade implica que, em qualquer decomposição de uma rotação finita em termos de rotações elementares sucessivas, a ordem na qual as rotações elementares são aplicadas é essencial.

6.10 Representação de rotações em termos dos ângulos de Euler

Os ângulos de Euler formam um conjunto de três parâmetros independentes que permitem representar o operador rotação através da superposição de três rotações planas (Junkins e Shuster, 1993). Existem 12 diferentes conjuntos de ângulos de Euler (Mayer, 1960, p.85, Wertz, 1978, Shuster, 1993a), 6 simétricos e 6 assimétricos. Nesta seção, usaremos o seguinte conjunto simétrico (Figura 7):

1. Uma rotação de ψ (precessão) em torno do eixo $\mathbf{E}_3$: $\mathbf{R}_1(\mathbf{z}, \psi)$

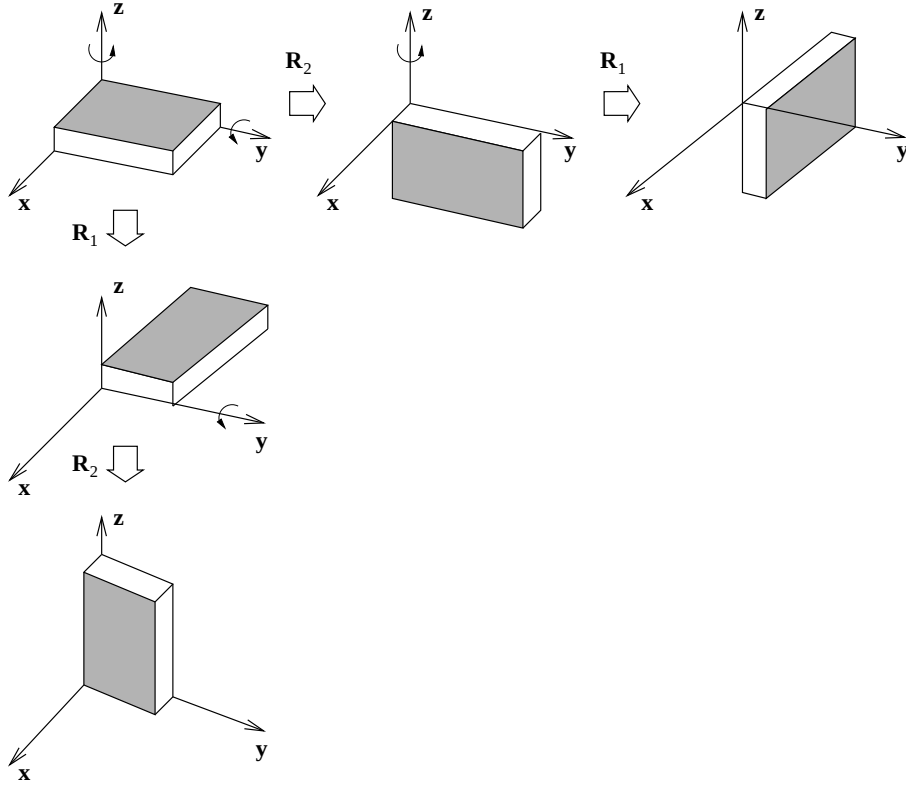


Figura 6: Ilustração da propriedade de não-comutatividade de rotações finitas

2. Uma rotação de θ (nutação) em torno do eixo $\mathbf{r}_1$: $\mathbf{R}_2(\mathbf{x}, \theta)$
3. Uma rotação de φ (rotação própria) em torno do eixo $\mathbf{s}_3$: $\mathbf{R}_3(\mathbf{z}, \varphi)$

Podemos escrever a transformação resultante da seguinte forma:

$$\mathbf{x} = \mathbf{R}\mathbf{X} \quad (230)$$

onde o operador rotação $\mathbf{R}$ é a composição das três rotações na seguinte ordem

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_3(\mathbf{z}, \varphi)\mathbf{R}_2(\mathbf{x}, \theta)\mathbf{R}_1(\mathbf{z}, \psi) \quad (231)$$

