

ANÁLISE CUSTO-BENEFÍCIO DE MODELOS DE AMORTECIMENTO PARA ESTRUTURAS COM ELEMENTOS VISCOELÁSTICOS

Marcelo Areias Trindade

Simone Castanho Nóbrega de Almeida

trindade@sc.usp.br

Laboratório de Dinâmica, Departamento de Engenharia Mecânica

Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo

Av. Trabalhador São-Carlense, 400, 13566-590, São Carlos-SP

Resumo. *Este trabalho apresenta uma análise comparativa de custo-benefício de três métodos de representação do amortecimento viscoelástico, a saber: Modal Strain Energy, Anelastic Displacement Fields e Golla-Hughes-McTavish. A avaliação de custo computacional e eficácia/precisão na representação é realizada com base na simulação de uma viga engastada-livre com tratamento viscoelástico restrito. Para tal, são considerados três critérios de custo computacional, a saber: complexidade de implementação, número de operações necessárias, e tempo de cálculo, e três critérios de eficácia/precisão, para avaliação do “benefício”, a saber: erro médio dos fatores de amortecimento dos cinco primeiros modos de vibração e dos cinco modos seguintes, e erro médio na amplitude da resposta em frequência. A comparação dos resultados obtidos com os três modelos confirma que o modelo MSE é menos preciso, mas também tem o menor custo computacional. Adicionalmente, para o caso estudado neste trabalho, no qual o modelo GHM fornece um melhor ajuste das curvas de módulo complexo do material, os modelos ADF e GHM são equivalentes em termos de custo-benefício. Em particular para o caso estudado neste trabalho, os modelos ADF e GHM com 5 séries de parâmetros são considerados aqueles de melhor relação custo-benefício.*

Palavras-chave: *Controle de vibrações, Materiais viscoelásticos, Modelos de amortecimento, Dependência em frequência, Custo computacional.*

1. INTRODUÇÃO

O amortecimento passivo usando materiais viscoelásticos para o controle de vibrações e ruído tem sido utilizado em muitas aplicações nas indústrias automotiva e aeroespacial. De fato, esta técnica já era dominada pela indústria aeronáutica na década de 60. Mas avanços na tecnologia do material e o aparecimento de novas e mais eficientes ferramentas analíticas e experimentais para modelagem do comportamento do material e da estrutura, fizeram surgir muitas novas aplicações, como em cabines de helicópteros, motores de jatos, estruturas de satélites, antenas, etc (Rao, 2003).

O controle passivo de vibrações via tratamentos viscoelásticos é baseado na energia dissipada pelo material devido às deformações nele induzidas. Os tratamentos viscoelásticos são normalmente usados como: i) camada livre, na qual o material viscoelástico reveste parte da estrutura e, assim, a flexão da estrutura gera uma deformação normal no material viscoelástico; e ii) camada restrita, na qual a camada viscoelástica é ainda recoberta por uma camada elástica de restrição e, neste caso, a flexão da estrutura gera também uma deformação de cisalhamento no material viscoelástico, aumentando a energia de deformação do material viscoelástico e, portanto, a energia dissipada (Nashif, Jones e Henderson, 1985).

O primeiro estudo realizado sobre vibrações em vigas com tratamentos viscoelásticos restritos foi apresentado por Kerwin (1959), no qual ele considerava uma viga simplesmente apoiada, tipo sanduíche, que possuía superfícies elásticas muito mais rígidas do que a camada viscoelástica, assim supunha-se que a camada viscoelástica se deformasse apenas em cisalhamento e a rigidez de flexão da estrutura fosse aquela da base elástica. Outro modelo foi posteriormente desenvolvido por Mead e Markus (1969), para estudar vibrações forçadas para diversas condições iniciais, através de uma equação diferencial de movimento de sexta ordem na deflexão transversal. Entretanto, algumas hipóteses usadas neste modelo limitam sua aplicação, como cisalhamento puro na camada viscoelástica, inércia rotacional desprezível, e vibrações harmônicas. Mais recentemente, outros modelos de viga sanduíche foram propostos (ver discussão em Trindade e Benjeddou, 2002; Austin e Inman, 2000). Independentemente das hipóteses consideradas para a modelagem de vigas tipo sanduíche, atenção especial deve ser prestada à modelagem do comportamento dos materiais viscoelásticos.

Os materiais viscoelásticos possuem características tanto de um fluido viscoso quanto de um sólido elástico. Por esta razão, o seu comportamento é bastante dependente da temperatura e da frequência de excitação. A temperatura é o fator que mais afeta as propriedades de um material viscoelástico. Na região de transição em temperatura, onde o fator de perda assume seu valor máximo e o módulo elástico cai rapidamente. Ainda assim, quando a temperatura é controlada ou suas mudanças são lentas comparadas à dinâmica do sistema, este efeito pode ser desprezado. O efeito da frequência também é bastante importante, em especial para análises dinâmicas, pois o módulo elástico do material aumenta com a frequência. Este aumento é mais evidente na região de maior interesse para o controle passivo, dita de transição em frequência, pois é nela que o fator de perda do material assume seu valor máximo. Os efeitos da temperatura e da frequência podem ser combinados através da utilização de uma frequência multiplicada por um fator, que é função da temperatura absoluta (Nashif, Jones e Henderson, 1985; Lima et al., 2005).

Por analogia a materiais elásticos e viscosos, os materiais viscoelásticos podem ser representados no domínio da frequência por módulos de elasticidade complexos. No entanto, a aplicação desta metodologia para o cálculo dos amortecimentos modais, gerados pelo tratamento viscoelástico, ou para a simulação da resposta transitória da estrutura só é interessante para sistemas de dimensão pequena. Johnson, Keinholz e Rogers (1981) propuseram uma metodologia, conhecida por Modal Strain Energy (MSE), para estimativa dos amortecimentos modais sem necessidade de trabalhar com matrizes complexas. O método

MSE também pode ser utilizado em uma versão iterativa, para levar em conta a variação do módulo complexo com a frequência, e assim dar origem a bases modais aproximadas que possibilitam escrever equações do movimento no domínio do tempo (Trindade, Benjeddou e Ohayon, 2000a). Motivados pela necessidade de um modelo capaz de prever respostas no domínio do tempo e da frequência para uma estrutura que contenha componentes viscoelásticos, Lesieutre e Bianchini (1995) e McTavish e Hughes (1993) desenvolveram modelos baseados na inclusão de variáveis internas, denominados Anelastic Displacement Fields (ADF) e Golla-Hughes-McTavish (GHM), respectivamente. A principal desvantagem dos modelos ADF e GHM é que, por introduzir variáveis internas, eles dão origem a sistemas de dimensão muito elevada. Conseqüentemente, é geralmente necessário reduzir os sistemas resultantes usando alguma técnica de redução de modelos (Trindade, 2006).

Comparações anteriores entre os métodos MSE, ADF e GHM mostraram que os métodos ADF e GHM são superiores ao método MSE para análise dinâmica no domínio do tempo de estruturas relativamente bem amortecidas (Trindade, Benjeddou e Ohayon, 2000a). No entanto, ao conhecimento dos autores, o custo computacional envolvido com a inclusão de variáveis internas ainda não foi quantificado. Esta análise de custo computacional é importante para a tomada de decisão quanto à metodologia a ser empregada. Assim sendo, este trabalho tem o objetivo de apresentar uma análise comparativa de custo-benefício dos métodos MSE, ADF e GHM realizada para uma viga engastada-livre com tratamento viscoelástico restrito. Para tal, três critérios de custo computacional foram considerados, a saber: complexidade de implementação, número de operações necessárias, e tempo de cálculo. Igualmente, três critérios de eficácia/precisão foram considerados para avaliação do “benefício”, a saber: erro médio dos fatores de amortecimento dos cinco primeiros modos de vibração e dos cinco modos seguintes, e erro médio na amplitude da resposta em frequência.

