

MARCELO AREIAS TRINDADE

UMA INTRODUÇÃO À DINÂMICA DE SISTEMAS
DE MULTICORPOS

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Departamento de Engenharia Mecânica

Rio de Janeiro, 24 de junho de 1996

MARCELO AREIAS TRINDADE

**UMA INTRODUÇÃO À DINÂMICA DE SISTEMAS
DE MULTICORPOS**

Tese apresentada ao Departamento de
Engenharia Mecânica da PUC-Rio
como parte dos requisitos para a
obtenção do título de Mestre em
Ciências em Engenharia Mecânica

Orientador: Rubens Sampaio Filho

Departamento de Engenharia Mecânica
Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro

Rio de Janeiro, 24 de junho de 1996.

AGRADECIMENTOS

- Aos meus pais, Armando e Ana Maria, por tudo !!
- A toda minha família que sempre me apoiou em todas as minhas decisões.
- A Rubens Sampaio Filho por sua amizade, dedicação e inestimável contribuição na minha formação e na elaboração deste trabalho.
- Aos meus amigos pela sua compreensão e apoio.
- A Arthur M.B. Braga por seu interesse e apoio na minha formação.
- Aos professores do Departamento de Engenharia Mecânica da PUC-Rio pela contribuição na minha formação.
- Aos funcionários do Departamento de Engenharia Mecânica da PUC-Rio que sempre foram muito prestativos.
- A CAPES e ao CNPq pelo apoio financeiro.

RESUMO

Este trabalho tem por objetivo apresentar uma introdução à dinâmica de sistemas de multicorpos compostos por partes rígidas e flexíveis, através da exposição das diversas etapas: Modelagem, Simulação e Controle. A modelagem de sistemas de multicorpos é apresentada, atentando para os problemas de representação de rotações, caracterização de deformações dos corpos flexíveis e manipulação simbólica para formulação das equações do movimento. A parametrização de rotações é apresentada utilizando parâmetros clássicos como ângulos de Euler e Bryant, parâmetros de Euler e Rodrigues, assim como, vetor rotação, vetor rotação conforme e quaternions. O problema de singularidade das parametrizações é estudado, através da comparação de diferentes parametrizações. Para a caracterização de deformações dos corpos flexíveis é apresentado o método de modos supostos. A formulação das equações do movimento é apresentada utilizando as equações de Lagrange e Maggi-Kane. O toolbox de manipulação simbólica do MATLAB é utilizado para derivar as equações do movimento. O controle linear de sistemas de multicorpos é apresentado utilizando a representação no espaço de estados. Duas metodologias de projeto de controle são apresentadas: controle via imposição de pólos e controle ótimo. A simulação de sistemas de multicorpos é apresentada por meio de alguns exemplos ilustrativos da dinâmica e do controle de multicorpos, atentando para a escolha do método de integração. Todas as etapas são realizadas no ambiente do MATLAB, utilizando suas funções de manipulação simbólica para a modelagem, suas funções de linearização e controle para o controle e seus algoritmos de integração e funções gráficas para a simulação.

ABSTRACT

This work intends to present an introduction to the Dynamics of Multibody Systems, with rigid and flexible bodies, by presenting the following stages: Modelization, Control and Simulation. The modelization of multibody systems is presented, exploring finite rotation parametrization, description of deformation of the flexible bodies and symbolic derivation of the equations of motion. Finite rotations' parametrization is presented using classical systems of parametrization such as Euler's and Bryant's angles, Euler's and Rodrigues' parameters and conformal rotation vector, rotation vector and quaternions. The problem of singularity of parametrization is studied by the comparison of the various systems of parametrization. The method of assumed modes is presented to describe the deformation of flexible bodies. The formulation of the equations of motion is done using Lagrange's and Maggi-Kane's equations. The equations of motion are derived using the MATLAB's Symbolic Math Toolbox. The state-space linear control of multibody systems is presented. Two different methods are presented to design the control system: eigenvalues imposition and optimal control. The simulation of some numerical examples of multibody systems is presented. An analysis of the integration methods is done. All the computations are done in MATLAB, using the Symbolic Math Toolbox functions to the modelization, the Control Toolbox to the control and the OdeSuite to the integration of the equations of motion.

SUMÁRIO

| | |
|---|-----------|
| LISTA DE ILUSTRAÇÕES | IV |
| LISTA DE TABELAS | V |
| LISTA DE SÍMBOLOS | VI |
| 1. INTRODUÇÃO | 1 |
| 2. CINEMÁTICA DE CORPOS RÍGIDOS | 4 |
| 2. 1. Introdução | 4 |
| 2. 2. Rotações finitas | 5 |
| 2. 3. Movimento geral de um corpo rígido | 10 |
| 2. 4. Campo de velocidades de um corpo rígido | 13 |
| 2. 5. Campo de acelerações de um corpo rígido | 17 |
| 2. 6. Representações do operador rotação | 18 |
| 2. 6. 1. Representação de rotações em termos de produtos tensoriais | 19 |
| 2. 6. 2. Representação de rotações em termos de seus invariantes | 21 |
| 2. 6. 3. Representação de rotações em termos do vetor rotação | 28 |
| 2. 6. 4. Forma de Cayley de uma matriz ortogonal - Parâmetros de Rodrigues | 30 |
| 2. 6. 5. Representação de rotações em termos dos parâmetros de Euler | 34 |
| 2. 6. 6. Álgebra de quaternios | 37 |
| 2. 6. 7. Representação de rotações em termos do vetor rotação conforme | 43 |
| 2. 6. 8. Representação de rotações no plano | 46 |
| 2. 6. 9. Não-comutatividade de rotações | 48 |
| 2. 6. 10. Representação de rotações em termos dos ângulos de Euler | 49 |
| 2. 6. 11. Representação de rotações em termos dos ângulos de Bryant | 52 |
| 2. 7. Conclusões | 56 |
| 3. EQUAÇÕES DO MOVIMENTO | 58 |
| 3. 1. Introdução | 58 |
| 3. 2. Sistemas Holônomos | 58 |
| 3. 3. Trabalho Virtual | 59 |
| 3. 4. Princípio de D'Alembert | 62 |
| 3. 5. Equações de Lagrange | 63 |
| 3. 5. 1. Exemplo de formulação das equações de Lagrange - Pêndulo Duplo | 67 |
| 3. 6. Equações de Maggi-Kane | 70 |
| 3. 6. 1. Método de Maggi-Kane com Vínculos Implícitos | 71 |
| 3. 6. 2. Método de Maggi-Kane com Vínculos Explícitos | 79 |
| 3. 6. 3. Roteiro para a formulação das equações do movimento via Maggi-Kane | 83 |
| 3. 6. 4. Exemplo de formulação das equações de Maggi-Kane - Pêndulo Duplo | 85 |
| 3. 6. 5. Exemplo de formulação das equações de Maggi-Kane - Pião pesado com ponto fixo | 87 |
| 3. 7. Conclusões | 91 |
| 4. VIBRAÇÕES DE SISTEMAS CONTÍNUOS | 93 |
| 4. 1. Introdução | 93 |

| | |
|--|------------|
| 4. 2. Método de Rayleigh | 94 |
| 4. 3. Método de Rayleigh-Ritz | 97 |
| 4. 4. Método de modos supostos | 101 |
| 5. ALGORITMOS DE INTEGRAÇÃO | 105 |
| 5. 1. Introdução | 105 |
| 5. 2. Métodos Explícitos | 107 |
| 5. 3. Métodos Implícitos | 109 |
| 5. 4. Exemplos numéricos | 110 |
| 5. 5. Conclusões | 121 |
| 6. CONTROLE LINEAR DE SISTEMAS DE MULTICORPOS | 122 |
| 6. 1. Introdução | 122 |
| 6. 1. 1. Controle de sistemas no espaço de estados | 122 |
| 6. 1. 2. Linearização das equações do movimento | 122 |
| 6. 1. 3. Representação de sistemas dinâmicos por espaço de estados | 123 |
| 6. 1. 4. Análise de estabilidade de sistemas dinâmicos | 125 |
| 6. 1. 5. Controlabilidade e observabilidade | 128 |
| 6. 1. 5. 1. Controlabilidade | 128 |
| 6. 1. 5. 2. Observabilidade | 130 |
| 6. 2. Projeto de controladores via imposição de pólos | 132 |
| 6. 2. 1. Exemplo numérico do projeto de controladores via imposição de pólos | 136 |
| 6. 3. Projeto de observadores de estado | 138 |
| 6. 3. 1. Exemplo numérico do projeto de observadores de estado | 143 |
| 6. 4. Projeto de controle ótimo | 144 |
| 7. IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL | 150 |
| 7. 1. Introdução | 150 |
| 7. 2. Controle do pêndulo invertido flexível | 150 |
| 7. 3. Simulação de um manipulador robótico flexível | 157 |
| 8. CONCLUSÕES | 168 |
| REFERÊNCIAS | 171 |

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

| | |
|--|-----|
| Figura 2.1 - Representação de uma rotação finita | 5 |
| Figura 2.2 - Representação de um corpo rígido no espaço | 10 |
| Figura 2.3 - Transformação do vetor velocidade angular | 15 |
| Figura 2.4 - Variação do ângulo de rotação e suas derivadas em termos do VRC | 44 |
| Figura 2.5 - Rotação no plano $\mathbf{E}_1\mathbf{E}_2$ | 47 |
| Figura 2.6 - Ilustração da propriedade de não-comutatividade de rotações finitas | 49 |
| Figura 2.7 - Representação dos ângulos de Euler | 49 |
| Figura 2.8 - Representação dos ângulos de Bryant | 53 |
| Figura 3.1 - Pêndulo duplo | 68 |
| Figura 3.2 - Ilustração do pião pesado com ponto fixo (Ângulos de Euler - ψ, θ, φ e Vetor rotação Ψ) | 88 |
| Figura 4.1 - Deflexão de uma viga engastada | 95 |
| Figura 4.2 - Primeiro modo de vibração de uma viga bi-apoiada | 102 |
| Figura 5.1 - Solução do problema <i>rigid</i> utilizando o algoritmo ODE45. As linhas contínuas representam a saída padrão do ODE45. Os valores discretos são os resultados ao final de cada intervalo de tempo. As linhas tracejadas representam o que acontece quando se desabilita a interpolação | 108 |
| Figura 5.2 - Representação do pião pesado (ψ, θ, φ - ângulos de Euler; Ψ - vetor rotação) | 110 |
| Figura 5.3 - Simulação das equações do movimento do pião pesado em termos dos ângulos de Euler. Condições iniciais: ($\theta_0 = \pi/9$ rad e $\dot{\phi}_0 = 50$ rad/s) | 113 |
| Figura 5.4 - Simulação das equações do movimento do pião pesado em termos do vetor rotação. Condições iniciais: ($\theta_0 = \pi/9$ rad e $\dot{\phi}_0 = 50$ rad/s) | 114 |
| Figura 5.5 - Simulação das equações do movimento do pião pesado em termos dos ângulos de Euler. Condições iniciais: ($\theta_0 = \pi/9$ rad, $\dot{\phi}_0 = 50$ rad/s e $\dot{\psi}_0 = -10$ rad/s) | 115 |
| Figura 5.6 - Simulação das equações do movimento do pião pesado em termos do vetor rotação. Condições iniciais: $\theta_0 = \pi/9$ rad, $\dot{\phi}_0 = 50$ rad/s e $\dot{\psi}_0 = -10$ rad/s | 116 |
| Figura 5.7 - Simulação das equações do movimento do pião pesado em termos dos ângulos de Euler. Condições iniciais: $\theta_0 = \pi/9$ rad, $\dot{\phi}_0 = 50$ rad/s e $\dot{\psi}_0 = 1$ rad/s | 117 |
| Figura 5.8 - Simulação das equações do movimento do pião pesado em termos do vetor rotação. Condições iniciais: $\theta_0 = \pi/9$ rad, $\dot{\phi}_0 = 50$ rad/s e $\dot{\psi}_0 = 1$ rad/s | 118 |
| Figura 5.9 - Simulação das equações do movimento do pião pesado em termos dos ângulos de Euler. Condições iniciais: $\theta_0 = \pi/9$ rad e $\dot{\phi}_0 = 0,01$ rad/s | 119 |