Para obtermos a expressão matricial do operador $\mathbf{R}$ em termos dos ângulos de Euler, devemos então desenvolver o produto acima, para tal, devemos escrever os operadores $\mathbf{R}_1$, $\mathbf{R}_2$ e $\mathbf{R}_3$ na mesma base, digamos $\mathbf{t}_i \otimes \mathbf{t}_j$. Onde,

$$[\mathbf{R}(\mathbf{z}, \psi)]_{\mathbf{r}}^{\mathbf{r}} = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (232)$$

$$[\mathbf{R}(\mathbf{x}, \theta)]_{\mathbf{s}}^{\mathbf{s}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (233)$$

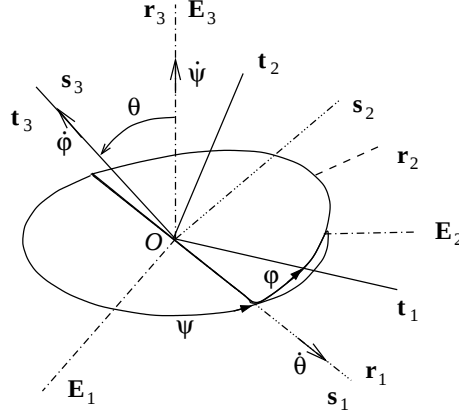


Figura 7: Representação dos ângulos de Euler

$$[\mathbf{R}(\mathbf{z}, \varphi)]_{\mathbf{t}}^{\mathbf{t}} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (234)$$

O operador $\mathbf{R}$ pode ser escrito da seguinte forma

$$[\mathbf{R}]_{\mathbf{t}}^{\mathbf{t}} = [\mathbf{R}_3(\mathbf{z}, \varphi)]_{\mathbf{t}}^{\mathbf{t}} [\mathbf{R}_2(\mathbf{y}, \theta)]_{\mathbf{t}}^{\mathbf{t}} [\mathbf{R}_1(\mathbf{z}, \psi)]_{\mathbf{t}}^{\mathbf{t}} \quad (235)$$

onde a mudança de base pode ser escrita da seguinte forma

$$[\mathbf{R}_2(\mathbf{x}, \theta)]_{\mathbf{t}}^{\mathbf{t}} = \mathbf{Q}_3 [\mathbf{R}_2(\mathbf{x}, \theta)]_{\mathbf{s}}^{\mathbf{s}} \mathbf{Q}_3^{-1} \quad (236)$$

$$[\mathbf{R}_1(\mathbf{z}, \psi)]_{\mathbf{t}}^{\mathbf{t}} = \mathbf{Q}_3 \mathbf{Q}_2 [\mathbf{R}_1(\mathbf{z}, \psi)]_{\mathbf{r}}^{\mathbf{r}} \mathbf{Q}_2^{-1} \mathbf{Q}_3^{-1} \quad (237)$$

Conforme, demonstrado na seção anterior, as matrizes de mudança de base são similares às matrizes de rotação, de forma que as matrizes $\mathbf{Q}_2$ e $\mathbf{Q}_3$ são

$$\mathbf{Q}_2 = [\mathbf{R}_2^{-1}(\mathbf{x}, \theta)]_{\mathbf{s}}^{\mathbf{s}} \quad \text{e} \quad \mathbf{Q}_3 = [\mathbf{R}_3^{-1}(\mathbf{z}, \varphi)]_{\mathbf{t}}^{\mathbf{t}} \quad (238)$$

Substituindo as últimas expressões na equação (235) obtemos

$$[\mathbf{R}]_{\mathbf{t}}^{\mathbf{t}} = [\mathbf{R}_1(\psi)]_{\mathbf{r}}^{\mathbf{r}} [\mathbf{R}_2(\theta)]_{\mathbf{s}}^{\mathbf{s}} [\mathbf{R}_3(\varphi)]_{\mathbf{t}}^{\mathbf{t}} \quad (239)$$

donde, podemos escrever a expressão

$$[\mathbf{R}(\psi, \theta, \varphi)]_{\mathbf{t}}^{\mathbf{t}} = \begin{bmatrix} c\psi c\varphi - s\psi c\theta s\varphi & -c\psi s\varphi - s\psi c\theta c\varphi & s\psi s\theta \\ s\psi c\varphi + c\psi c\theta s\varphi & -s\psi s\varphi + c\psi c\theta c\varphi & -c\psi s\theta \\ s\theta s\varphi & s\theta c\varphi & c\theta \end{bmatrix} \quad (240)$$