2. MODELO DE VIGA SANDUÍCHE COM ELEMENTOS VISCOELÁSTICOS

Neste trabalho, utilizou-se um modelo de elementos finitos para vigas sanduíche com elementos viscoelásticos já desenvolvido (Trindade, Benjeddou e Ohayon, 2000b). Para facilitar a análise dos resultados, esta seção resume alguns aspectos importantes da modelagem usando os métodos MSE, ADF e GHM. O modelo utilizado considera uma viga sanduíche com faces elásticas e alma viscoelástica homogênea, linear e isotrópica, porém com propriedades dependentes da frequência. Supondo que o coeficiente de Poisson seja constante e que os fatores de perda em extensão e cisalhamento sejam iguais, de modo que o módulo de cisalhamento é proporcional ao módulo de Young, a equação do movimento pode ser escrita como (Trindade, Benjeddou e Ohayon, 2000b)

$$M\ddot{q} + D\dot{q} + [K_e + G^*(\omega, \theta)\bar{K}_v]q = F_m \quad (1)$$

Onde M , D , K_e e $G^*(\omega, \theta)\bar{K}_v$ são as matrizes de massa, amortecimento viscoso e rigidez das camadas elásticas e viscoelástica, respectivamente. F_m é a força mecânica e q é o vetor de graus de liberdade (gdl), resultado de uma discretização via elementos finitos. $G^*(\omega, \theta)$ é o módulo complexo de cisalhamento da camada viscoelástica, dependente da frequência e da temperatura. Entretanto, a temperatura é suposta constante, considerando que as mudanças de temperaturas são muito lentas comparadas à dinâmica do sistema.

No método MSE, o fator de perda para cada modo de vibração é calculado em termos da fração da energia de deformação contida no material viscoelástico e do seu fator de perda, de modo que (Johnson, Keinholz e Rogers, 1981)

$$\eta_s^r = \eta \frac{H_v^r}{H_s^r} \quad (2)$$

Onde H_s^r e H_v^r são, respectivamente, as energias de deformação do r -ésimo modo de vibração associadas à estrutura toda e ao material viscoelástico apenas, que podem ser escritas como: $H_v^r = \Phi_r^T K'_v \Phi_r$; $H_s^r = \Phi_r^T K' \Phi_r$. Onde K' e K'_v são as matrizes de rigidez da estrutura toda e do material viscoelástico, respectivamente, e Φ_r é o r -ésimo modo próprio de vibração, solução do problema real de autovalores $[-\omega_r^2 M + K'] \Phi_r = 0$.

Este método fornece bons resultados apenas para baixos níveis de amortecimento. Além disso, a versão original supõe matrizes de rigidez constantes enquanto que os módulos elásticos e os fatores de perda variam fortemente com a frequência. Desta forma, uma versão iterativa deste método é utilizada neste trabalho, levando em conta a dependência em frequência da matriz de rigidez do material viscoelástico (Trindade, Benjeddou e Ohayon, 2000a). Esta técnica consiste em avaliar, para uma dada frequência e de acordo com as curvas fornecidas pelo fabricante, as propriedades do material viscoelástico a serem utilizadas para o cálculo das frequências e modos próprios da estrutura. Desta forma, o problema de autovalores é modificado para $[-\omega_r^2 M + K'(\omega_r)] \Phi_r = 0$. Este processo é então repetido até a convergência das frequências naturais de interesse.

Os modelos GHM e ADF são baseados na introdução de variáveis internas para representar a dependência em frequência do amortecimento viscoelástico. Os dois são muito similares, contudo o ADF fornece uma formulação com equações diferenciais de primeira ordem, enquanto o GHM dá origem a uma formulação de segunda ordem no domínio de Laplace. Mostrou-se que, apesar dos modelos GHM e ADF usarem parâmetros com diferentes significados físicos, seus resultados são muito próximos (Trindade, Benjeddou e Ohayon, 2000a). Normalmente, esses modelos representam muito bem as variações das propriedades do material viscoelástico com a frequência para uma dada temperatura constante. Os parâmetros dos modelos GHM e ADF são normalmente calculados de modo a ajustar satisfatoriamente as curvas, de módulo elástico e fator de perda em função da frequência, fornecidas pelos fabricantes de materiais viscoelásticos. Entretanto, na maioria dos casos, são necessárias várias séries de parâmetros para ajustar bem as curvas fornecidas. Para o modelo ADF são necessários 2 parâmetros por série, enquanto que para o GHM são necessários 3 parâmetros por série.

No modelo GHM, o módulo de cisalhamento do material viscoelástico é representado por séries de funções no domínio de Laplace (McTavish e Hughes, 1993)

$$s\tilde{G}(s) = G_0 \left(1 + \sum_i \hat{\alpha}_i \frac{s^2 + 2\hat{\zeta}_i \hat{\omega}_i s}{s^2 + 2\hat{\zeta}_i \hat{\omega}_i s + \hat{\omega}_i^2} \right) \quad (3)$$

onde G_0 é o módulo de cisalhamento relaxado. $\hat{\alpha}_i$, $\hat{\omega}_i$ e $\hat{\zeta}_i$ são os parâmetros do material determinados pelo ajuste das curvas $G^*(\omega)$ do material viscoelástico considerado. Substituindo esta equação nas equações do movimento, escritas no domínio de Laplace e para condições iniciais nulas, tem-se

$$\left[s^2 M + sD + K_e + K_v^0 \left(1 + \sum_i \hat{\alpha}_i \frac{s^2 + 2\hat{\zeta}_i \hat{\omega}_i s}{s^2 + 2\hat{\zeta}_i \hat{\omega}_i s + \hat{\omega}_i^2} \right) \right] \tilde{q} = \tilde{F}_m \quad (4)$$

A notação \sim determina variáveis transformadas para o domínio de Laplace. $K_v^0 = G_0 \bar{K}_v$ é a matriz de rigidez estática, isto é para frequência nula, da camada viscoelástica. O modelo GHM introduz ainda uma série de n variáveis dissipativas q_i^d ($i= 1, \dots, n$) definidas no domínio de Laplace por (McTavish e Hughes, 1993)

$$\tilde{q}_i^d = \frac{\hat{\omega}_i^2}{s^2 + 2\hat{\zeta}_i \hat{\omega}_i s + \hat{\omega}_i^2} \tilde{q}(s) \quad (5)$$

Assim, multiplicando a Eq. (5) por $\hat{\alpha}_i K_v^0$ pode se obter o seguinte sistema:

$$(s^2 M + sD + K_e + K_v^\infty) \tilde{q}(s) - K_v^0 \sum_i \hat{\alpha}_i \tilde{q}_i^d(s) = \tilde{F}(s) \quad (6)$$

$$\hat{\alpha}_i K_v^0 \left(s^2 \frac{1}{\hat{\omega}_i^2} + s \frac{2\hat{\zeta}_i}{\hat{\omega}_i} + 1 \right) \tilde{q}_i^d(s) - \hat{\alpha}_i K_v^0 \tilde{q}(s) = 0 \quad (7)$$

onde $K_v^\infty = (1 + \sum_i \hat{\alpha}_i) K_v^0$. Transformando as Eqs. (6) e (7) para o domínio do tempo chegamos ao seguinte sistema matricial

$$\bar{M} \ddot{\bar{q}} + \bar{D} \dot{\bar{q}} + \bar{K} \bar{q} = \bar{F} \quad (8)$$