| | |
|---|-----|
| Figura 5.10 - Simulação das equações do movimento do pião pesado em termos do vetor rotação. Condições iniciais: $\theta_0 = \pi/9$ rad e $\dot{\phi}_0 = 0,01$ rad/s | 120 |
| Figura 5.11 - Resolução da saída do algoritmo ADAMS com (linha pontilhada) e sem (linha contínua) limitação de tamanho de passo máximo na simulação do pião pesado em termos dos ângulos de Euler. Condições iniciais: $\theta_0 = \pi/9$ rad e $\dot{\phi}_0 = 0,01$ rad/s | 120 |
| Figura 6.1 - Sistema de múltiplas entradas e saídas | 124 |
| Figura 6.2 - Pêndulo invertido | 136 |
| Figura 6.3 - Resultados da simulação do pêndulo invertido com controle proporcional | 138 |
| Figura 6.4 - Resultados da simulação do pêndulo invertido com controle proporcional e observador de estado de ordem plena | 144 |
| Figura 7.1 - Pêndulo invertido flexível | 150 |
| Figura 7.2 - Resultados da simulação do controle do pêndulo invertido flexível sem observador | 155 |
| Figura 7.3 - Resultados da simulação do controle do pêndulo invertido flexível com observador de ordem plena | 157 |
| Figura 7.4 - Manipulador robótico com braço flexível de comprimento variável | 157 |
| Figura 7.5 - Resultados da simulação do manipulador robótico (linha contínua -- braço B rígido; linha tracejada -- braço B flexível); a) Ângulo entre o braço A e a horizontal; b) Deslocamento longitudinal da configuração indeformada do braço B; c) Deslocamento transversal da extremidade livre do braço B em relação a configuração indeformada; d) Posição vertical da extremidade livre do braço B com respeito ao referencial N | 167 |

LISTA DE TABELAS

| | |
|--|-----|
| Tabela 5.1 - Performance dos algoritmos de integração.Exemplo I. ($\theta_0 = \pi/9$ rad e $\dot{\phi}_0 = 50$ rad/s) | 112 |
| Tabela 5.2 - Performance dos algoritmos de integração.Exemplo II. ($\theta_0 = \pi/9$ rad, $\dot{\phi}_0 = 50$ rad/s e $\dot{\psi}_0 = -10$ rad/s) | 114 |
| Tabela 5.3 - Performance dos algoritmos de integração.Exemplo III. ($\theta_0 = \pi/9$ rad, $\dot{\phi}_0 = 50$ rad/s e $\dot{\psi}_0 = 1$ rad/s) | 116 |
| Tabela 5.4 - Performance dos algoritmos de integração.Exemplo IV. ($\theta_0 = \pi/9$ rad e $\dot{\phi}_0 = 0,01$ rad/s) | 118 |

LISTA DE SÍMBOLOS

| | |
|-------------------------|--|
| F_p^c | Força de reação generalizada relativa a velocidade generalizada w_p |
| $V_p^{P_r}$ | Velocidade parcial do ponto P_r relativa a velocidade generalizada w_p |
| ϕ | Ângulo de rotação |
| Ψ | Vetor rotação |
| ψ, θ, φ | Ângulos de Euler/Bryant |
| Φ_r | r-ésimo modo natural de vibração |
| α | Aceleração angular espacial |
| A | Aceleração angular material |
| b | Parâmetros de Rodrigues |
| c | Vetor rotação conforme |
| E | Base material |
| E | Módulo de elasticidade |
| e, e_0 | Parâmetros de Euler |
| F_p | Força ativa generalizada relativa a velocidade generalizada w_p |
| F_p^* | Força inercial generalizada relativa a velocidade generalizada w_p |
| I | Momento de inércia da seção transversal |
| J | Tensor de inércia |
| K | Matriz de ganho de realimentação |
| K_e | Matriz de ganho do observador |
| L | Lagrangeano |
| λ_i | i-ésimo multiplicador de Lagrange |
| M | Matriz de controlabilidade |
| n | Eixo de rotação |
| N | Matriz de observabilidade |
| NB | Número de corpos rígidos |
| NG | Número de graus de liberdade |
| NP | Número de partículas |
| p | Quantidade de movimento linear |
| R | Operador rotação |
| t | Base espacial |
| T | Operador tangente |
| T | Energia cinética |
| V | Energia potencial |
| w | Deflexão da viga |
| w | Velocidade angular espacial |
| W | Velocidade angular material |
| ω_r | r-ésima frequência natural de vibração |

Introdução

Atualmente, uma importante área da Engenharia moderna é a análise e predição do comportamento de sistemas físicos. A crescente evolução tecnológica mundial das indústrias aeronáutica, aeroespacial e de automação industrial fez com que a simulação numérica de sistemas fosse imprescindível na fase de projeto, e a capacidade computacional dos micro-computadores atuais permitiu que essa fase de projeto fosse viável. Na maioria das aplicações industriais, os sistemas a serem analisados são extremamente complexos, possuindo um número muito grande de componentes (ou corpos). Para analisar esses sistemas é necessário dividi-los em vários corpos, identificar os corpos, determinar como esses corpos estão ligados e determinar suas propriedades físicas. Tendo caracterizado totalmente o sistema, é necessário construir um modelo matemático para representar uma idealização do sistema físico. E, posteriormente, deve-se construir um algoritmo para simular numericamente o comportamento mecânico do sistema e analisar sua performance. A escolha do mais conveniente modelo matemático para representar eficientemente o sistema, assim como, a análise da simulação numérica como base para a qualificação do projeto são tarefas ainda não automatizadas e que, portanto, dependem de uma equipe humana com experiência suficiente no assunto. A análise dinâmica que é feita industrialmente é baseada nos princípios da Mecânica Clássica que descreve bem os problemas tecnológicos atuais.

A Dinâmica começou sua evolução a partir do desenvolvimento da *Dinâmica Newtoniana* quando foram formuladas as leis do movimento. Historicamente, o início do desenvolvimento da *Dinâmica Newtoniana* se deu devido às observações de Galileo (1564-1642), porém Galileo não pôde ir muito longe por falta de meios precisos para medida de tempo, o que só foi resolvido quando Huygens inventou o relógio pendular em 1657. Newton (1642-1727) foi o primeiro a conseguir desenvolver uma formulação precisa das equações do movimento, baseado no trabalho de Galileo. Posteriormente, Euler estendeu os conceitos postulados por Newton para o estudo da Dinâmica de Corpos Rígidos. Apenas cem anos depois, Lagrange desenvolveu a *Mecânica Analítica* onde formulou suas equações do movimento, que empregavam conceitos de energia cinética e trabalho, baseado no princípio de Hamilton.

Essas técnicas tradicionais eram constituídas de conhecimentos que, para a época utilizavam matemática avançada, porém, só tratavam de problemas físicos muito simples. Depois do desenvolvimento dos computadores, houve uma necessidade de se desenvolver

novas técnicas que se aproveitassem do fato de que a capacidade de cálculo havia se tornado enorme para poder tratar com problemas de grande porte. A partir daí, um número enorme de técnicas de análise dinâmica de sistemas de multicorpos foram desenvolvidas, sendo aplicadas à problemas reais nas áreas aeroespacial e de manipuladores robóticos. Desde então, vários códigos computacionais foram desenvolvidos para análise e simulação de sistemas de multicorpos. Hoje em dia, um método extremamente utilizado e que vem demonstrando ser bastante versátil na análise de sistemas com um grande número de corpos é o método de Maggi-Kane. No estudo de sistemas de multicorpos, as equações de Maggi-Kane mostraram inúmeras vantagens sobre as formulações de Lagrange e Newton-Euler, apresentando menor custo para se chegar as equações de movimento, equações mais simples, fácil tratamento de vínculos não-holônomos e mais fácil interpretação dos resultados.

As principais aplicações industriais do estudo da Dinâmica de Sistemas de Multicorpos, são sistemas de grande porte ou com uma grande complexidade geométrica. É, justamente, para esse tipo de aplicação que o tipo de modelagem a ser utilizada é mais importante. A maioria dos códigos estruturais se utilizam de hipóteses simplificadoras, como, por exemplo, linearização de rotações, que algumas vezes levam a erros bastante significativos mesmo em modelos relativamente simples.

No passado, para a maioria das aplicações práticas, os robôs, aeronaves, antenas e satélites eram modelados como sistemas de multicorpos rígidos. A hipótese de que todos os corpos eram rígidos dava bons resultados quando o sistema não apresentava grandes deformações elásticas. Porém, hoje, a necessidade de se ter mecanismos cada vez mais leves, com menor consumo de potência e com velocidades cada vez maiores, tornou inadequada a hipótese de rigidez. Por isso, hoje, se faz necessário levar em consideração os efeitos da flexibilidade dos corpos. Evidentemente, paga-se um preço por isso, já que os modelos matemáticos são mais sofisticados. Porém, com o uso dos microcomputadores muito potentes, disponíveis atualmente, torna-se viável a simulação numérica desses modelos.

Neste trabalho, é apresentada uma discussão sobre a modelagem de sistemas de multicorpos rígidos e/ou flexíveis com o objetivo de apresentar as principais dificuldades em se considerar sistemas com movimentos tridimensionais complexos e sistemas com algum grau de flexibilidade. No capítulo 2, um enfoque é dado a representação de rotações no espaço que apresenta várias peculiaridades e pode influenciar no custo para se obter as equações do movimento e nas características numéricas dos resultados. São apresentados os ângulos de Euler e Bryant que eram usados tradicionalmente no estudo de dinâmica de multicorpos; os parâmetros de Euler que ainda hoje são largamente utilizados na maioria dos programas por não apresentarem singularidades, mas somam uma equação de vínculo por corpo ao sistema; outros métodos são apresentados com a intenção de representar rotações com apenas três parâmetros como os parâmetros de Rodrigues, o vetor rotação conforme e o vetor rotação sendo que os parâmetros de Rodrigues apresentam singularidade.

No capítulo 3, a derivação das equações do movimento é realizada utilizando as equações de Lagrange e de Maggi-Kane, com o objetivo de desenvolver um algoritmo de manipulação simbólica utilizando o ambiente MATLAB para a derivação automática das equações do movimento. Uma discussão acerca das vantagens e desvantagens de cada método é realizada.

No capítulo 4, são apresentados o método de Rayleigh-Ritz e o método de modos supostos para a caracterização das deformações dos corpos flexíveis.

Vários algoritmos de integração foram utilizados nas simulações realizadas neste trabalho. Foi utilizado o pacote OdeSuite desenvolvido para o MATLAB por Shampine e Reichelt (Shampine e Reichelt 1995) que contém diversos integradores para sistemas rígidos (stiff) e não-rígidos (non-stiff). Uma análise acerca dos algoritmos de integração utilizados no trabalho é feita, no capítulo 5.