com $c = \cos \xi$ e $s = \sin \xi$ ($\xi = \psi, \theta, \varphi$). Os ângulos de Euler podem ser obtidos a partir dos elements r_{ij} da matriz $\mathbf{R}$, através das seguintes relações

$$\varphi = \tan^{-1} \left(\frac{r_{31}}{r_{32}} \right) ; \quad \begin{cases} \sin \theta = r_{31} \sin \varphi + r_{32} \cos \varphi \\ \cos \theta = r_{33} \end{cases} ; \quad \begin{cases} \sin \psi = r_{11} \cos \varphi - r_{12} \sin \varphi \\ \cos \psi = r_{21} \cos \varphi - r_{22} \sin \varphi \end{cases} \quad (241)$$

Podemos observar que esta inversão apresenta uma singularidade quando $\theta = 0, \pi$, pois

$$[\mathbf{R}]_{\mathbf{t}}^{\mathbf{t}} \Big|_{\theta=0,\pi} = \begin{bmatrix} \cos(\psi \pm \varphi) & -\sin(\psi \pm \varphi) & 0 \\ \sin(\psi \pm \varphi) & \cos(\psi \pm \varphi) & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{bmatrix} \quad (242)$$

Para obtermos as expressões das velocidades angulares, vamos relembrar as seguintes relações

$$\tilde{\mathbf{w}} = \dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T \quad \text{e} \quad \tilde{\mathbf{W}} = \mathbf{R}^T \dot{\mathbf{R}} \quad (243)$$

Utilizando o resultado obtido na equação (240), podemos escrever as expressões das velocidades angulares. As componentes da velocidade angular espacial $\mathbf{w}$ na base $\mathbf{E}$ são

$$[\mathbf{w}]_{\mathbf{E}} = [\mathbf{W}]_{\mathbf{t}} = \begin{bmatrix} 0 & \cos \psi & \sin \psi \sin \theta \\ 0 & \sin \psi & -\cos \psi \sin \theta \\ 1 & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} \quad (244)$$

e as suas componentes na base $\mathbf{t}$ são

$$[\mathbf{w}]_{\mathbf{t}} = [\mathbf{W}]_{\mathbf{E}} = \begin{bmatrix} \sin \varphi \sin \theta & \cos \varphi & 0 \\ \cos \varphi \sin \theta & -\sin \varphi & 0 \\ \cos \theta & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} \quad (245)$$

6.11 Representação de rotações em termos dos ângulos de Bryant

Os ângulos de Bryant (Figura 8) fornecem um conjunto assimétrico de ângulos de Euler (Wertz, 1978, Shuster, 1993a) permitindo de representar o operador rotação através da superposição de três rotações planas. As rotações sucessivas são na seguinte ordem:

1. Uma rotação de ψ (yaw) em torno do eixo $\mathbf{E}_3$: $\mathbf{R}_1(\mathbf{z}, \psi)$
2. Uma rotação de θ (pitch) em torno do eixo $\mathbf{r}_2$: $\mathbf{R}_2(\mathbf{y}, \theta)$
3. Uma rotação de φ (roll) em torno do eixo $\mathbf{s}_1$: $\mathbf{R}_3(\mathbf{x}, \varphi)$

Podemos escrever a transformação resultante da seguinte forma:

$$\mathbf{x} = \mathbf{R}\mathbf{X} \quad (246)$$

onde o operador rotação $\mathbf{R}$ é a composição das três rotações na seguinte ordem

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_3(\mathbf{x}, \varphi)\mathbf{R}_2(\mathbf{y}, \theta)\mathbf{R}_1(\mathbf{z}, \psi) \quad (247)$$

Para obtermos a expressão matricial do operador $\mathbf{R}$ em termos dos ângulos de Bryant, devemos então desenvolver o produto acima, para tal, devemos escrever os operadores $\mathbf{R}_1$, $\mathbf{R}_2$ e $\mathbf{R}_3$ na mesma base, digamos $\mathbf{t}_i \otimes \mathbf{t}_j$. Onde,