Da Eq. (7), observa-se as variáveis $\tilde{q}_i^d(s)$, correspondentes a i -ésima série de parâmetros, tem a mesma dimensão do vetor de gdl elásticos q . Isso significa que, no mínimo, dobra-se o número de gdl e, conseqüentemente, a dimensão das matrizes associadas. Assim, é previsto que o custo computacional para análise das equações seja função do número de séries de parâmetros necessários para modelar adequadamente o material viscoelástico. Pode-se, entretanto, utilizar o fato que normalmente a cobertura viscoelástica é apenas parcial e, por isso, a matriz K_v possui muitas linhas (colunas) nulas. Isto permite que se eliminem algumas variáveis internas (Trindade, Benjeddou e Ohayon, 2000a) através de uma decomposição modal $\Lambda = T^T \bar{K}_v T$, onde $\hat{q}_i^d = T^T q_i^d$ e Λ é a matriz de autovalores não nulos de \bar{K}_v .

Já o modelo ADF é baseado na separação das deformações do material viscoelástico em partes elástica, instantaneamente proporcional à tensão, e inelástica, representada pela relaxação do material. Neste caso, o módulo de cisalhamento complexo $G^*(\omega)$ é escrito como uma série de funções no domínio da frequência (Lesieutre e Bianchini, 1995)

$$G^*(\omega) = G_0 \left(1 + \sum_{i=1}^n \Delta_i \frac{\omega^2 + j\omega\Omega_i}{\omega^2 + \Omega_i^2} \right) \quad (9)$$

onde Δ_i e Ω_i são parâmetros do modelo a serem calculados a partir das curvas $G^*(\omega)$ do material e $j = \sqrt{-1}$. A implementação em um modelo de elementos finitos consiste

basicamente em substituir o vetor de gdl q na Eq. (1) por $q^e = q - \sum_i q_i^d$. q^e e q_i^d são os vetores de gdl associados com as deformações elásticas e inelásticas, respectivamente. Assim, a Eq. (1) pode ser reescrita da seguinte maneira (Trindade, Benjeddou e Ohayon, 2000a)

$$M\ddot{q} + D\dot{q} + (K_e + K_v^\infty)q - K_v^\infty \sum_i q_i^d = F \quad (10)$$

onde $K_v^\infty = (1 + \sum_i \Delta_i)K_v^0$ é a matriz de rigidez não-relaxada (ou para altas frequências) da camada viscoelástica. O modelo ADF propõe também um sistema que descreve a evolução dos gdl associados com as forças internas inelásticas (Lesieutre e Bianchini, 1995)

$$\frac{C_i}{\Omega_i} K_v^\infty \dot{q}_i^d - K_v^\infty q + C_i K_v^\infty q_i^d = 0 \quad (11)$$

onde $C_i = (1 + \sum_i \Delta_i) / \Delta_i$. As Eqs. (10) e (11) podem ser agrupadas, dando origem a uma equação similar à Eq. (8). Como para o modelo GHM, o modelo ADF dá origem a um vetor de gdl adicionais, com mesma dimensão dos gdl originais, para cada série de parâmetros ADF considerada. No entanto, pode-se também eliminar algumas variáveis internas através de uma decomposição modal da matriz K_v^∞ , tal que apenas os autovalores não-nulos de K_v^∞ são mantidos. As matrizes \bar{M} , \bar{D} e \bar{K} para os modelos ADF e GHM podem ser encontradas em (Trindade, Benjeddou e Ohayon, 2000a).

Visto que, em geral, várias séries de parâmetros ADF ou GHM precisam ser consideradas para ajustar bem as curvas $G^*(\omega)$ dos materiais viscoelásticos, ambos os modelos dão origem a sistemas com muitos gdl e, conseqüentemente, com matrizes \bar{M} , \bar{D} e \bar{K} de dimensão muito elevada. Assim sendo, em geral, se faz necessário reduzir o sistema resultante. Uma redução modal pode ser aplicada aos sistemas equivalentes de primeira ordem, ou na forma de espaços de estados (Trindade, Benjeddou e Ohayon, 2000a). Para isso, a Eq. (8), e sua similar para o modelo ADF, é reescrita na seguinte forma

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu + p \\ y &= Cx \end{aligned} \quad (12)$$

onde, para o modelo ADF, o vetor de estados x contém os gdl elásticos q , e suas primeiras derivadas temporais, e os gdl dissipativos ou inelásticos adicionais. Para o modelo GHM, as primeiras derivadas temporais dos gdl dissipativos também devem ser incluídas no vetor de estados x . Maiores detalhes sobre a construção do sistema no espaço de estados, assim como a forma das matrizes A , B , C para os modelos ADF e GHM, podem ser encontrados em (Trindade, 2000). Comparando a dimensão dos sistemas no espaço de estados gerados pelos modelos ADF e GHM, observa-se que o modelo GHM dá origem a $2n^e + 2nn_i^d$ gdl, onde n^e e n_i^d são os números de gdl elásticos e dissipativos para a i -ésima série, respectivamente, e n é o número de séries de parâmetros utilizadas. Esta dimensão também está associada às matrizes e vetores do sistema de estados correspondente a este modelo. Já para o modelo ADF, o número de gdl resultante é de $2n^e + nn_i^d$, ou seja, se economiza nn_i^d gdl em relação ao GHM, ou $nn_i^d(4n^e + 3nn_i^d)$ elementos a menos na matriz A .

A redução modal dos sistemas no espaço de estados é obtida através da eliminação dos modos de vibração que contribuem pouco à resposta dinâmica da estrutura na banda de frequência de interesse. Para isso, visto que A não é uma matriz simétrica, é necessário calcular os autovalores e autovetores complexos à esquerda e à direita (T_e e T_d) para diagonalizar o sistema:

$$AT_d = \Lambda T_d \text{ e } A^T T_e = \Lambda T_e \quad (13)$$

onde os modos próprios são normalizados por $T_e^T T_d = I$. Em seguida, supõe-se que a matriz Λ , dos autovalores de A , é composta dos autovalores Λ_e e Λ_d , associados aos gdl elásticos e dissipativos, respectivamente. Da mesma forma, os autovetores T_e e T_d são compostos pelos modos próprios associados aos autovalores Λ_e e Λ_d , tal que:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \Lambda_e & 0 \\ 0 & \Lambda_d \end{bmatrix}; \quad T_d = [T_{de} \quad T_{dd}]; \quad T_e = [T_{ee} \quad T_{ed}] \quad (14)$$

Em geral, os modos próprios associados aos gdl dissipativos são sobre-amortecidos, assim supõe-se que sua contribuição à resposta dinâmica do sistema seja desprezível, e, então, o vetor de estado é aproximado pela contribuição dos modos elásticos, tal que $x \approx T_{de} x_e$. Assim, pode-se reescrever o sistema na forma de espaço de estados da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \dot{x}_e &= \Lambda_e x_e + T_{ee}^T B u + T_{ee}^T p \\ y &= C T_{de} x_e \end{aligned} \quad (15)$$