Uma segunda fase deste trabalho é desenvolver o controle linear de alguns sistemas de multicorpos rígidos e/ou flexíveis. A partir da equação do movimento, pode-se conhecer o comportamento do sistema sujeito à forças externas determinadas, mas também pode-se determinar as forças necessárias para estabilizar um sistema ou fazer com que ele se comporte de uma maneira especificada. O controle automático, hoje, é utilizado em sistemas de veículos espaciais, mísseis, satélites, robôs e, inclusive, em processos industriais e de fabricação.

O primeiro trabalho significativo em controle automático foi de James Watt ao construir um controlador de velocidade para uma máquina a vapor no século XVIII. Em 1934, Hazen introduziu o termo *servomecanismos* para sistemas de controle de posição. A teoria de controle clássica se desenvolveu muito desde então, mas para o controle de sistemas com muitas entradas e saídas como sistemas de multicorpos, a teoria de controle clássica, que trata apenas de sistema de entrada e saída simples, não foi suficiente. A partir de 1960, quando os computadores tornaram possível analisar sistemas de controle complexos no domínio do tempo e devido aos processos modernos de plantas industriais com múltiplas entradas e saídas, a teoria de controle moderno tem sido desenvolvida baseada na análise de sistemas no domínio do tempo usando variáveis de estado. Atualmente, com o advento dos microprocessadores, é possível projetar sistemas de controle bastante sofisticados e, por isso, é possível controlar sistemas dinâmicos complexos como sistemas de multicorpos.

Este trabalho não tem a pretensão de esgotar a teoria de controle, mas de desenvolver uma metodologia que possa ser usada para controlar o sistema. Nosso ponto de vista é que o estudo da Dinâmica é essencial para que possamos controlá-la, o que pode ser feito através da teoria de controle moderno. No capítulo 6, são apresentadas a teoria básica de Controle Moderno e Controle Ótimo e as suas aplicações ao controle de sistemas de multicorpos. Um exemplo numérico é apresentado utilizando as funções do toolbox de controle do MATLAB.

No capítulo 7, são apresentadas algumas dificuldades impostas pelo ambiente do MATLAB na implementação computacional da modelagem, controle e simulação de sistemas de multicorpos. Através de alguns exemplos, é demonstrada a integração das diversas etapas de modelagem, controle e simulação utilizando o ambiente do MATLAB.

Cinemática de Corpos Rígidos

1. INTRODUÇÃO

O objetivo deste capítulo é apresentar uma exposição das possíveis abordagens para o problema da descrição da cinemática espacial de corpos rígidos, que consiste basicamente em descrever as rotações finitas de corpos rígidos. Este estudo é básico para a modelagem, simulação, análise do comportamento dinâmico de estruturas.

Neste capítulo, inicialmente, será apresentada uma descrição intrínseca do operador rotação, i.e., sem o uso de componentes, atentando para as principais propriedades do operador. Em seguida, serão apresentadas a descrição do movimento geral de um corpo rígido, assim como, de seus campos de velocidade e aceleração.

Posteriormente, serão apresentadas diversas abordagens para a parametrização de rotações finitas. A representação de rotações finitas é objetivo de intensivo estudo e numerosos trabalhos nesta área vem sendo apresentados ao longo da última década. Não é objetivo deste trabalho esgotar o assunto de parametrização de rotações finitas, mas uma discussão acerca dos mais importantes sistemas de parametrização encontradas até hoje na literatura será apresentada.

Serão apresentados os seguintes sistemas de parametrização:

- Ângulos de Euler e Ângulos de Bryant - fornecem uma caracterização geométrica da rotação. São os sistemas de parametrização mais encontrados na literatura de dinâmica, principalmente, por apresentarem fácil visualização do problema.
- Parâmetros de Euler, Parâmetros de Rodrigues, Vetor Rotação e Vetor Rotação Conforme - derivam do teorema de Euler acerca da representação de rotações finitas em termos dos invariantes (eixo e ângulo de rotação). Possuem a vantagem de não serem específicos para determinados problemas como os ângulos de Euler e Bryant, sendo mais apropriados para o estudo de problemas gerais.
- Quaternios - trata de forma bastante peculiar e elegante o problema de rotação. Permite combinar rotações sucessivas através da multiplicação de quaternios, causando um número mínimo de operações algébricas.

Todas estas diferentes abordagens e as relações entre elas são apresentadas. Problemas de pontos de singularidade e propriedades de diferenciabilidade são tratados. Conclusões finais acerca da conveniência de uma dada parametrização, i.e., suas vantagens e

desvantagens, são apresentadas através da comparação dos diversos sistemas de parametrização.

2. ROTAÇÕES FINITAS

Seja o operador linear \mathbf{R} , representado na Figura 2.1, tal que

$$\mathbf{x} = \mathbf{R}\mathbf{X} \quad (2.2.1)$$

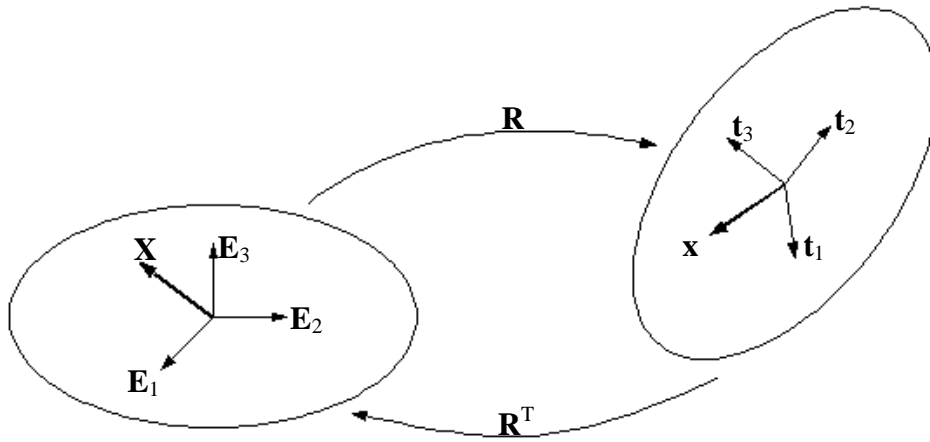


Figura 2.1: Representação de uma rotação finita.

A imagem de \mathbf{X} é obtida através de uma rotação na qual seu módulo permanece inalterado qualquer que seja \mathbf{R} . De modo que podemos escrever

$$\mathbf{X}^T \mathbf{X} = \mathbf{x}^T \mathbf{x} = \mathbf{X}^T \mathbf{R}^T \mathbf{R} \mathbf{X} \quad (2.2.2)$$

donde, podemos observar que

$$\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{I} \quad (2.2.3)$$

portanto $\mathbf{R}^T = \mathbf{R}^{-1}$, o que significa que o operador \mathbf{R} pode ser representado por uma matriz ortogonal.

Sabendo que os vetores \mathbf{E}_i formam uma base ortonormal \mathbf{E} , temos

$$\mathbf{E}_i^T \mathbf{E}_j = \delta_{ij} \quad \text{e} \quad \mathbf{E}_3 = \tilde{\mathbf{E}}_1 \mathbf{E}_2 \quad (2.2.4)$$

e, portanto,

$$\left(\tilde{\mathbf{E}}_1 \mathbf{E}_2\right)^T \mathbf{E}_3 = 1 \quad (2.2.5)$$

Da mesma maneira, sabemos que os vetores \mathbf{t}_i formam uma base ortonormal \mathbf{t}

$$\mathbf{t}_i^T \mathbf{t}_j = \delta_{ij} \quad \text{e} \quad \mathbf{t}_3 = \tilde{\mathbf{t}}_1 \mathbf{t}_2 \quad (2.2.6)$$

e, portanto,

$$\left(\tilde{\mathbf{t}}_1 \mathbf{t}_2\right)^T \mathbf{t}_3 = 1 \quad (2.2.7)$$

Vamos definir, então, as matrizes

$$\mathbf{A} = [\mathbf{E}_1 \quad \mathbf{E}_2 \quad \mathbf{E}_3] \quad \text{e} \quad \mathbf{B} = [\mathbf{t}_1 \quad \mathbf{t}_2 \quad \mathbf{t}_3] \quad (2.2.8)$$

que, devido às Eqs. (2.2.5) e (2.2.7), têm determinante unitário

$$\det(\mathbf{A}) = 1 \quad \text{e} \quad \det(\mathbf{B}) = 1 \quad (2.2.9)$$

Sabendo que os vetores \mathbf{t}_i da base \mathbf{t} também são transformados pelo operador \mathbf{R} , tal que $\mathbf{t}_i = \mathbf{R}\mathbf{E}_i$, podemos observar que

$$\mathbf{B} = \mathbf{R}\mathbf{A} \quad (2.2.10)$$

e, portanto, podemos afirmar que

$$\det(\mathbf{R}) = +1 \quad (2.2.11)$$

o que mostra que o operador \mathbf{R} pode ser representado por uma matriz ortogonal e própria.

Consideremos o conjunto $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ e o conjunto $\{\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \mathbf{h}_3\}$ como os autovalores e autovetores do operador \mathbf{R} , respectivamente, podemos escrever:

$$\mathbf{R}\mathbf{h}_i = \lambda_i \mathbf{h}_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad (2.2.12)$$

Acerca dos autovalores sabemos que

$$\det(\mathbf{R}) = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1 \quad (2.2.13)$$

e que todos eles têm módulo unitário já que

$$\|\mathbf{R}\mathbf{h}_i\| = |\lambda_i| \|\mathbf{h}_i\| \quad (i = 1, 2, 3) \quad (2.2.14)$$

e, como foi verificado anteriormente, o módulo de um vetor que efetua uma rotação pura permanece inalterado, de modo que

$$|\lambda_i| = 1 \quad (i = 1, 2, 3) \quad (2.2.15)$$

Como \mathbf{R} é um operador 3×3 , a equação característica de \mathbf{R} é uma equação cúbica em λ . Como \mathbf{R} é real, esta equação deve possuir pelo menos uma raiz real. Devido ao fato de que o módulo dos autovalores é unitário, esta raiz real só pode ser ± 1 .

Consideremos, então, todos os possíveis autovalores de \mathbf{R} . Todos os três autovalores não podem ser reais e diferentes, pois raízes reais só podem ter valores ± 1 . Se todos os autovalores forem reais e dois deles iguais, o que é diferente deve ser $+1$, senão o determinante de \mathbf{R} não poderia ser $+1$. Com exceção da solução trivial onde todos os autovalores têm valor $+1$ (que representa a matriz identidade), a única possibilidade remanescente é um autovalor real e outros dois complexos conjugados. Mas, os autovalores complexos conjugados possuem módulo unitário e, conseqüentemente, seu produto é igual a $+1$, portanto o autovalor real deve ser $+1$.

Como foi verificado, qualquer transformação ortogonal não-trivial representando o movimento de rotação de um corpo rígido tem um, e apenas um, autovalor igual a $+1$. Esta afirmação pode ser reescrita através do *teorema de Euler*: *o movimento geral de um corpo rígido com um ponto fixo é equivalente a uma rotação em torno de algum eixo*.