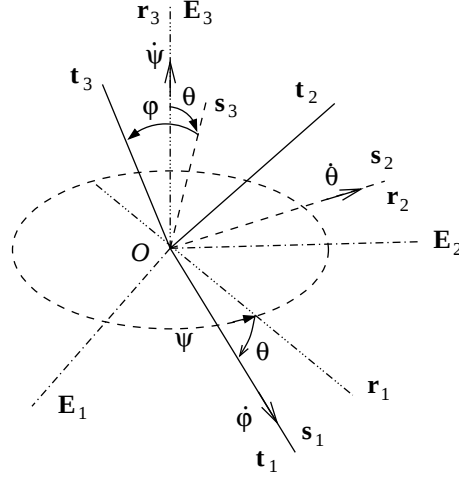


Figura 8: Representação dos ângulos de Bryant

$$[\mathbf{R}(\mathbf{z}, \psi)]_{\mathbf{r}}^{\mathbf{r}} = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (248)$$

$$[\mathbf{R}(\mathbf{y}, \theta)]_{\mathbf{s}}^{\mathbf{s}} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (249)$$

$$[\mathbf{R}(\mathbf{x}, \phi)]_{\mathbf{t}}^{\mathbf{t}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \quad (250)$$

O operador $\mathbf{R}$ pode ser escrito da seguinte forma

$$[\mathbf{R}]_{\mathbf{t}}^{\mathbf{t}} = [\mathbf{R}_3(\mathbf{x}, \phi)]_{\mathbf{t}}^{\mathbf{t}} [\mathbf{R}_2(\mathbf{y}, \theta)]_{\mathbf{t}}^{\mathbf{t}} [\mathbf{R}_1(\mathbf{z}, \psi)]_{\mathbf{t}}^{\mathbf{t}} \quad (251)$$

onde a mudança de base pode ser escrita da seguinte forma

$$[\mathbf{R}_2(\mathbf{y}, \theta)]_{\mathbf{t}}^{\mathbf{t}} = \mathbf{Q}_3 [\mathbf{R}_2(\mathbf{y}, \theta)]_{\mathbf{s}}^{\mathbf{s}} \mathbf{Q}_3^{-1} \quad (252)$$

$$[\mathbf{R}_1(\mathbf{z}, \psi)]_{\mathbf{t}}^{\mathbf{t}} = \mathbf{Q}_3 \mathbf{Q}_2 [\mathbf{R}_1(\mathbf{z}, \psi)]_{\mathbf{r}}^{\mathbf{r}} \mathbf{Q}_2^{-1} \mathbf{Q}_3^{-1} \quad (253)$$

Relembrando a relação das matrizes $\mathbf{Q}_2$ e $\mathbf{Q}_3$ com as matrizes de rotação e substituindo as duas últimas expressões na equação (251) obtemos

$$[\mathbf{R}]_{\mathbf{t}}^{\mathbf{t}} = [\mathbf{R}_1(\mathbf{z}, \psi)]_{\mathbf{r}}^{\mathbf{r}} [\mathbf{R}_2(\mathbf{y}, \theta)]_{\mathbf{s}}^{\mathbf{s}} [\mathbf{R}_3(\mathbf{x}, \phi)]_{\mathbf{t}}^{\mathbf{t}} \quad (254)$$

donde, podemos escrever a expressão

$$[\mathbf{R}(\psi, \theta, \phi)]_{\mathbf{t}}^{\mathbf{t}} = \begin{bmatrix} c\psi c\theta & -s\psi c\phi + c\psi s\theta s\phi & s\psi s\phi + c\psi s\theta c\phi \\ s\psi c\theta & c\psi c\phi + s\psi s\theta s\phi & -c\psi s\phi + s\psi s\theta c\phi \\ -s\theta & c\theta s\phi & c\theta c\phi \end{bmatrix} \quad (255)$$

onde $c = \cos \xi$ e $s = \sin \xi$ ($\xi = \psi, \theta, \varphi$). Os ângulos de Bryant podem ser obtidos a partir dos elementos r_{ij} da matriz $\mathbf{R}$, através das seguintes relações

$$\varphi = \tan^{-1} \left(\frac{r_{32}}{r_{33}} \right) ; \quad \begin{cases} \sin \theta = -r_{31} \\ \cos \theta = r_{32} \sin \varphi + r_{33} \cos \varphi \end{cases} ; \quad \begin{cases} \sin \psi = -r_{12} \cos \varphi + r_{13} \sin \varphi \\ \cos \psi = r_{22} \cos \varphi - r_{23} \sin \varphi \end{cases} \quad (256)$$