Por outro lado, pode-se ainda reduzir o sistema acima, considerando-se que, geralmente, só uma faixa de frequências é de interesse. Assim, supõe-se que a matriz Λ_e seja composta de autovalores internos (retidos, r) e externos (desprezados, d). Pode-se então decompor a matriz Λ_e , e reescrever os autovetores T_e e T_d :

$$\Lambda_e = \begin{bmatrix} \Lambda_r & 0 \\ 0 & \Lambda_d \end{bmatrix}; \quad T_{de} = [T_{dr} \quad T_{dd}]; \quad T_{ee} = [T_{er} \quad T_{ed}] \quad (16)$$

Assim, desprezando os autovalores fora da banda de frequência de interesse, tem-se:

$$\begin{aligned} \dot{x}_r &= \Lambda_r x_r + T_{er}^T B u + T_{er}^T p \\ y &= C T_{dr} x_r \end{aligned} \quad (17)$$

O inconveniente da expressão acima está na dificuldade de utilizar matrizes complexas para a análise do sistema. Assim, é interessante reescrever o sistema sob uma forma real, em que as variáveis de estado são ainda associadas a deslocamentos e velocidades modais. Isto pode ser feito através de uma transformação linear do estado x_r , tal que $\hat{x} = T_C x_r$, conforme mostrado em (Trindade, 2000). Assim, a Eq. (17) é reescrita sob uma forma real equivalente.

Desta forma são obtidos sistemas de menor dimensão e, portanto, com menor custo computacional para análise posterior. No entanto, nesta etapa de redução, a dimensão do sistema no espaço de estados (isto é, a dimensão da matriz A) é de grande importância, pois

ela determina o custo computacional da solução do problema de autovalores para a redução modal do sistema. Alternativamente, pode-se tentar reduzir o sistema de segunda ordem antes de montar o sistema de primeira ordem como proposto recentemente por Trindade (2006). No entanto, uma avaliação do custo computacional envolvido ainda se faz muito importante.

3. CRITÉRIOS PARA ANÁLISE DE CUSTO-BENEFÍCIO DOS MODELOS

Esta seção apresenta os critérios utilizados para avaliação e comparação dos resultados obtidos usando os modelos MSE, ADF e GHM. Em particular, são definidos três critérios de custo computacional: complexidade de implementação, número de operações necessárias, e tempo de cálculo; e três critérios de eficácia/precisão: erro médio dos fatores de amortecimento dos cinco primeiros modos de vibração e dos cinco modos seguintes, e erro médio na amplitude da resposta em frequência.

3.1 Critérios de custo computacional

Três critérios para avaliação do custo computacional foram definidos, a saber: complexidade de implementação, número de operações necessárias e tempo de cálculo.

A complexidade de implementação pode ser considerada como um critério de caráter qualitativo. No entanto, pode-se registrar algumas dificuldades envolvidas na implementação de cada modelo para avaliar sua aplicabilidade em situações práticas. Em particular, para o modelo MSE não foi necessário um ajuste das curvas experimentais do módulo complexo, já que as curvas são utilizadas diretamente no cálculo do módulo para cada frequência natural de interesse. Ainda assim, uma interpolação dos dados experimentais se faz necessária para a atualização do módulo elástico e do fator de perda na solução do problema de autovalores. Por outro lado, os modelos ADF e GHM requerem um ajuste prévio das curvas experimentais do módulo complexo para o cálculo dos parâmetros respectivos, que posteriormente serão utilizados para montagem das equações do movimento. Este ajuste, por si só, pode originar um custo computacional elevado, pois até mesmo a adequação do número de séries a ser considerado só é quantificada após o cálculo de erro no ajuste. Portanto, o procedimento adotado neste trabalho foi de aumentar o número de séries progressivamente até se obter um erro adequado no ajuste. Vale ressaltar, no entanto, que este procedimento só é necessário em uma etapa anterior às simulações, pois uma vez definidos os parâmetros, para um dado material viscoelástico, estes podem ser utilizados em diversas simulações posteriores. Outra dificuldade envolvida na implementação dos modelos ADF e GHM vem da necessidade da montagem das matrizes do sistema no espaço de estados e sua posterior redução modal.

O tempo de cálculo foi calculado utilizando a função *profile report* do MATLAB que fornece o tempo total de cálculo t_C entre o instante de tempo anterior T_i e posterior T_f aos cálculos de fatores de amortecimento e resposta em frequência, tal que

$$t_C = T_f - T_i \quad (18)$$

A função *profile report* também calcula o tempo gasto por cada função (ou subrotina) utilizada no cálculo. Assim, foi possível observar que, para os modelos ADF e GHM, a função que consome mais tempo é a função *eig* que calcula os autovalores das matrizes. Esta informação foi bastante útil para a estimativa do número de operações realizadas. As novas versões do MATLAB não mais fornecem o número de operações realizadas. Portanto, decidiu-se por estimar o número total de operações através das operações realizadas para a solução dos problemas de autovalores (função *eig*). Supõe-se então que o número aproximado

de operações necessárias para se resolver o problema de autovalores $eig(X)$ seja igual ao cubo da dimensão da matriz X (Golub e van Loan, 1989).

Para os modelos ADF e GHM, são necessários 3 cálculos de autovalores. O primeiro deles é realizado na montagem da matriz A , para a qual se faz necessário eliminar os modos de corpo rígido da matriz de rigidez viscoelástica K_v . Portanto, um cálculo $eig(K_v)$ é realizado para identificar os autovalores nulos de K_v e eliminar os autovetores correspondentes. Os outros dois cálculos de autovalores são necessários para a redução modal da matriz A . Visto que A é uma matriz não simétrica, se faz necessário calcular os autovetores à esquerda e à direita para diagonalizar o sistema, o que equivale a calcular os autovalores e autovetores da matriz A e também de sua transposta A^T . Portanto, os cálculos $eig(A)$ e $eig(A^T)$ são realizados. O número aproximado de operações para os modelos ADF e GHM pode então ser calculado a partir das dimensões das matrizes A e K_v .

$$n_{op}(ADF, GHM) = 2 \dim(A)^3 + \dim(K_v)^3 \quad (19)$$

No caso do modelo MSE, são necessárias N_i iterações para calcular a i -ésima frequência natural e seu respectivo modo de vibração ($i = 1, \dots, M$). Assim, a cada iteração, os autovalores da matriz de rigidez viscoelástica K_v são calculados. Portanto, o número de operações pode ser estimado através da multiplicação do cubo da dimensão da matriz K_v pela soma das N_i iterações para todos os M modos de vibração considerados.

$$n_{op}(MSE) = \sum_{i=1}^M N_i \dim(K_v)^3 \quad (20)$$

O cálculo do número total de problemas de autovalores resolvidos foi simplificado pelo uso do número de chamadas à função eig relatado pela função *profile report* do MATLAB.

3.2 Critérios de eficácia e precisão

Três critérios de eficácia e precisão foram utilizados, a saber: o erro médio dos fatores de amortecimento dos cinco primeiros modos de vibração e dos cinco modos seguintes, e o erro na amplitude da resposta em frequência. Para fins de cálculo de erro, um modelo GHM com 9 séries de parâmetros foi utilizado como referência.