Consideremos a matriz \mathbf{A} como sendo a matriz dos autovalores de \mathbf{R} . Podemos escrever o operador \mathbf{R} como

$$\mathbf{R} = \mathbf{Q}\mathbf{\Lambda}\mathbf{Q}^{-1} \quad \text{onde} \quad \mathbf{Q}^* \mathbf{Q} = \mathbf{I} \quad (2.2.16)$$

e onde

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \quad (2.2.17)$$

sendo que os autovalores $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ podem ser escritos da seguinte forma

$$\lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = \exp(i\phi) \quad \lambda_3 = \exp(-i\phi) \quad (\phi \text{ arbitrário}) \quad (2.2.18)$$

O operador \mathbf{R} possui um autovetor \mathbf{n} associado ao autovalor λ_1 , tal que:

$$\mathbf{R}\mathbf{n} = \mathbf{n} \quad (2.2.19)$$

e, portanto, permanece inalterado na transformação. O vetor unitário \mathbf{n} é denominado de eixo de rotação.

Os autovetores associados aos outros dois autovalores λ_2 e λ_3 são complexos conjugados. Podemos escrever o operador \mathbf{Q} na forma

$$\mathbf{Q} = [\mathbf{n} \quad \mathbf{u} + i\mathbf{v} \quad \mathbf{u} - i\mathbf{v}] \quad (2.2.20)$$

portanto

$$\mathbf{Q}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{n}^T \\ (\mathbf{u} - i\mathbf{v})^T \\ (\mathbf{u} + i\mathbf{v})^T \end{bmatrix} \quad (2.2.21)$$

Utilizando a propriedade definida na Eq. (2.2.16), podemos escrever

$$\mathbf{Q}^* \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{n}^T \mathbf{n} & \mathbf{n}^T (\mathbf{u} + i\mathbf{v}) & \mathbf{n}^T (\mathbf{u} - i\mathbf{v}) \\ (\mathbf{u} - i\mathbf{v})^T \mathbf{n} & (\mathbf{u} - i\mathbf{v})^T (\mathbf{u} + i\mathbf{v}) & (\mathbf{u} - i\mathbf{v})^T (\mathbf{u} - i\mathbf{v}) \\ (\mathbf{u} + i\mathbf{v})^T \mathbf{n} & (\mathbf{u} + i\mathbf{v})^T (\mathbf{u} + i\mathbf{v}) & (\mathbf{u} + i\mathbf{v})^T (\mathbf{u} - i\mathbf{v}) \end{bmatrix} = \mathbf{I} \quad (2.2.22)$$

donde podemos escrever

$$\begin{aligned} \mathbf{n}^T \mathbf{u} &= \mathbf{n}^T \mathbf{v} = 0 \\ \mathbf{u}^T \mathbf{v} &= 0 \\ \mathbf{u}^T \mathbf{u} + \mathbf{v}^T \mathbf{v} &= 1 \end{aligned} \quad (2.2.23)$$

Das propriedades acima descritas, podemos deduzir que os vetores \mathbf{u} e \mathbf{v} formam uma base ortogonal no plano perpendicular ao eixo de rotação \mathbf{n} .

Podemos observar que os autovetores $(\mathbf{u} + i\mathbf{v})$ e $(\mathbf{u} - i\mathbf{v})$ obedecem às seguintes relações:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(\mathbf{u} + i\mathbf{v}) &= \exp(i\phi)(\mathbf{u} + i\mathbf{v}) \\ \mathbf{R}(\mathbf{u} - i\mathbf{v}) &= \exp(-i\phi)(\mathbf{u} - i\mathbf{v}) \end{aligned} \quad (2.2.24)$$

que podem ser reescritas da seguinte forma

$$\begin{aligned} \mathbf{R}\mathbf{u} + i\mathbf{R}\mathbf{v} &= (\mathbf{u} \cos \phi - \mathbf{v} \sin \phi) + i(\mathbf{u} \sin \phi + \mathbf{v} \cos \phi) \\ \mathbf{R}\mathbf{u} - i\mathbf{R}\mathbf{v} &= (\mathbf{u} \cos \phi - \mathbf{v} \sin \phi) - i(\mathbf{u} \sin \phi + \mathbf{v} \cos \phi) \end{aligned} \quad (2.2.25)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{R}\mathbf{u} &= \mathbf{u} \cos \phi - \mathbf{v} \sin \phi \\ \mathbf{R}\mathbf{v} &= \mathbf{u} \sin \phi + \mathbf{v} \cos \phi \end{aligned} \quad (2.2.26)$$

Este resultado mostra que os vetores \mathbf{u} e \mathbf{v} apresentam uma rotação plana de um ângulo ϕ no plano perpendicular ao eixo de rotação.

Os últimos resultados mostram que qualquer rotação \mathbf{R} pode ser pensada globalmente como uma rotação plana de um ângulo ϕ em torno de um eixo \mathbf{n} .

3. MOVIMENTO GERAL DE UM CORPO RÍGIDO

Na seção anterior, descrevemos o operador rotação através de uma transformação rígida de um vetor, onde eram consideradas apenas as configurações inicial e final. Agora, desejamos descrever o movimento de um corpo rígido. Para tal, passaremos a considerar que o operador rotação é variável no tempo. Isto porque o corpo rígido pode assumir várias configurações, uma para cada instante de tempo. Para descrever este movimento são necessários seis parâmetros, dos quais três são para descrever a translação de um ponto do corpo e outros três para descrever a rotação em torno de um eixo que passa por este ponto.

Consideremos um corpo rígido se movendo no espaço, como representado na Figura 2.2. Seja O um ponto do corpo que adotaremos como origem do referencial inercial, representado na Figura 2.2 pela base \mathbf{E} . Sejam \mathbf{X} e \mathbf{x}_P os vetores-posição de um ponto arbitrário P do corpo. Suponhamos que o movimento do corpo seja a composição de dois movimentos, um de translação pura e outro de rotação pura. No primeiro movimento, todos os pontos do corpo apresentam o mesmo deslocamento, que representaremos pelo deslocamento \mathbf{x}_O do ponto O . No segundo movimento, o corpo rígido gira em torno de um eixo que passa pelo ponto O' . Tal que, o vetor-posição do ponto P , após o movimento, é

$$\mathbf{x}_P = \mathbf{x}_O + \mathbf{x} \quad (2.3.1)$$

onde $\mathbf{x}_P = \mathbf{OP}'$, $\mathbf{X} = \mathbf{OP}$, $\mathbf{x}_O = \mathbf{OO}'$ e $\mathbf{x} = \mathbf{O}'P'$.

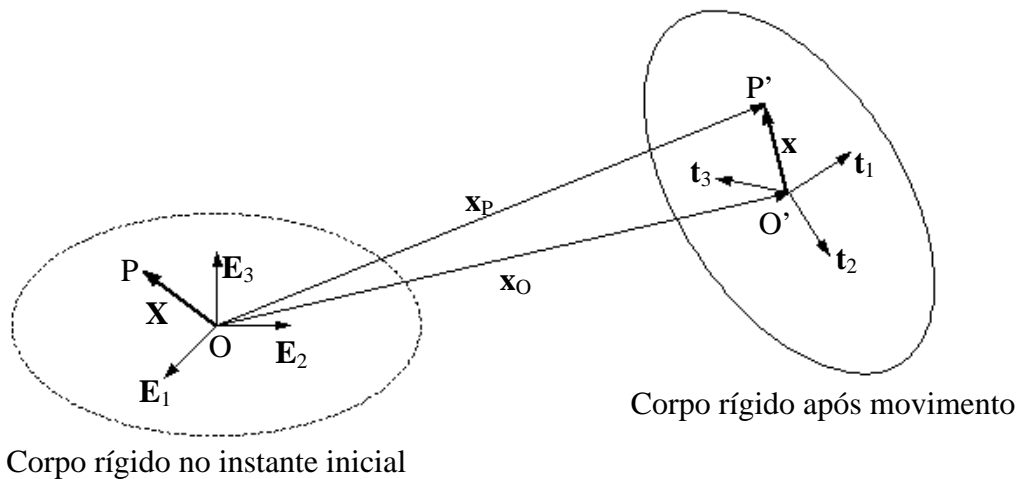


Figura 2.2: Representação de um corpo rígido no espaço.

Como o segundo movimento é uma rotação pura, representada pelo operador \mathbf{R} , o vetor \mathbf{x} é a imagem do vetor \mathbf{X} , de modo que podemos reescrever a Eq. (2.3.1) na seguinte forma:

$$\mathbf{x}_P = \mathbf{x}_O + \mathbf{R}\mathbf{X} \quad (2.3.2)$$

Podemos expressar o deslocamento do ponto P de sua posição de referência na forma

$$\mathbf{u}_P = \mathbf{x}_P - \mathbf{X} = \mathbf{u}_O + \mathbf{D}\mathbf{X} \quad (2.3.3)$$

onde $\mathbf{u}_O = \mathbf{x}_O$ é o deslocamento da origem, e onde

$$\mathbf{D} = \mathbf{R} - \mathbf{I} \quad (2.3.4)$$

O operador \mathbf{D} tem pelo menos um autovalor nulo, pois

$$\mathbf{D}\mathbf{n} = \mathbf{D}^T\mathbf{n} = 0 \quad (2.3.5)$$

Portanto, o sistema

$$\mathbf{u}_O + \mathbf{D}\mathbf{X} = 0 \quad (2.3.6)$$

não tem solução em geral, o que significa que, geralmente, nenhum ponto do corpo permanece fixo durante a transformação definida na Eq. (2.3.2) a não ser que o deslocamento da origem \mathbf{u}_O seja nulo. Porém, podemos encontrar um ponto C com o deslocamento mínimo $\|\mathbf{u}_C\|$. A sua posição pode ser encontrada resolvendo o seguinte problema

$$\|\mathbf{u}_C\|^2 = \min_{\mathbf{X}} \|\mathbf{D}\mathbf{X} + \mathbf{u}_O\|^2 \quad (2.3.7)$$

A solução do problema acima verifica a seguinte equação

$$\mathbf{D}^T(\mathbf{u}_O + \mathbf{D}\mathbf{X}_C) = 0 \quad (2.3.8)$$

o que mostra que o deslocamento do ponto C é paralelo ao eixo de rotação

$$\mathbf{u}_C = \mathbf{u}_O + \mathbf{D}\mathbf{X}_C = k\mathbf{n} \quad (2.3.9)$$

onde k é uma constante cujo valor pode ser obtido pré-multiplicando a Eq. (2.3.9) por \mathbf{n}^T

$$k = \mathbf{n}^T \mathbf{u}_O \quad (2.3.10)$$

e a posição do ponto C é solução de

$$\mathbf{D}\mathbf{X}_C = (\mathbf{n}\mathbf{n}^T - \mathbf{I})\mathbf{u}_O \quad (2.3.11)$$

No entanto, não podemos resolver este sistema, pois o operador \mathbf{D} não é inversível, como pode ser observado em (2.3.5). De modo a eliminar a indeterminação na escolha do ponto C no eixo de rotação, podemos escolher um ponto M no eixo de rotação que satisfaça o sistema acima e que seja o mais próximo da origem O. O vetor-posição de M está sujeito ao seguinte vínculo

$$\mathbf{n}^T \mathbf{X}_M = 0 \quad (2.3.12)$$

e é solução do seguinte sistema

$$\begin{bmatrix} \mathbf{D} \\ \mathbf{n}^T \end{bmatrix} \mathbf{X}_M = \begin{bmatrix} \mathbf{n}\mathbf{n}^T - \mathbf{I} \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}_O \quad (2.3.13)$$

Este sistema é formalmente sobredeterminado com quatro equações e três incógnitas. Porém, sua sobredeterminação é apenas formal, já que, apenas três das quatro equações são linearmente independentes. A solução do sistema acima pode ser obtida utilizando a inversa generalizada de Moore-Penrose (Campbell e Meyer 1979)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{D}^T & \mathbf{n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{D} \\ \mathbf{n}^T \end{bmatrix} \mathbf{X}_M = -\mathbf{D}^T \mathbf{u}_O \quad (2.3.14)$$

donde

$$\mathbf{X}_M = -\frac{\mathbf{D}^T \mathbf{u}_O}{2(1 - \cos \phi)} \quad (2.3.15)$$

Podemos verificar que o deslocamento do ponto M consiste apenas de uma translação

$$\mathbf{u}_M = \mathbf{kn} + \mathbf{D}(\mathbf{X}_M - \mathbf{X}_C) = \mathbf{kn} \quad (2.3.16)$$

A partir dos últimos resultados podemos escrever o teorema de Chasles:

“Em um movimento qualquer de um corpo rígido, a posição dos pontos do corpo que possuem o menor deslocamento é definida por uma linha paralela ao eixo de rotação que passa por um ponto M cujo vetor-posição é definido na Eq. (2.3.15).”