Podemos observar que esta inversão apresenta uma singularidade quando $\theta = \pm\pi/2$, pois

$$[\mathbf{R}]_{\mathbf{t}}^{\mathbf{t}} \Big|_{\theta=\pm\pi/2} = \begin{bmatrix} 0 & -\sin(\psi \pm \varphi) & \cos(\psi \pm \varphi) \\ 0 & \cos(\psi \pm \varphi) & \sin(\psi \pm \varphi) \\ \pm 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (257)$$

Para obtermos as expressões das velocidades angulares, vamos relembrar as seguintes relações

$$\tilde{\mathbf{w}} = \dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T \quad \text{e} \quad \tilde{\mathbf{W}} = \mathbf{R}^T \dot{\mathbf{R}} \quad (258)$$

Utilizando o resultado obtido na equação (255), podemos escrever as expressões das velocidades angulares. As componentes da velocidade angular espacial $\mathbf{w}$ na base $\mathbf{E}$ são

$$[\mathbf{w}]_{\mathbf{E}} = [\mathbf{W}]_{\mathbf{t}} = \begin{bmatrix} 0 & -\sin \psi & \cos \psi \cos \theta \\ 0 & \cos \psi & \sin \psi \cos \theta \\ 1 & 0 & -\sin \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} \quad (259)$$

e as suas componentes na base $\mathbf{t}$ são

$$[\mathbf{w}]_{\mathbf{t}} = [\mathbf{W}]_{\mathbf{E}} = \begin{bmatrix} -\sin \varphi & 0 & 1 \\ \sin \varphi \cos \theta & \cos \varphi & 0 \\ \cos \varphi \cos \theta & -\sin \varphi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} \quad (260)$$

7 Conclusões

O problema da representação de rotações finitas para o estudo da dinâmica de corpos rígidos foi estudado. O operador rotação foi derivado a partir de diferentes abordagens e ao problema de parametrização foi dado um tratamento particular. Vários sistemas de parametrização foram apresentados, entre eles:

- Ângulos de Euler
- Ângulos de Bryant
- Parâmetros de Euler
- Parâmetros de Rodrigues
- Vetor Rotação Conforme (VRC)
- Vetor Rotação
- Quaternions

Podemos, agora, fazer uma exposição dos principais pontos favoráveis e desfavoráveis destes sistemas de parametrização. Vários aspectos podem ser analisados, entre eles:

1. Os ângulos de Euler e Bryant são parametrizações criadas para problemas específicos como, por exemplo, os ângulos de Euler para o problema do pião pesado e os ângulos de Bryant para o problema de direcionamento de aeronaves. Devido a este fato, pode-se esperar que eles não sejam apropriados para o estudo de problemas gerais. Os dois sistemas apresentam pontos de singularidade, i.e., a matriz $\mathbf{T}$ não é inversível para $\theta = 0, \pi$, no caso dos ângulos de Euler, e para $\theta = \pm\pi/2$, no caso dos ângulos de Bryant. As outras parametrizações são derivações do teorema de Euler acerca da representação de rotações finitas em termos do eixo e do ângulo de rotação.
2. Os parâmetros de Euler, o VRC e o vetor rotação podem ser utilizados para representar rotações de qualquer magnitude dentro do intervalo $\phi \in [-\pi, \pi]$. Enquanto que, os parâmetros de Rodrigues tendem a infinito quando $|\phi| \rightarrow \pi$. Fora do intervalo $[-\pi, \pi]$, os parâmetros de Euler e o vetor rotação não apresentam singularidades, porém, o VRC tende a infinito quando $|\phi| \rightarrow 2\pi$.
3. Quanto às propriedades de diferenciabilidade, os parâmetros de Euler, o VRC e o vetor rotação possuem o operador tangente $\mathbf{T}$ contínuo e inversível dentro do intervalo $\phi \in [-\pi, \pi]$. Contudo, a única parametrização que permite valores fora deste intervalo é o sistema dos parâmetros de Euler. O vetor rotação apresenta um ponto de singularidade ($\mathbf{T}$ não é inversível) quando $|\phi| = 2\pi$ e o VRC quando $|\phi| = 3.709$. No entanto, esta limitação pode ser facilmente superada trabalhando no intervalo $\phi \in [-\pi, \pi]$ e transformando as rotações que excedem esta faixa em rotações dentro do intervalo somando ou diminuindo o ângulo de rotação de 2π . Sendo que, quando $|\phi| = \pi$, o VRC está mais próximo do ponto de singularidade que o vetor rotação, portanto pode-se esperar um melhor comportamento do último quanto a convergência do algoritmo de integração.
4. O vetor rotação e o VRC têm a vantagem de representar rotações com um número mínimo de parâmetros, enquanto os parâmetros de Euler formam um conjunto de quatro parâmetros dependentes relacionados por um vínculo. Isto causa o inconveniente de se tornar necessária a adição de um multiplicador de Lagrange para descrever o vínculo para cada corpo. De forma que, sob o ponto de vista computacional, se torna necessário um algoritmo que integre EADs (Equações Algébrico-Diferenciais) e não mais EDOs (Equações Diferenciais Ordinárias).
5. Os parâmetros de Euler dão origem a expressões mais simples que o VRC e o vetor rotação, especialmente para as acelerações angulares.
6. Os ângulos de Euler e de Bryant fornecem uma caracterização geométrica imediata da rotação. Dentre os sistemas de parametrização que não apresentam singularidades, o vetor rotação fornece uma caracterização geométrica mais simples da rotação. Enquanto que os outros sistemas requerem interpretação dos valores dando origem a funções trigonométricas razoavelmente complicadas.