O erro médio dos fatores de amortecimento foi calculado através da média dos erros percentuais dos fatores de amortecimento obtidos com os modelos MSE, ADF (com 3, 5 e 7 séries de parâmetros) e GHM (com 3, 5 e 7 séries de parâmetros), em relação àqueles obtidos com o modelo referência. Para simplificar a análise, após o cálculo dos erros relativos para os dez primeiros modos de vibração, foi feita uma média dos erros dos fatores de amortecimento dos cinco primeiros e dos cinco seguintes, tal que

$$e_{1-5}^A = \frac{1}{5} 100 \sum_{i=1}^5 \frac{(\zeta_i^C - \zeta_i^R)}{\zeta_i^R} \quad (21)$$

$$e_{6-10}^A = \frac{1}{5} 100 \sum_{i=6}^{10} \frac{(\zeta_i^C - \zeta_i^R)}{\zeta_i^R} \quad (22)$$

onde ζ_i^R e ζ_i^C são os fatores de amortecimento para i -ésimo modo de vibração calculados com o modelo referência e com o modelo em avaliação, respectivamente.

Para o cálculo do erro na amplitude da resposta em frequência, foram calculados os vetores amplitude de resposta em frequência para o modelo referência e para os modelos em avaliação (MSE, ADF e GHM) utilizando a função *bode* do MATLAB. Em seguida, o erro percentual do vetor amplitude, em relação à referência, foi calculado. Para simplificar a análise, a norma do vetor de erros foi calculada e utilizada para comparações, tal que

$$e^H = \left\| \frac{100(|H_C| - |H_R|)}{|H_R|} \right\| \quad (23)$$

onde $|H_R|$ e $|H_C|$ são as amplitudes das respostas em frequência calculadas com o modelo de referência e com o modelo em avaliação.

4. RESULTADOS NUMÉRICOS

4.1 Propriedades geométricas e materiais

A configuração de viga utilizada para comparação e avaliação dos modelos viscoelásticos consiste em uma viga de aço engastada-livre, de 350 mm de comprimento e 3,2 mm de espessura, recoberta com duas camadas iguais de material viscoelástico 3M ISD112 à 27°C, com 0,25 mm de espessura e 125 mm de comprimento, sendo a primeira camada posicionada à 90 mm de distância da extremidade esquerda da viga, e a segunda posicionada à 225 mm de distância da extremidade esquerda da viga. As duas camadas de material viscoelásticos são ainda recobertas por uma camada de restrição de aço de 1,6 mm de espessura.

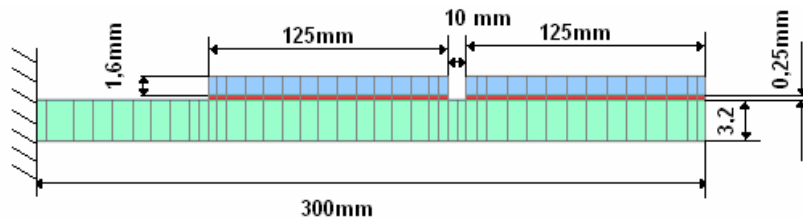


Figura 1- Desenho esquemático da viga utilizada para comparação e avaliação.

A discretização utilizada para o modelo de elementos finitos pode também ser observada na Fig. 1. Uma força de perturbação na direção vertical foi aplicada na extremidade livre da viga, à direita, e o deslocamento na direção vertical no mesmo ponto foi calculado.

As propriedades materiais utilizadas foram para o aço: módulo de Young 210 GPa e densidade 7800 kg/m³; e para o ISD112 à 27°C: densidade 1000 kg/m³, coeficiente de Poisson 0,5 e módulo de cisalhamento conforme Tabela 1.

4.2 Ajuste do módulo complexo usando ADF e GHM

Para a implementação dos modelos ADF e GHM, primeiramente calculou-se os parâmetros necessários: G_0 , Δ_i e Ω_i para ADF e G_0 , α_i , ω_i e ζ_i para GHM, através de um ajuste das curvas $G^*(\omega)$ usando um algoritmo de otimização não-linear, baseado em mínimos quadrados, existente no MATLAB (*lsqnonlin*). Para dados valores iniciais dos parâmetros ADF ou GHM, o algoritmo retorna os parâmetros que minimizam o erro relativo do módulo elástico e do fator de perda, calculado em relação às curvas $G^*(\omega)$ fornecidas (Tabela 1).

Tabela 1. Propriedades do material viscoelástico ISD112 à 27°C

Frequência (Hz)	Fator de perda	Módulo elástico de cisalhamento (MPa)
20	0,365	0,541
40	0,520	0,604
60	0,634	0,658
100	0,779	0,759
200	0,978	0,956
400	1,178	1,277
600	1,256	1,565
1000	1,346	2,034
2000	1,438	3,026
3000	1,437	3,921
4000	1,434	4,694
5000	1,440	5,379

Os valores ótimos para os parâmetros ADF (G_0 , Δ_i e Ω_i) são apresentados na Tabela 2 para 3, 5 e 7 séries de parâmetros. Os erros percentuais máximos (módulo elástico ou fator de perda) encontrados para os ajustes de curva usando ADF foram 10,17% (3 séries), 4,08% (5 séries) e 3,36% (7 séries). A Figura 2 apresenta as comparações entre as curvas experimentais (dados da Tabela 1) e o ajuste das curvas com 3, 5 e 7 séries de parâmetros ADF. Pode-se observar que o ajuste já é suficientemente adequado para 5 séries de parâmetros ADF e a inclusão de mais duas séries melhora apenas marginalmente o ajuste.

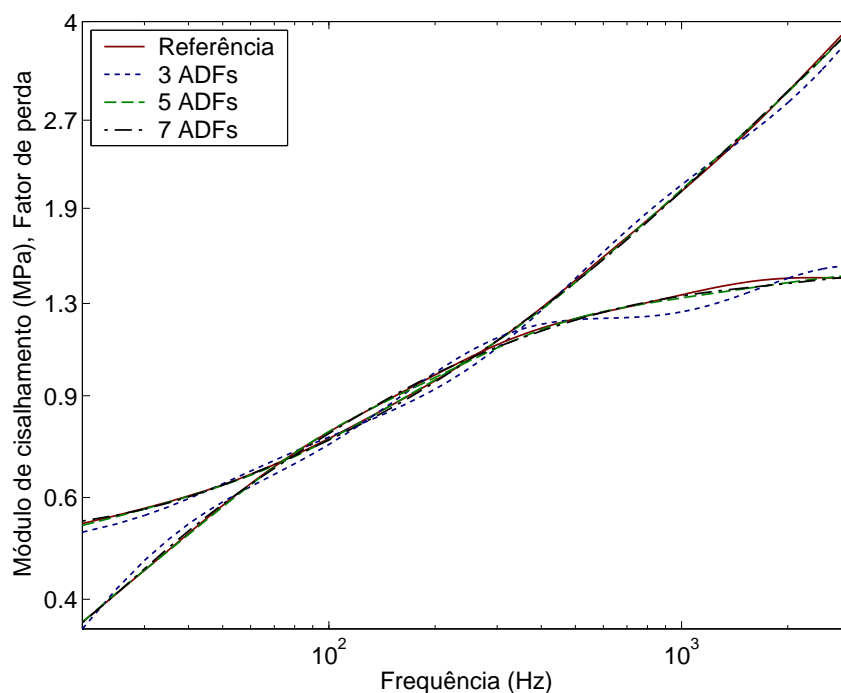


Figura 2- Ajuste das curvas $G^*(\omega)$ usando 3, 5 e 7 séries de parâmetros ADF.