4. CAMPO DE VELOCIDADES DE UM CORPO RÍGIDO

Podemos, agora, analisar as velocidades envolvidas em um movimento geral de um corpo rígido. Para tal, como na seção anterior, vamos considerar o movimento de um ponto P do corpo. O vetor-velocidade do ponto P pode ser obtido através da diferenciação com relação ao tempo da Eq. (2.3.2) no referencial inercial e é dado pela seguinte expressão

$$\dot{\mathbf{x}}_P = \dot{\mathbf{x}}_O + \dot{\mathbf{R}}\mathbf{X} + \mathbf{R}\dot{\mathbf{X}} \quad (2.4.1)$$

Consideremos o caso onde o ponto material é fixo com relação à base material e, portanto, $\dot{\mathbf{X}} = 0$. Desta forma, a equação acima se reduz a:

$$\dot{\mathbf{x}}_P = \dot{\mathbf{x}}_O + \dot{\mathbf{R}}\mathbf{X} \quad (2.4.2)$$

Podemos ainda eliminar \mathbf{X} da equação acima exprimindo \mathbf{X} em função \mathbf{x}_P . Para tal, podemos inverter a Eq. (2.3.2) obtendo:

$$\mathbf{X} = \mathbf{R}^T(\mathbf{x}_P - \mathbf{x}_O) \quad (2.4.3)$$

substituindo a Eq. (2.4.3) na Eq. (2.4.2), obtemos a forma final do vetor-velocidade do ponto P

$$\dot{\mathbf{x}}_P = \dot{\mathbf{x}}_O + \dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T(\mathbf{x}_P - \mathbf{x}_O) \quad (2.4.4)$$

onde o operador $\dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T$ é um operador anti-simétrico, já que

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{R}\mathbf{R}^T) = \dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T + \mathbf{R}\dot{\mathbf{R}}^T = \dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T + (\dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T)^T = 0 \quad (2.4.5)$$

portanto, podemos definir o operador anti-simétrico

$$\tilde{\mathbf{w}} = \dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T \quad (2.4.6)$$

como sendo o operador anti-simétrico associado à velocidade angular espacial \mathbf{w} do corpo rígido. Onde o isomorfismo entre um operador anti-simétrico e um vetor nos permite escrever $\tilde{\mathbf{w}}\mathbf{h} = \mathbf{w} \times \mathbf{h}$. Tal que, em qualquer base, podemos escrever a seguinte relação entre as componentes da matriz anti-simétrica e do vetor

$$[\tilde{\mathbf{w}}] = \begin{bmatrix} 0 & -w_3 & w_2 \\ w_3 & 0 & -w_1 \\ -w_2 & w_1 & 0 \end{bmatrix} \quad [\mathbf{w}] = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} \quad (2.4.7)$$

De forma que a velocidade \mathbf{v}_P do ponto P pode ser escrita como

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_O + \tilde{\mathbf{w}}(\mathbf{x}_P - \mathbf{x}_O) \quad (2.4.8)$$

onde $\mathbf{v}_O = \dot{\mathbf{x}}_O$ representa a velocidade do ponto de referência O. Desta maneira, se sabemos a posição e a velocidade de um ponto qualquer do corpo, assim como a velocidade angular do corpo, podemos determinar o movimento do corpo.

Podemos definir, também, a velocidade angular material que pode ser obtida através da transformação (Figura 2.3)

$$\mathbf{W} = \mathbf{R}^T \mathbf{w} \quad \text{ou} \quad \tilde{\mathbf{W}} = \mathbf{R}^T \tilde{\mathbf{w}} \mathbf{R} \quad (2.4.9)$$

donde podemos escrever a velocidade angular material como

$$\tilde{\mathbf{W}} = \mathbf{R}^T \dot{\mathbf{R}} \quad (2.4.10)$$

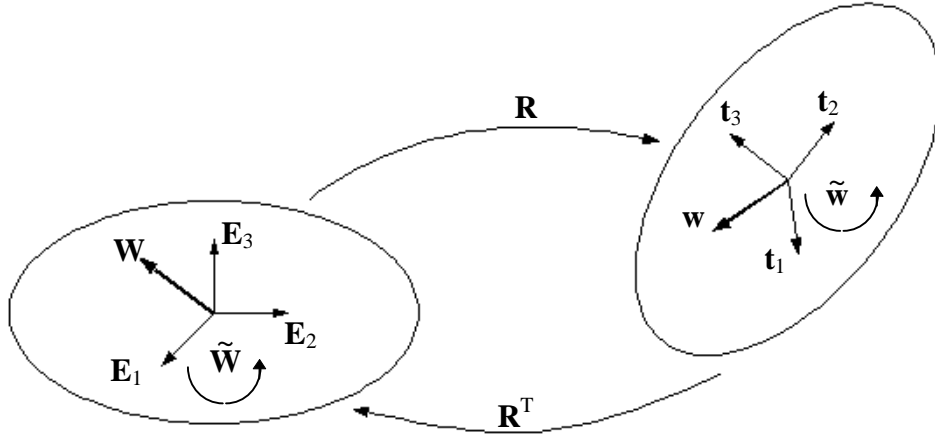


Figura 2.3: Transformação do vetor velocidade angular.

Como a escolha da origem O é arbitrária, é interessante obtermos uma descrição invariante da velocidade do ponto P . Para isso, analogamente ao desenvolvimento da seção anterior, vamos definir um ponto C do corpo como sendo aquele que apresenta menor velocidade. Isto consiste em resolver o seguinte problema

$$\min_{\mathbf{x}_P} \left\{ \frac{1}{2} \mathbf{v}_P^2 \right\} = \min_{\mathbf{x}_P} \left\{ \frac{1}{2} \left\| \dot{\mathbf{x}}_O + \tilde{\mathbf{w}}(\mathbf{x}_P - \mathbf{x}_O) \right\|^2 \right\} = \frac{1}{2} \mathbf{v}_C^2 \quad (2.4.11)$$

Da equação acima, podemos observar que o vetor-posição \mathbf{x}_C do ponto C verifica a seguinte condição

$$\tilde{\mathbf{w}}^T [\mathbf{v}_O + \tilde{\mathbf{w}}(\mathbf{x}_C - \mathbf{x}_O)] = 0 \quad (2.4.12)$$

o que significa que seu vetor-velocidade \mathbf{v}_C é paralelo a direção da velocidade angular

$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_O + \tilde{\mathbf{w}}(\mathbf{x}_C - \mathbf{x}_O) = u \frac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|} \quad (2.4.13)$$

O valor de u pode ser obtido projetando a equação acima na direção de \mathbf{w} , ou seja, pré-multiplicando a equação por \mathbf{w}^T

$$u = \frac{1}{\|\mathbf{w}\|} \mathbf{w}^T \mathbf{v}_O \quad (2.4.14)$$

A posição \mathbf{x}_C do ponto C pode ser obtida utilizando as Eqs. (2.4.13) e (2.4.14)

$$\tilde{\mathbf{w}} \mathbf{x}_C = \tilde{\mathbf{w}} \mathbf{x}_O - \left(\mathbf{I} - \frac{\mathbf{w} \mathbf{w}^T}{\|\mathbf{w}\|^2} \right) \mathbf{v}_O \quad (2.4.15)$$

contudo, este sistema não tem solução única pois $\tilde{\mathbf{w}}$ não tem posto máximo. Portanto, vamos supor um conjunto de soluções \mathbf{x}_C da forma

$$\mathbf{x}_C = \mathbf{x}_M + \alpha \mathbf{w} \quad (2.4.16)$$

onde \mathbf{x}_M é uma solução particular da Eq. (2.4.15) e α é um parâmetro arbitrário. Todos os pontos \mathbf{x}_C possuem a mesma velocidade mínima definida na Eq. (2.4.13). A Eq. (2.4.16) representa uma linha que passa pelo ponto \mathbf{x}_M e segue na direção da velocidade angular \mathbf{w} . Esta linha é chamada de eixo de parafuso instantâneo (instantaneous screw axis) do corpo rígido.

O ponto M pode ser considerado como sendo o ponto mais próximo ao ponto de referência, de modo que

$$\mathbf{w}^T \mathbf{x}_M = 0 \quad (2.4.17)$$

O vetor-posição do ponto M é, então, solução do seguinte sistema

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{w}} \\ \mathbf{w}^T \end{bmatrix} \mathbf{x}_M = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{w}} \mathbf{x}_O - \left(\mathbf{I} - \frac{\mathbf{w} \mathbf{w}^T}{\|\mathbf{w}\|^2} \right) \mathbf{v}_O \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.4.18)$$

Este sistema é formalmente sobredeterminado com quatro equações e três incógnitas, porém essa sobredeterminação é apenas formal, já que apenas três das quatro equações são

linearmente independentes. Podemos obter a solução deste sistema utilizando a inversa generalizada de Moore-Penrose. Para tal, vamos pré-multiplicar este sistema por $\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{w}}^T & \mathbf{w} \end{bmatrix}$

$$\|\mathbf{w}\|^2 \mathbf{x}_M = \tilde{\mathbf{w}}^T \tilde{\mathbf{w}} \mathbf{x}_0 + \tilde{\mathbf{w}} \mathbf{v}_0 \quad (2.4.19)$$

donde

$$\mathbf{x}_M = \frac{\tilde{\mathbf{w}}^T \tilde{\mathbf{w}}}{\|\mathbf{w}\|^2} \mathbf{x}_0 + \frac{\tilde{\mathbf{w}}}{\|\mathbf{w}\|^2} \mathbf{v}_0 \quad (2.4.20)$$

A partir dos últimos resultados podemos escrever o seguinte teorema:

“A posição dos pontos de um corpo rígido que possuem a menor velocidade é definida por uma linha paralela a velocidade angular espacial que passa por um ponto M cujo vetor-posição é definido na Eq. (2.4.20).”