Como conclusão final, quanto a parametrização de rotações em problemas de dinâmica de corpos rígidos, podemos dizer que, desde que se possa aceitar o custo de integrar equações algébrico-diferenciais, o sistema de parametrização mais indicado é o dos parâmetros de Euler,

pois é o único que não apresenta singularidade para qualquer magnitude de rotação e, além disso, este sistema dá origem a equações simples. Entretanto, se é desejado ou necessário empregar um sistema de três parâmetros independentes, tanto o VRC quanto o vetor rotação são apropriados. Porém, em geral, o vetor rotação é uma opção mais adequada já que ele fornece uma caracterização geométrica mais simples e melhores propriedades de convergência dos algoritmos de integração.

Referências

- [1] Angeles, J., 1988, “Rational Kinematics”, Springer-Verlag, Berlin.
- [2] Argyris, J.H., 1982, “An Excursion into Large Rotations”, *Comp. Meth. in Appl. Mech. and Eng.*, Vol.32, pp.85–155.
- [3] Arnold, V., 1976, “Les Méthodes Mathématiques de la Mécanique Classique”, Mir, Moscou.
- [4] Atluri, S.N. e Cazzani, A., 1995, “Rotations in Computational Solid Mechanics”, *Arch. Comp. Mech. in Engrg.*, Vol.2, No.1, pp.49–138.
- [5] Bar-Itzhack, I.Y., 1989, “Extension of Euler’s Theorem to N-Dimensional Spaces”, *IEEE Trans. on Aerospace & Electronic Syst.*, Vol.25, pp.903–909.
- [6] Bathe, K. e Bolourchi, S., 1979, “Large Displacement Analysis of Three-Dimensional Beam Structures”, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol.14, pp.961–986.
- [7] Beatty, M.F., 1977, “Vector Analysis of Finite Rigid Rotations”, *J. Appl. Mech.*, Vol.44, pp.501–502.
- [8] Betsche, P., Menzel, A. e Stein, E., 1998, “On the Parametrization of Finite Rotations in Computational Mechanics: A Classification of Concepts with Application to Smooth Shells”, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol.155, pp.273–305.
- [9] Bottema, O. e Roth, B., 1979, “Theoretical Kinematics”, North-Holland Publishing Co., Amsterdam.
- [10] Broucke, R.A., 1990, “Equations of Motion of a Rotating Rigid Body”, *J. Guid. Contr. Dyn.*, Vol.13, pp.1150–1152.
- [11] Campbell, S.L. e Meyer Jr., C.D., 1979, “Generalized Inverses of Linear Transformations”, Pitman, London.
- [12] Cardona, A., 1989, “An Integrated Approach to Mechanism Analysis”, *Tese de Doutorado*, Université de Liège, Bélgica.
- [13] Cheng, H. e Gupta, K.C., 1989, “An Historical Note on Finite Rotations”, *J. Appl. Mech.*, Vol.56, pp.139–145.
- [14] Géraudin, M. e Rixen, D., 1995, “Parametrization of Finite Rotations in Computational Dynamics: A Review”, *Revue Européenne des Eléments Finis*, Vol.4, No.5-6, pp.497–553.
- [15] Goldstein, H., 1964, “Classical Mechanics”, Addison-Wesley Publishing Co., Inc.
- [16] Ibrahimbegovic, A., Frey, F. e Kozar, I., 1995, “Computational Aspects of Vector-Like Parametrization of Three-Dimensional Finite Rotations”, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol.38, pp.3653–3673.