No caso do modelo GHM, o ajuste das curvas experimentais é realizado para se encontrar os parâmetros ótimos G_0 , α_i , ω_i e ζ_i . Eles são também apresentados na Tabela 2 para 3, 5, 7 e 9 séries de parâmetros GHM. Os erros percentuais máximos (módulo elástico ou fator de perda) encontrados para os ajustes de curva usando GHM foram 5,73% (3 séries), 0,11% (5

séries), 0,10% (7 séries) e 0,04% (9 séries). A Figura 3 apresenta as comparações entre as curvas experimentais e o ajuste das curvas com 3, 5 e 7 séries de parâmetros GHM. Pode-se observar que, o ajuste já é suficientemente adequado para 5 séries de parâmetros GHM e a inclusão de mais duas ou quatro séries melhora apenas marginalmente o ajuste.

Tabela 2. Parâmetros ótimos dos modelos ADF e GHM para ISD112 a 27°C

		ADF			GHM			
<i>n</i>	<i>i</i>	G_0 (MPa)	Δ_i	Ω_i (rad/s)	G_0 (MPa)	α_i	ω_i (rad/s)	ζ_i
1			0,6462	356,6374		0,7616	5 998,8299	7,0042
3	2	0,4864	3,2340	4 017,7091	0,4941	3,7225	50 031,6541	4,8982
	3		43,4818	69 634,9682		44,0476	299 978,1832	1,9642
5	1	0,4686	0,2657	133,9697	0,4624	0,2398	4 502,8545	21,5135
	2		0,8200	819,6013		0,7096	9 753,8648	7,3524
	3		2,0957	4 247,2390		2,2009	49 291,5939	6,8440
	4		3,2586	12 713,2913		7,3340	99 901,7326	2,6491
	5		53,7737	98 063,9532		64,6846	297 576,1162	0,9778
7	1	0,1237	3,2484	11,1036	0,3429	0,4104	1 580,7074	104,3863
	2		1,6794	380,6714		0,2890	8 613,8570	32,3031
	3		3,3131	1 537,5342		0,9542	19 595,4154	14,1108
	4		4,9264	4 381,5919		2,9565	49 160,4165	6,7636
	5		10,2684	11 475,6909		9,5038	100 140,0062	2,6894
	6		3,8170	11 210,5713		11,5893	150 132,2798	1,1161
	7		207,3000	100 545,5682		82,7464	293 385,6714	0,7363
9	1				0,4566	0,1688	4 502,8116	29,2288
	2			0,1160		5 999,9939	16,4437	
	3			0,8753		9 753,8677	6,6096	
	4			-0,2123		19 999,9991	9,4016	
	5			2,2289		49 291,5939	6,9417	
	6			6,9772		80 000,0001	2,2109	
	7			13,7822		99 901,7316	0,4831	
	8			21,2700		149 999,9998	1,0466	
	9			63,8226		297 576,1166	0,0285	

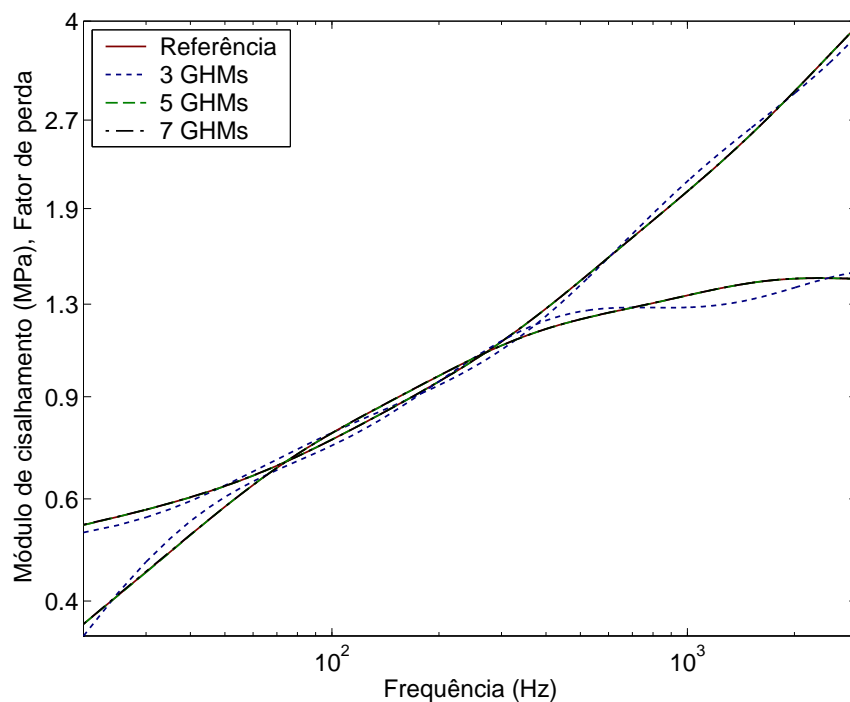


Figura 3- Ajuste das curvas $G^*(\omega)$ usando 3, 5 e 7 séries de parâmetros GHM.

4.3 Avaliação dos modelos

Com base no erro de ajuste das curvas de módulo complexo do material viscoelástico considerado, o modelo GHM com 9 séries foi considerado o caso mais preciso e, portanto, foi estabelecido como modelo de referência. Assim, os fatores de amortecimento e a função de resposta em frequência foram calculados usando o modelo GHM com 9 séries, e estes resultados foram definidos como resultados de referência (Tabela 3). Para as simulações, apenas os dez primeiros modos de vibração em flexão foram retidos. Para referência, o tempo de cálculo e o número de operações necessárias usando o modelo referência também foram calculados. Usando um PC Pentium IV 3,2GHz com 1GB de memória RAM, o cálculo dos amortecimentos modais e da resposta em frequência levou 360,05 segundos e foram realizadas 13504,14 milhões de operações (estimadas pelo número de operações necessárias para a solução dos problemas de autovalores de acordo com a Eq. (19)).

Tabela 3. Frequências e fatores de amortecimento para a viga engastada-livre

Modo	Frequência (Hz)	Fator de amortecimento (%)
1	23,20	4,9756
2	127,99	4,3961
3	355,25	4,3294
4	695,02	3,1177
5	1154,16	2,8405
6	1693,79	2,2180
7	2354,70	1,9066
8	3158,79	1,8992
9	4027,28	1,5569
10	5032,35	1,4141

Em seguida, os cálculos de fatores de amortecimento e funções de resposta em frequência foram repetidos usando os outros modelos, MSE, ADF (3, 5 e 7 séries) e GHM (3, 5 e 7 séries). Para cada uma destas simulações, foram calculados os diversos critérios, de custo computacional e de precisão e eficácia, definidos anteriormente. A Tabela 4 mostra os valores obtidos para os critérios de custo, tempo de cálculo e número de operações, e de precisão, erro na resposta em frequência e nos fatores de amortecimento, usando os modelos MSE, ADF (3, 5 e 7 séries) e GHM (3, 5 e 7 séries) aplicados à viga engastada-livre apresentada na Fig. 1.