A componente u definida na Eq. (2.4.14) é chamada de deslizamento (sliding) do parafuso instantâneo e o passo do parafuso pode ser definido como

$$p = \frac{2\pi u}{\|\mathbf{w}\|} \quad (2.4.21)$$

A velocidade de um ponto P arbitrário do corpo rígido pode ser escrita da seguinte forma

$$\mathbf{v}_P = u \frac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|} + \tilde{\mathbf{w}}(\mathbf{x}_P - \mathbf{x}_M) \quad (2.4.22)$$

o que mostra que a velocidade de um corpo rígido é composta de uma translação ao longo do eixo instantâneo de rotação e de uma rotação em torno do mesmo eixo.

5. CAMPO DE ACELERAÇÕES DE UM CORPO RÍGIDO

Por último, podemos analisar as acelerações envolvidas em um movimento geral de um corpo rígido. Para tal, como nas seções anteriores, vamos considerar o movimento de um ponto P do corpo. O vetor-aceleração do ponto P pode ser obtido através da diferenciação da Eq. (2.4.2) e é dado pela seguinte expressão

$$\ddot{\mathbf{x}}_P = \ddot{\mathbf{x}}_O + \ddot{\mathbf{R}}\mathbf{X} \quad (2.5.1)$$

Podemos ainda eliminar \mathbf{X} da equação acima utilizando a Eq. (2.4.3) obtendo:

$$\mathbf{a}_P = \mathbf{a}_O + \ddot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T(\mathbf{x}_P - \mathbf{x}_O) \quad (2.5.2)$$

O operador $\ddot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T$ pode ser escrito em termos do operador $\tilde{\mathbf{w}} = \dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T$ associado à velocidade angular espacial da seguinte forma

$$\ddot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T = \frac{d}{dt}(\dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T) - \dot{\mathbf{R}}\dot{\mathbf{R}}^T = \dot{\tilde{\mathbf{w}}} + \tilde{\mathbf{w}}\tilde{\mathbf{w}} \quad (2.5.3)$$

O primeiro termo, que é anti-simétrico, representa a variação da velocidade angular espacial. O segundo, que é simétrico, representa a aceleração centrífuga. A aceleração angular espacial $\boldsymbol{\alpha}$ pode ser definida como o vetor associado ao operador $\tilde{\boldsymbol{\alpha}} = \dot{\tilde{\mathbf{w}}}$, ou seja

$$\boldsymbol{\alpha} = \text{vect}(\tilde{\boldsymbol{\alpha}}) = \text{vect}(\dot{\tilde{\mathbf{w}}}) \quad (2.5.4)$$

De maneira que podemos reescrever a Eq. (2.5.2) na forma

$$\mathbf{a}_P = \mathbf{a}_O + (\tilde{\boldsymbol{\alpha}} + \tilde{\mathbf{w}}^2)(\mathbf{x}_P - \mathbf{x}_O) \quad (2.5.5)$$

Esta equação determina o campo de acelerações do corpo rígido. Podemos definir, como na seção anterior, a aceleração angular material que pode ser obtida através da transformação

$$\mathbf{A} = \mathbf{R}^T\boldsymbol{\alpha} \quad \text{ou} \quad \tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{R}^T\tilde{\boldsymbol{\alpha}}\mathbf{R} \quad (2.5.6)$$

6. REPRESENTAÇÕES DO OPERADOR ROTAÇÃO

A propriedade de ortogonalidade do operador rotação $\mathbf{R}^T\mathbf{R} = \mathbf{I}$ apresentada anteriormente fornece as seis equações de vínculo seguintes:

$$r_i r_j = \delta_{ij} \quad (i = 1, \dots, j; j = 1, 2, 3) \quad (2.6.1)$$

onde r_i representa uma coluna de \mathbf{R} . Desta maneira, temos nove incógnitas e seis equações e portanto, podemos concluir que são necessários três parâmetros arbitrários para determinar o operador \mathbf{R} , ou

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \quad (2.6.2)$$

onde estes três parâmetros α_1, α_2 e α_3 podem ser escolhidos de várias maneiras diferentes.

Nas próximas seções, apresentaremos várias parametrizações possíveis que permitem a representação do operador rotação \mathbf{R} .

6. 1. Representação de rotações em termos de produtos tensoriais

Podemos observar que os vetores \mathbf{t}_i componentes da base \mathbf{t} também são transformados pelo operador \mathbf{R} , como representado na Figura 2.1, de forma que:

$$\mathbf{t}_i = \mathbf{R} \mathbf{E}_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad (2.6.3)$$

portanto podemos representar o operador \mathbf{R} na seguinte forma

$$\mathbf{R} = \mathbf{t}_1 \otimes \mathbf{E}_1 + \mathbf{t}_2 \otimes \mathbf{E}_2 + \mathbf{t}_3 \otimes \mathbf{E}_3 \quad (2.6.4)$$

o que significa que o operador \mathbf{R} representado na base mista $(\mathbf{t}_i \otimes \mathbf{E}_j)$ é a própria matriz identidade, já que um vetor \mathbf{X} operado por \mathbf{R} gira solidário à base \mathbf{t} , ou seja, o vetor \mathbf{X} representado na base \mathbf{E} é igual ao vetor \mathbf{x} representado na base \mathbf{t} .

$$[\mathbf{R}]_{\mathbf{E}}^{\mathbf{t}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.6.5)$$

Para representarmos o operador \mathbf{R} nas bases $(\mathbf{E}_i \otimes \mathbf{E}_j)$ e $(\mathbf{t}_i \otimes \mathbf{t}_j)$, devemos representar os vetores componentes de uma base na outra. Deste modo, vamos escrever \mathbf{t}_i na base \mathbf{E}_i

$$\mathbf{t}_i = (\mathbf{t}_i \cdot \mathbf{E}_1)\mathbf{E}_1 + (\mathbf{t}_i \cdot \mathbf{E}_2)\mathbf{E}_2 + (\mathbf{t}_i \cdot \mathbf{E}_3)\mathbf{E}_3 \quad (i = 1,2,3) \quad (2.6.6)$$

substituindo esta expressão na Eq. (2.6.4) obtemos a representação do operador \mathbf{R} na base $\mathbf{E}_i \otimes \mathbf{E}_j$, em função dos cossenos diretores

$$\begin{aligned} \mathbf{R} = & (\mathbf{t}_1 \cdot \mathbf{E}_1)\mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{E}_1 + (\mathbf{t}_1 \cdot \mathbf{E}_2)\mathbf{E}_2 \otimes \mathbf{E}_1 + (\mathbf{t}_1 \cdot \mathbf{E}_3)\mathbf{E}_3 \otimes \mathbf{E}_1 + \\ & + (\mathbf{t}_2 \cdot \mathbf{E}_1)\mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{E}_2 + (\mathbf{t}_2 \cdot \mathbf{E}_2)\mathbf{E}_2 \otimes \mathbf{E}_2 + (\mathbf{t}_2 \cdot \mathbf{E}_3)\mathbf{E}_3 \otimes \mathbf{E}_2 + \\ & + (\mathbf{t}_3 \cdot \mathbf{E}_1)\mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{E}_3 + (\mathbf{t}_3 \cdot \mathbf{E}_2)\mathbf{E}_2 \otimes \mathbf{E}_3 + (\mathbf{t}_3 \cdot \mathbf{E}_3)\mathbf{E}_3 \otimes \mathbf{E}_3 \end{aligned} \quad (2.6.7)$$

ou, na forma matricial,

$$[\mathbf{R}]_{\mathbf{E}}^{\mathbf{E}} = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_1 \cdot \mathbf{E}_1 & \mathbf{t}_2 \cdot \mathbf{E}_1 & \mathbf{t}_3 \cdot \mathbf{E}_1 \\ \mathbf{t}_1 \cdot \mathbf{E}_2 & \mathbf{t}_2 \cdot \mathbf{E}_2 & \mathbf{t}_3 \cdot \mathbf{E}_2 \\ \mathbf{t}_1 \cdot \mathbf{E}_3 & \mathbf{t}_2 \cdot \mathbf{E}_3 & \mathbf{t}_3 \cdot \mathbf{E}_3 \end{bmatrix} \quad (2.6.8)$$

Analogamente, podemos escrever \mathbf{E}_i na base \mathbf{t}_i

$$\mathbf{E}_i = (\mathbf{E}_i \cdot \mathbf{t}_1)\mathbf{t}_1 + (\mathbf{E}_i \cdot \mathbf{t}_2)\mathbf{t}_2 + (\mathbf{E}_i \cdot \mathbf{t}_3)\mathbf{t}_3 \quad (i = 1,2,3) \quad (2.6.9)$$

substituindo esta expressão na Eq. (2.6.4) obtemos a representação do operador \mathbf{R} na base $\mathbf{t}_i \otimes \mathbf{t}_j$, em função dos cossenos diretores

$$\begin{aligned} \mathbf{R} = & (\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{t}_1)\mathbf{t}_1 \otimes \mathbf{t}_1 + (\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{t}_2)\mathbf{t}_1 \otimes \mathbf{t}_2 + (\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{t}_3)\mathbf{t}_1 \otimes \mathbf{t}_3 + \\ & + (\mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{t}_1)\mathbf{t}_2 \otimes \mathbf{t}_1 + (\mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{t}_2)\mathbf{t}_2 \otimes \mathbf{t}_2 + (\mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{t}_3)\mathbf{t}_2 \otimes \mathbf{t}_3 + \\ & + (\mathbf{E}_3 \cdot \mathbf{t}_1)\mathbf{t}_3 \otimes \mathbf{t}_1 + (\mathbf{E}_3 \cdot \mathbf{t}_2)\mathbf{t}_3 \otimes \mathbf{t}_2 + (\mathbf{E}_3 \cdot \mathbf{t}_3)\mathbf{t}_3 \otimes \mathbf{t}_3 \end{aligned} \quad (2.6.10)$$

ou, na forma matricial,

$$[\mathbf{R}]_{\mathbf{t}}^{\mathbf{t}} = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_1 \cdot \mathbf{E}_1 & \mathbf{t}_2 \cdot \mathbf{E}_1 & \mathbf{t}_3 \cdot \mathbf{E}_1 \\ \mathbf{t}_1 \cdot \mathbf{E}_2 & \mathbf{t}_2 \cdot \mathbf{E}_2 & \mathbf{t}_3 \cdot \mathbf{E}_2 \\ \mathbf{t}_1 \cdot \mathbf{E}_3 & \mathbf{t}_2 \cdot \mathbf{E}_3 & \mathbf{t}_3 \cdot \mathbf{E}_3 \end{bmatrix} \quad (2.6.11)$$

De modo que podemos observar que as representações de \mathbf{R} nas bases $(\mathbf{E}_i \otimes \mathbf{E}_j)$ e $(\mathbf{t}_i \otimes \mathbf{t}_j)$ são iguais

$$[\mathbf{R}]_E^E = [\mathbf{R}]_t^t \quad (2.6.12)$$

6. 2. Representação de rotações em termos de seus invariantes

Como já foi apresentado anteriormente, qualquer rotação \mathbf{R} pode ser representada por uma rotação plana, de ângulo ϕ , em torno de um eixo \mathbf{n} . Nesta seção, apresentaremos os passos para representar o operador rotação \mathbf{R} em termos destes dois invariantes \mathbf{n} e ϕ .

Podemos decompor os vetores \mathbf{X} e $\mathbf{x} = \mathbf{R}\mathbf{X}$ em suas partes paralelas e ortogonais ao eixo de rotação \mathbf{n} .