- [17] Junkins, J.I. e Shuster, M.D., 1993, "The Geometry of the Euler Angles", *J. Astronautical Sci.*, Vol.41, No.4, pp.531–543.
- [18] Mayer, A., 1960, "Rotations and Their Algebra", *SIAM Review*, Vol.2, pp.77–122
- [19] Meirovitch, L., 1970, "Methods of Analytical Dynamics", McGraw-Hill.
- [20] Milenkovic, V., 1982, "Coordinates Suitable for Angular Motion Synthesis in Robots", *Anais da conferência ROBOT 6*.
- [21] Roberson, R.E., 1968, "Kinematic Equations for Bodies whose Rotation is Described by the Euler-Rodrigues Parameters", *AIAA J.*, Vol.6, pp.916–917.
- [22] Rochinha, F.A. e Sampaio, R., 1996b, "Numerical Simulation of Multibody Systems: The Rigid Problem", *Anais da 2nd ECCOMAS Conf. on Numerical Methods in Engineering*, Editores: J.-A. Désideri, P. Le Tallec, E. Oñate, J. Périaux, E. Stein. John Wiley & Sons, West Sussex (Reino Unido), pp.605–610.
- [23] Sampaio, R., 1995, "Dynamics of Systems of Rigid Multibodies with Shocks", *Anais do DINAME/95*, Caxambú, pp.247. ABCM.
- [24] Sampaio, R. e Trindade, M.A., 1998, "On the Simulation of the Dynamics of Rigid Bodies", *Anais do IV World Congress on Comp. Mech.*, julho, Buenos Aires, Argentina, publicação em CD-ROM.
- [25] Shuster, M.D., 1993a, "A Survey of Attitude Representations", *J. Astronautical Sci.*, Vol.41, No.4, pp.439–517.
- [26] Shuster, M.D., 1993b, "The Kinematic Equation for the Rotation Vector", *IEEE Trans. on Aerospace & Electronic Syst.*, Vol.29, No.1, pp.263–267.
- [27] Simo, J.C. e Wong, K. 1991, "Unconditionally Stable Algorithms for Rigid Body Dynamics that Exactly Preserve Energy and Momentum", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol.31, pp.19–52.
- [28] Spurrier, R.A., 1978, "Comment on Singularity-Free Extraction of a Quaternion from a Direction-Cosine Matrix", *J. Spacecraft*, Vol.15, pp.255.
- [29] Stuelpnagel, J.C., 1964, "On the Parametrization of the Three-Dimensional Rotation Group", *SIAM Review*, Vol.6, pp.422–430.
- [30] Trindade, M.A., 1996, "Uma Introdução à Dinâmica de Sistemas de Multicorpos", *Dissertação de Mestrado*, Depto. de Engenharia Mecânica, PUC-Rio, Rio de Janeiro.
- [31] Trindade, M.A. e Sampaio, R., 1995, "Modelagem e Simulação da Dinâmica Tridimensional de Multicorpos Rígidos", *Anais do XVI CILAMCE/95 - Congresso Ibero Latino Americano sobre Métodos Computacionais para Engenharia*, Curitiba, Vol.2, pp.1149–1158.
- [32] Wehage, R.A., 1984, "Quaternion and Euler parameters: A Brief Exposition", *Computer Aided Analysis and Optimization of Mechanical Systems Dynamics*, Springer-Verlag.
- [33] Wertz, J., 1978, "Spacecraft Attitude Determination and Control", D. Reidel, Dordrecht, Netherlands.
- [34] Whittaker, E.T., 1965, "A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies", Cambridge University Press, 4th edition.