Tabela 4. Resultados comparativos obtidos usando os diferentes modelos

	MSE	ADF	GHM	ADF	ADFr	GHM	ADF	GHM
	3 séries			5 séries			7 séries	
t_C (s)	2,88	10,09	30,37	23,78	9,27	91,50	44,80	218,81
n_{op} (milhões)	46,01	291,41	995,59	708,79	262,65	3139,97	1407,19	7507,56
t_C / n_{op}	0,06	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03
e^H (%)	1053,7	302,612	365,163	17,799	17,173	9,560	58,988	9,456
e_{1-5}^A (%)	1,465	2,468	1,994	0,598	0,609	0,025	0,649	0,066
e_{6-10}^A (%)	1,050	3,746	3,170	1,784	1,777	0,031	1,680	0,067

Pode-se observar que o comportamento dos fatores de custo computacional analisados, tempo de cálculo e número de operações, são bastante similares, isto é, o aumento na complexidade e dimensão do modelo aumenta tanto o tempo de cálculo como o número de operações. Na verdade, através do cálculo da razão tempo sobre número de operações, observou-se que eles são de fato equivalentes. Desta forma, resolveu-se analisar o desempenho dos modelos apenas em função do tempo, já que as conclusões obtidas em função do número de operações seriam praticamente as mesmas.

Para facilitar a avaliação dos modelos, as Figs. 4, 5 e 6 apresentam, respectivamente, os erros da amplitude da resposta em frequência e dos fatores de amortecimento dos cinco primeiros modos de vibração (1 a 5) e dos cinco modos seguintes (6 a 10), em função do tempo de cálculo.

Analisando a Fig. 4, pode-se observar que, como esperado, o MSE é o modelo menos preciso, isto é possui erros maiores, mas também é o modelo de menor custo computacional. Já nas Figs. 5 e 6, observa-se que o modelo MSE é mais preciso para o cálculo dos fatores de amortecimento, sendo inclusive mais preciso que os modelos ADF e GHM com 3 e 5 séries de parâmetros para o amortecimento dos modos 6 a 10. Isto confirma a noção de que o modelo MSE é suficientemente preciso para modos pouco amortecidos (no caso dos modos 6 a 10, ele apresentou fatores de amortecimento menores que 1,5%). Comparando-se os modelos ADF e GHM, nota-se que o modelo GHM apresenta uma melhor precisão que o modelo ADF, mas também possui um maior custo computacional, para um mesmo número de séries de parâmetros consideradas. Também se observou que, na maioria das vezes, quanto maior o número de séries utilizadas maior será a precisão, e também o custo do modelo.

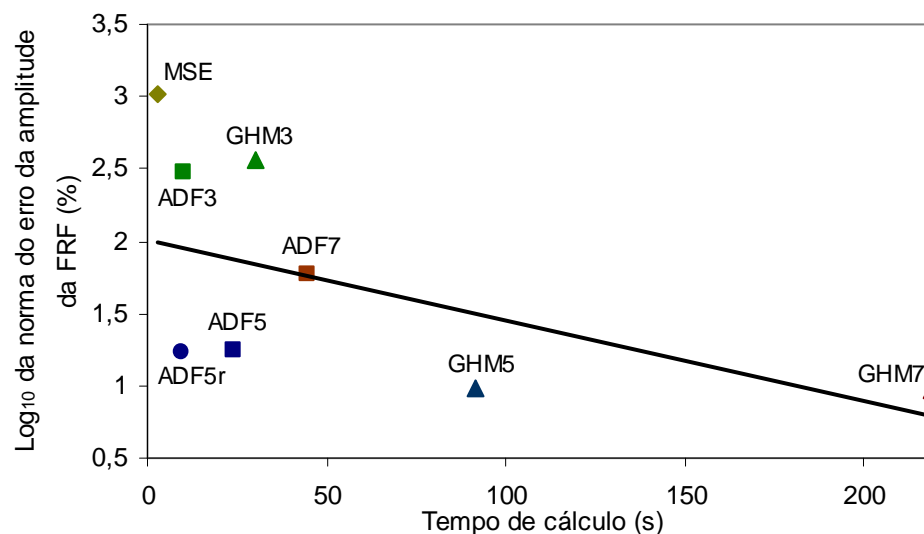


Figura 4- Norma do erro da amplitude da resposta em frequência em função do tempo de cálculo para os diferentes modelos.

Nas Figs. 4, 5 e 6, também foram traçadas linhas de tendências para os pontos encontrados. Esta linha pode ser utilizada para se constatar que o decréscimo no erro de cálculo é quase sempre acompanhado por um aumento no custo computacional. Pode-se também utilizar a linha de tendência para efeito de avaliação da relação custo-benefício de um determinado modelo. Isto foi feito observando-se que os pontos que se encontram acima dessa linha ou possuem um erro muito elevado ou um custo computacional muito alto, assim a relação custo-benefício pode ser considerada melhor para aqueles modelos que se situam abaixo dessas linhas de tendências. Ainda, dentre estes melhores desempenhos pode-se dizer que aqueles que se afastam mais dessa linha em direção à origem do eixo coordenado são

ainda melhores, pois estão representando bem o comportamento do amortecimento viscoelástico com um custo computacional relativamente baixo.

Com base nesta definição de custo-benefício, observa-se na Fig. 6 que o MSE possui uma boa relação custo-benefício do ponto de vista dos fatores de amortecimento para os modos menos amortecidos (modos 6 a 10). Logo, o modelo MSE pode ser a melhor alternativa quando se deseja apenas calcular os fatores de amortecimento de uma estrutura pouco amortecida. Por outro lado, observou-se que os modelos ADF e GHM com 5 séries de parâmetros são mais interessantes que os modelos ADF e GHM com 3 séries de parâmetros, visto que o erro obtido nestes últimos são muito elevados, e também mais interessantes que os modelos ADF e GHM com 7 séries de parâmetros onde a precisão também é boa, mas o custo já passa a ser bastante elevado. De fato, na maioria dos casos (Figs. 4 e 5), os modelos ADF e GHM com 5 séries de parâmetros parecem ter a melhor relação custo-benefício (dentro os modelos analisados e para os casos estudados).

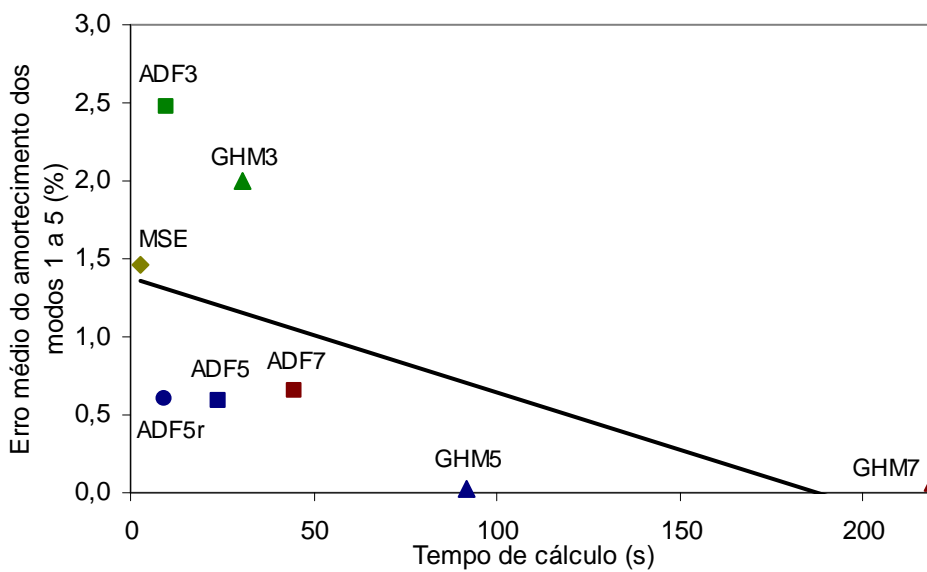


Figura 5 – Erro médio dos fatores de amortecimento dos modos 1 a 5 em função do tempo de cálculo para os diferentes modelos.