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= \mathbf{n}\mathbf{n}^T \mathbf{X} + (\mathbf{I} - \mathbf{n}\mathbf{n}^T) \mathbf{X} \\ \mathbf{x} &= \mathbf{n}\mathbf{n}^T \mathbf{x} + (\mathbf{I} - \mathbf{n}\mathbf{n}^T) \mathbf{x} \end{aligned} \quad (2.6.13)$$

observando que

$$\mathbf{n}\mathbf{n}^T \mathbf{R} = \mathbf{n}\mathbf{n}^T \quad (2.6.14)$$

e definindo as partes ortogonais de \mathbf{X} e \mathbf{x} como \mathbf{Y} e \mathbf{y}

$$\begin{aligned} \mathbf{Y} &= (\mathbf{I} - \mathbf{n}\mathbf{n}^T) \mathbf{X} \\ \mathbf{y} &= (\mathbf{I} - \mathbf{n}\mathbf{n}^T) \mathbf{x} = (\mathbf{I} - \mathbf{n}\mathbf{n}^T) \mathbf{R}\mathbf{X} \end{aligned} \quad (2.6.15)$$

Podemos reescrever a Eq. (2.6.13) na seguinte forma

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= \mathbf{n}\mathbf{n}^T \mathbf{X} + \mathbf{Y} \\ \mathbf{x} &= \mathbf{n}\mathbf{n}^T \mathbf{X} + \mathbf{y} \end{aligned} \quad (2.6.16)$$

Sabemos que, na transformação operada por \mathbf{R} , a parte ortogonal de \mathbf{x} apresenta uma rotação plana no plano ortogonal a \mathbf{n} e, consequentemente,

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{Y}}\mathbf{y} &= \|\mathbf{Y}\|^2 \mathbf{n} \sin \phi \\ \mathbf{Y}^T \mathbf{y} &= \|\mathbf{Y}\|^2 \cos \phi\end{aligned}\quad (2.6.17)$$

reescrevendo o sistema em forma matricial, obtemos

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{Y}} \\ \mathbf{Y}^T \end{bmatrix} \mathbf{y} = \|\mathbf{Y}\|^2 \begin{bmatrix} \mathbf{n} \sin \phi \\ \cos \phi \end{bmatrix} \quad (2.6.18)$$

Este sistema é formalmente sobredeterminado com quatro equações e três incógnitas. Porém, sua sobredeterminação é apenas formal, pois o operador $\tilde{\mathbf{Y}}$ não é inversível, já que $\tilde{\mathbf{Y}}\mathbf{Y} = 0$. Portanto, apenas três das quatro equações são linearmente independentes. Para resolver este sistema, vamos pré-multiplicar o sistema acima pela inversa generalizada de Moore-Penrose (Campbell e Meyer 1979) do primeiro termo $\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{Y}}^T & \mathbf{Y} \end{bmatrix}$

$$\left(\tilde{\mathbf{Y}}^T \tilde{\mathbf{Y}} + \mathbf{Y} \mathbf{Y}^T \right) \mathbf{y} = \|\mathbf{Y}\|^2 \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{Y}}^T & \mathbf{Y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{n} \sin \phi \\ \cos \phi \end{bmatrix} \quad (2.6.19)$$

onde, a seguinte expressão é verdadeira para qualquer \mathbf{Y}

$$\tilde{\mathbf{Y}}^T \tilde{\mathbf{Y}} + \mathbf{Y} \mathbf{Y}^T = \|\mathbf{Y}\|^2 \mathbf{I} \quad (2.6.20)$$

Desta forma, podemos escrever

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{Y}}^T & \mathbf{Y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{n} \sin \phi \\ \cos \phi \end{bmatrix} \quad (2.6.21)$$

ou

$$\mathbf{y} = (\tilde{\mathbf{n}} \sin \phi + \mathbf{I} \cos \phi) \mathbf{Y} \quad (2.6.22)$$

Da Eq. (2.6.15), podemos eliminar \mathbf{Y} e \mathbf{y} , obtendo

$$\mathbf{x} = [\mathbf{I} \cos \phi + (1 - \cos \phi) \mathbf{nn}^T + \tilde{\mathbf{n}} \sin \phi] \mathbf{X} \quad (2.6.23)$$

resultado que nos fornece a forma do operador rotação \mathbf{R} , em função de \mathbf{n} e ϕ

$$\boxed{\mathbf{R} = \mathbf{I} \cos \phi + (1 - \cos \phi) \mathbf{nn}^T + \tilde{\mathbf{n}} \sin \phi} \quad (2.6.24)$$

donde podemos observar que o operador \mathbf{R} possui os seguintes invariantes lineares, que serão bastante úteis para obter os parâmetros a partir de uma dada matriz de rotação

$$\begin{aligned} \text{tr}(\mathbf{R}) = 1 + 2 \cos \phi &\Rightarrow \phi = \cos^{-1} \left[\frac{\text{tr}(\mathbf{R}) - 1}{2} \right] \\ \text{vect}(\mathbf{R}) = \mathbf{n} \sin \phi &\Rightarrow \mathbf{n} = \frac{\text{vect}(\mathbf{R})}{\sin \phi} \end{aligned} \quad (2.6.25)$$

Se reescrevermos a transformação através da relação

$$\mathbf{x} = \mathbf{R} \mathbf{X} \quad (2.6.26)$$

e derivarmos a relação em termos do ângulo de rotação ϕ , obtemos

$$\frac{d\mathbf{x}}{d\phi} = \frac{d\mathbf{R}}{d\phi} \mathbf{X} = \frac{d\mathbf{R}}{d\phi} \mathbf{R}^T \mathbf{x} \quad (2.6.27)$$

onde

$$\frac{d\mathbf{R}}{d\phi} = \tilde{\mathbf{n}} \cos \phi - (\mathbf{I} - \mathbf{nn}^T) \sin \phi \quad (2.6.28)$$

Podemos verificar que

$$\frac{d\mathbf{R}}{d\phi} \mathbf{R}^T = \tilde{\mathbf{n}} \quad (2.6.29)$$

Portanto, substituindo este resultado na Eq. (2.6.27) podemos verificar que \mathbf{x} satisfaz a seguinte equação

$$\frac{d\mathbf{x}}{d\phi} - \tilde{\mathbf{n}}\mathbf{x} = 0 \quad \text{onde } \mathbf{x}|_{\phi=0} = \mathbf{X} \quad (2.6.30)$$

cuja solução é

$$\mathbf{x} = \exp(\tilde{\mathbf{n}}\phi)\mathbf{X} \quad (2.6.31)$$

donde concluímos que o operador rotação \mathbf{R} pode também ser representado pelos invariantes \mathbf{n} e ϕ através da seguinte relação

$$\boxed{\mathbf{R} = \exp(\tilde{\mathbf{n}}\phi)} \quad (2.6.32)$$

Agora, podemos representar as velocidades angulares espacial \mathbf{w} e material \mathbf{W} em termos dos invariantes \mathbf{n} e ϕ e de suas derivadas $\dot{\mathbf{n}}$ e $\dot{\phi}$. Para tal, vamos relembrar as seguintes propriedades de invariância do operador rotação

$$\mathbf{R}\mathbf{n} = \mathbf{n} \quad \mathbf{R}^T\mathbf{n} = \mathbf{n} \quad (2.6.33)$$

Derivando as duas expressões acima no tempo

$$(\mathbf{R} - \mathbf{I})\dot{\mathbf{n}} = -\dot{\mathbf{R}}\mathbf{n} \quad (\mathbf{R}^T - \mathbf{I})\dot{\mathbf{n}} = -\dot{\mathbf{R}}^T\mathbf{n} \quad (2.6.34)$$

Se pré-multiplicarmos a primeira equação por \mathbf{R}^T e a segunda por \mathbf{R} , obtemos

$$(\mathbf{R}^T - \mathbf{I})\dot{\mathbf{n}} = \mathbf{R}^T\dot{\mathbf{R}}\mathbf{n} = \tilde{\mathbf{W}}\mathbf{n} \quad (\mathbf{I} - \mathbf{R})\dot{\mathbf{n}} = -\mathbf{R}\dot{\mathbf{R}}^T\mathbf{n} = \tilde{\mathbf{w}}\mathbf{n} \quad (2.6.35)$$

e, conseqüentemente,

$$(\mathbf{I} - \mathbf{R}^T)\dot{\mathbf{n}} = \tilde{\mathbf{n}}\mathbf{W} \quad (\mathbf{R} - \mathbf{I})\dot{\mathbf{n}} = \tilde{\mathbf{n}}\mathbf{w} \quad (2.6.36)$$

Porém, não podemos resolver estas equações já que os operadores $(\mathbf{I} - \mathbf{R}^T)$ e $(\mathbf{R} - \mathbf{I})$ não são inversíveis, pois

$$(\mathbf{I} - \mathbf{R}^T)\mathbf{n} = 0 \quad (\mathbf{R} - \mathbf{I})\mathbf{n} = 0 \quad (2.6.37)$$

Mas, sabemos também que o vetor \mathbf{n} é unitário, portanto, podemos obter a seguinte relação adicional

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{n}^T \mathbf{n}) = 2\mathbf{n}^T \dot{\mathbf{n}} = 0 \quad (2.6.38)$$

donde $\dot{\mathbf{n}}$ é solução dos seguintes sistemas

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} - \mathbf{R}^T \\ \mathbf{n}^T \end{bmatrix} \dot{\mathbf{n}} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{n}}\mathbf{W} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{R} - \mathbf{I} \\ \mathbf{n}^T \end{bmatrix} \dot{\mathbf{n}} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{n}}\mathbf{w} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.6.39)$$

Os sistemas acima representam um sistema formalmente sobredeterminado de quatro equações e três incógnitas. Porém, a sobredeterminação destes sistemas é apenas formal, pois as três primeiras equações não são linearmente independentes. Estes sistemas podem ser resolvidos pré-multiplicando-os pela inversa de Moore-Penrose (Campbell e Meyer 1979) do primeiro termo

$$\begin{aligned} \left[2\mathbf{I} - (\mathbf{R} + \mathbf{R}^T) + \mathbf{n}\mathbf{n}^T \right] \dot{\mathbf{n}} &= (\mathbf{I} - \mathbf{R})\tilde{\mathbf{n}}\mathbf{W} \\ \left[2\mathbf{I} - (\mathbf{R} + \mathbf{R}^T) + \mathbf{n}\mathbf{n}^T \right] \dot{\mathbf{n}} &= (\mathbf{R}^T - \mathbf{I})\tilde{\mathbf{n}}\mathbf{w} \end{aligned} \quad (2.6.40)$$

Sendo que, da expressão de \mathbf{R} , obtida na Eq. (2.6.24), podemos verificar que

$$\left[2\mathbf{I} - (\mathbf{R} + \mathbf{R}^T) + \mathbf{n}\mathbf{n}^T\right]\dot{\mathbf{n}} = 2(1 - \cos\phi)\dot{\mathbf{n}} \quad (2.6.41)$$

e

$$\begin{aligned} (\mathbf{I} - \mathbf{R})\tilde{\mathbf{n}} &= (1 - \cos\phi)\tilde{\mathbf{n}} - \sin\phi\tilde{\mathbf{n}}\tilde{\mathbf{n}} \\ (\mathbf{R}^T - \mathbf{I})\tilde{\mathbf{n}} &= -(1 - \cos\phi)\tilde{\mathbf{n}} - \sin\phi\tilde{\mathbf{n}}\tilde{\mathbf{n}} \end{aligned} \quad (2.6.42)$$