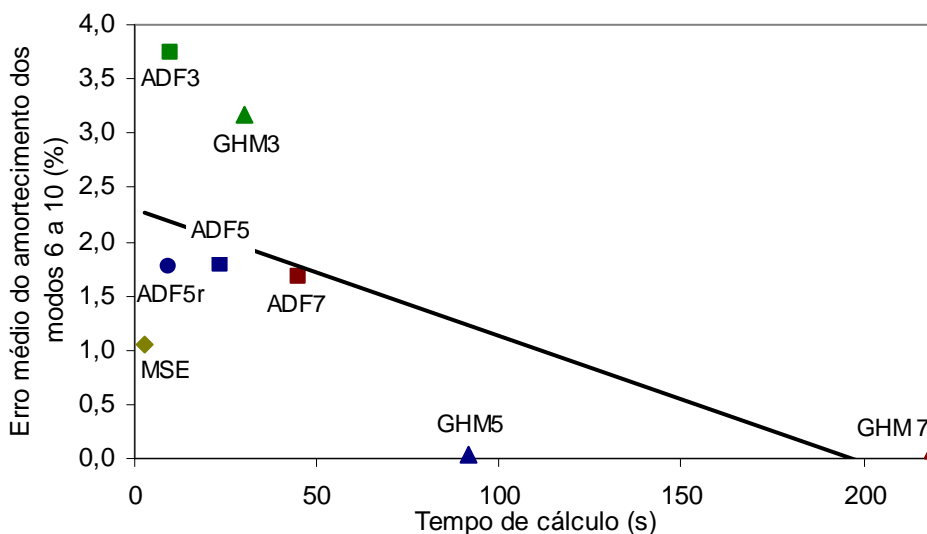


Figura 6 – Erro médio dos fatores de amortecimento dos modos 6 a 10 em função do tempo de cálculo para os diferentes modelos.

Nas Figs. 4, 5 e 6, incluiu-se na análise também uma versão reduzida do ADF com 5 séries de parâmetros (ADF5r). Este modelo foi obtido através de uma redução preliminar do sistema de segunda ordem, com base na projeção dos modos dissipativos nos modos normais não-amortecidos, de acordo com a metodologia proposta por Trindade (2006). Assim, neste caso, 44% dos modos dissipativos, com menor projeção sobre os modos normais, foram eliminados (40 de um total de 91 modos dissipativos). Isto resultou em uma redução de 200 gdl dissipativos (40 para cada uma das 5 séries) e, por conseqüência, na redução da dimensão da matriz A de 707 para 507. Nota-se efetivamente, nas Figs. 4, 5 e 6 e também na Tabela 4, que o modelo ADF5r dá origem a erros muito próximos aos do ADF5 porém com uma redução significativa do custo computacional. De fato, o custo computacional do ADF5r foi ligeiramente menor que aquele do ADF3.

5. CONCLUSÕES

Este trabalho apresentou uma análise comparativa de custo-benefício de três métodos de representação do amortecimento viscoelástico, a saber: Modal Strain Energy, Anelastic Displacement Fields e Golla-Hughes-McTavish. A avaliação de custo computacional e eficácia/precisão na representação foi realizada com base na simulação de uma viga engastada-livre com tratamento viscoelástico restrito. Para tal, três critérios de custo computacional foram considerados, a saber: complexidade de implementação, número de operações necessárias, e tempo de cálculo. Igualmente, três critérios de eficácia/precisão foram considerados para avaliação do “benefício”, a saber: erro médio dos fatores de amortecimento dos cinco primeiros modos de vibração e dos cinco modos seguintes, e erro médio na amplitude da resposta em frequência.

A comparação dos resultados obtidos com os três modelos confirmou que o modelo MSE é menos preciso, mas também tem o menor custo computacional. Adicionalmente, para o caso estudado neste trabalho, no qual o modelo GHM deu origem a um melhor ajuste das curvas de módulo complexo do material, os modelos ADF e GHM foram equivalentes em termos de custo-benefício. Em particular, os modelos ADF e GHM com 5 séries de parâmetros foram considerados aqueles de melhor relação custo-benefício.

Agradecimentos

Os autores agradecem o apoio financeiro fornecido pela Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) através dos contratos 04/15936-2 e 04/10255-7.

REFERÊNCIAS

- Austin, E.M. e Inman, D.J., 2000, Some pitfalls of simplified modeling for viscoelastic sandwich beams, *Journal of Vibration and Acoustics*, 122:434–439.
- Golub, G.H. e van Loan, C.F., 1989, *Matrix Computations*, 2nd ed, Johns Hopkins Univ., Baltimore.
- Johnson, C.D., Keinholtz, D.A., and Rogers, L.C., 1981, Finite element prediction of damping in beams with constrained viscoelastic layers, *Shock & Vibration Bulletin*, 50(1):71–81.
- Kerwin, Jr., E.M., 1959, Damping of flexural waves by a constrained visco-elastic layer, *Journal of the Acoustical Society of America*, 31(7):952–962.
- Lesieutre, G.A. and Bianchini, E., 1995, Time domain modeling of linear viscoelasticity using anelastic displacement fields. *Journal of Vibration and Acoustics*, 117(4):424–430, 1995.
- Lima, A.M.G., Rade, D.A., Steffen Jr., V., and Stoppa, M.H., 2005, Sensitivity analysis of viscoelastic structures, in Rade, D.A. and Steffen Jr., V. (eds.), *Proceedings of the XI DINAME*, Ouro Preto, ABCM.

- McTavish, D.J. and Hughes, P.C., 1993, Modeling of linear viscoelastic space structures. *Journal of Vibration and Acoustics*, 115:103–110.
- Mead, D.J. and Markus, S., 1969, The forced vibration of a three-layer, damped sandwich beam with arbitrary boundary conditions, *Journal of Sound and Vibration*, 10(2):163–175.
- Nashif, A., Jones, D., and Henderson, J., 1985, *Vibration Damping*, JohnWiley & Sons, New York.
- Rao, M.D., 2003, Recent applications of viscoelastic damping for noise control in automobiles and commercial airplanes, *Journal of Sound and Vibration*, 262: 457–474.
- Trindade, M.A., 2000, *Contrôle Hybride Actif-Passif des Vibrations de Structures par des Matériaux Piézoélectriques et Viscoélastiques: Poutres Sandwich/ Multicouches Intelligentes*. Thèse de Doctorat, Conservatoire National des Arts et Métiers, Paris/France.
- Trindade, M.A., 2006, Reduced-order finite element models of viscoelastically damped beams through internal variables projection, *Journal of Vibration and Acoustics*, 128(4):501–508.
- Trindade, M.A., Benjeddou, A., 2002, Hybrid active-passive damping treatments using viscoelastic and piezoelectric materials: review and assessment, *Journal of Vibration and Control*, 8:699–746.
- Trindade, M.A., Benjeddou, A., and Ohayon, R., 2000a, Modeling of frequency-dependent viscoelastic materials for active-passive vibration damping. *Journal of Vibration and Acoustics*, 122(2):169–174.
- Trindade, M.A., Benjeddou, A., and Ohayon, R., 2000b, Finite element analysis of frequency- and temperature-dependent hybrid active-passive vibration damping. *Revue Européenne des Éléments Finis*, 9(1-3):89–111.