Então, obtemos as seguintes relações

$$\mathbf{B}\mathbf{W} = \dot{\mathbf{n}} \quad \mathbf{B}^T\mathbf{w} = \dot{\mathbf{n}} \quad (2.6.43)$$

onde

$$\mathbf{B} = \left[\frac{1}{2}\tilde{\mathbf{n}} + \frac{\sin\phi}{2(1 - \cos\phi)}(\mathbf{I} - \mathbf{n}\mathbf{n}^T) \right] \quad (2.6.44)$$

Porém, estes sistemas não podem ser resolvidos porque o operador \mathbf{B} não tem posto máximo. Portanto, escrevamos as seguintes relações adicionais entre as velocidades angulares \mathbf{W} e \mathbf{w} e a derivada do ângulo de rotação $\dot{\phi}$

$$\text{tr}(\dot{\mathbf{R}}) = \text{tr}(\mathbf{R}\tilde{\mathbf{W}}) = \text{tr}(\tilde{\mathbf{w}}\mathbf{R}) = \frac{d}{dt}(\text{tr}(\mathbf{R})) = -2\dot{\phi}\sin\phi \quad (2.6.45)$$

Vamos decompor o operador \mathbf{R} em suas partes simétrica e anti-simétrica

$$\mathbf{R} = \mathbf{S} + \tilde{\mathbf{a}} \quad \text{onde} \quad \mathbf{a} = \mathbf{n}\sin\phi \quad (2.6.46)$$

Podemos verificar, também, as duas seguintes propriedades válidas para quaisquer \mathbf{a} , \mathbf{u} e \mathbf{S} (simétrica)

$$\begin{aligned}\text{tr}(\mathbf{S}\tilde{\mathbf{u}}) &= \text{tr}(\tilde{\mathbf{u}}\mathbf{S}) = 0 \\ \text{tr}(\tilde{\mathbf{a}}\tilde{\mathbf{u}}) &= \text{tr}(\tilde{\mathbf{u}}\tilde{\mathbf{a}}) = -2\mathbf{a}^T\mathbf{u}\end{aligned}\quad (2.6.47)$$

donde, obtemos

$$\begin{aligned}\text{tr}(\mathbf{R}\tilde{\mathbf{W}}) &= -2\dot{\phi}\text{sen}\phi = -2\mathbf{n}^T\mathbf{W}\text{sen}\phi \\ \text{tr}(\tilde{\mathbf{w}}\mathbf{R}) &= -2\dot{\phi}\text{sen}\phi = -2\mathbf{n}^T\mathbf{w}\text{sen}\phi\end{aligned}\quad (2.6.48)$$

Agora, podemos obter os vetores \mathbf{w} e \mathbf{W} resolvendo os seguintes sistemas

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{n}^T \end{bmatrix} \mathbf{W} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{n}} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{B}^T \\ \mathbf{n}^T \end{bmatrix} \mathbf{w} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{n}} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix}\quad (2.6.49)$$

cujas soluções podem ser escritas na forma

$$\mathbf{W} = \mathbf{A}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{B}^T & \mathbf{n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{n}} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} \quad \mathbf{w} = \mathbf{A}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{n}} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix}\quad (2.6.50)$$

onde o operador $\mathbf{A} = \mathbf{B}^T\mathbf{B} + \mathbf{nn}^T$ possui como inverso

$$\mathbf{A}^{-1} = \left[2(1 - \cos\phi)(\mathbf{I} - \mathbf{nn}^T) + \mathbf{nn}^T \right] \quad (2.6.51)$$

Desta forma, obtemos as expressões de \mathbf{w} e \mathbf{W} em termos dos invariantes \mathbf{n} e ϕ e suas derivadas

$$\boxed{\begin{aligned}\mathbf{W} &= \mathbf{M}\dot{\mathbf{n}} + \mathbf{n}\dot{\phi} \\ \mathbf{w} &= \mathbf{M}^T\dot{\mathbf{n}} + \mathbf{n}\dot{\phi}\end{aligned}}\quad (2.6.52)$$

onde

$$\boxed{\mathbf{M} = \sin\phi\mathbf{I} - (1 - \cos\phi)\tilde{\mathbf{n}}} \quad (2.6.53)$$

Agora, podemos, também, obter as expressões das acelerações angulares em termos dos invariantes \mathbf{n} e ϕ e suas derivadas $\dot{\mathbf{n}}, \ddot{\mathbf{n}}, \dot{\phi}$ e $\ddot{\phi}$, derivando diretamente a Eq. (2.6.52)

$$\begin{aligned} \mathbf{A} = \dot{\mathbf{W}} &= \mathbf{M}\ddot{\mathbf{n}} + \mathbf{n}\ddot{\phi} + \dot{\mathbf{M}}\dot{\mathbf{n}} + \dot{\mathbf{n}}\dot{\phi} \\ \boldsymbol{\alpha} = \dot{\mathbf{w}} &= \mathbf{M}^T\ddot{\mathbf{n}} + \mathbf{n}\ddot{\phi} + \dot{\mathbf{M}}^T\dot{\mathbf{n}} + \dot{\mathbf{n}}\dot{\phi} \end{aligned} \quad (2.6.54)$$

onde o operador $\dot{\mathbf{M}}$ pode ser eliminado notando que

$$\dot{\tilde{\mathbf{n}}}\dot{\mathbf{n}} = 0 \quad (2.6.55)$$

portanto,

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{M}\ddot{\mathbf{n}} + \mathbf{n}\ddot{\phi} + \mathbf{N}\dot{\mathbf{n}} + \dot{\mathbf{n}}\dot{\phi} \\ \boldsymbol{\alpha} &= \mathbf{M}^T\ddot{\mathbf{n}} + \mathbf{n}\ddot{\phi} + \mathbf{N}^T\dot{\mathbf{n}} + \dot{\mathbf{n}}\dot{\phi} \end{aligned}} \quad (2.6.56)$$

onde

$$\boxed{\mathbf{N} = \dot{\phi}(\cos\phi\mathbf{I} - \sin\phi\tilde{\mathbf{n}})} \quad (2.6.57)$$

6. 3. Representação de rotações em termos do vetor rotação

A representação do operador rotação em termos dos invariantes \mathbf{n} e ϕ possui o inconveniente de ser escrita em termos de quatro parâmetros: as três componentes de \mathbf{n} e o ângulo ϕ . Portanto, é interessante apresentarmos o vetor rotação. O vetor rotação é definido como o vetor que possui a direção do eixo instantâneo de rotação e o comprimento igual a amplitude de rotação

$$\boldsymbol{\Psi} = \mathbf{n}\phi \quad (2.6.58)$$

Desta forma, podemos representar o operador \mathbf{R} em termos do vetor rotação, substituindo a Eq. (2.6.58) na Eq. (2.6.24) e utilizando a expressão (2.6.20)

$$\mathbf{R} = \mathbf{I} + \frac{\sin\|\Psi\|}{\|\Psi\|} \tilde{\Psi} + \frac{1 - \cos\|\Psi\|}{\|\Psi\|^2} \tilde{\Psi}\tilde{\Psi} \quad (2.6.59)$$

ou na forma exponencial substituindo a Eq. (2.6.58) na Eq. (2.6.32)

$$\mathbf{R} = \exp(\tilde{\Psi}) \quad (2.6.60)$$

O vetor rotação pode ser obtido a partir do operador rotação, calculando-se o traço e o vetor associado de \mathbf{R}

$$\begin{aligned} \text{tr}(\mathbf{R}) = 1 + 2 \cos\|\Psi\| &\Rightarrow \|\Psi\| = \cos^{-1} \frac{\text{tr}(\mathbf{R}) - 1}{2} \\ \text{vect}(\mathbf{R}) = \frac{1}{\|\Psi\|} \Psi \sin\|\Psi\| &\Rightarrow \Psi = \frac{\|\Psi\|}{\sin\|\Psi\|} \text{vect}(\mathbf{R}) \end{aligned} \quad (2.6.61)$$

Para obtermos as expressões de velocidade angular em termos do vetor rotação e de sua derivada temporal, é interessante notar as seguintes relações

$$\dot{\Psi} = \dot{\mathbf{n}}\phi + \mathbf{n}\dot{\phi} \quad \text{e} \quad \mathbf{n}^T \dot{\mathbf{n}} = 0 \quad (2.6.62)$$

Invertendo o sistema acima, obtemos

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= \mathbf{n}^T \dot{\Psi} = \frac{1}{\|\Psi\|} \Psi^T \dot{\Psi} \\ \dot{\mathbf{n}} &= (\mathbf{I} - \mathbf{n}\mathbf{n}^T) \frac{\dot{\Psi}}{\phi} = -\frac{\tilde{\Psi}\tilde{\Psi}}{\|\Psi\|^3} \dot{\Psi} \end{aligned} \quad (2.6.63)$$

Substituindo estes resultados na Eq. (2.6.52) podemos escrever as velocidades angulares na forma

$$\mathbf{W} = \mathbf{T}(\Psi)\dot{\Psi} \quad \mathbf{w} = \mathbf{T}^T(\Psi)\dot{\Psi} \quad (2.6.64)$$

onde o operador \mathbf{T} é

$$\mathbf{T}(\Psi) = \mathbf{I} + \left(\frac{\cos\|\Psi\| - 1}{\|\Psi\|^2} \right) \tilde{\Psi} + \left(1 - \frac{\sin\|\Psi\|}{\|\Psi\|} \right) \frac{\tilde{\Psi}\tilde{\Psi}}{\|\Psi\|^2} \quad (2.6.65)$$

A aparente singularidade em $\|\Psi\| = 0$ que aparece nas expressões (2.6.59) e (2.6.65) dos operadores \mathbf{R} e \mathbf{T} é facilmente eliminada notando que

$$\lim_{\|\Psi\| \rightarrow 0} \mathbf{T}(\Psi) = \lim_{\|\Psi\| \rightarrow 0} \mathbf{R}(\Psi) = \mathbf{I} \quad (2.6.66)$$

As acelerações angulares podem ser obtidas derivando as Eqs. (2.6.64)

$$\mathbf{A} = \mathbf{T}(\Psi)\ddot{\Psi} + \dot{\mathbf{T}}(\Psi)\dot{\Psi} \quad \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{T}^T(\Psi)\ddot{\Psi} + \dot{\mathbf{T}}^T(\Psi)\dot{\Psi} \quad (2.6.67)$$

6. 4. Forma de Cayley de uma matriz ortogonal - Parâmetros de Rodrigues

Se reiniciarmos da transformação descrita através da relação

$$\mathbf{x} = \mathbf{R}\mathbf{X} \quad \text{onde} \quad \mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{I} \quad (2.6.68)$$

sendo que sabemos que esta transformação preserva o comprimento do vetor inicial. Podemos expressar este fato da seguinte forma

$$\mathbf{x}^T \mathbf{x} - \mathbf{X}^T \mathbf{X} = (\mathbf{x} + \mathbf{X})^T (\mathbf{x} - \mathbf{X}) = 0 \quad (2.6.69)$$

Podemos introduzir dois vetores \mathbf{f} e \mathbf{g} definidos por

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= \mathbf{x} - \mathbf{X} = (\mathbf{R} - \mathbf{I})\mathbf{X} \\ \mathbf{g} &= \mathbf{x} + \mathbf{X} = (\mathbf{R} + \mathbf{I})\mathbf{X} \end{aligned} \quad (2.6.70)$$

substituindo \mathbf{f} e \mathbf{g} na Eq. (2.6.69)

$$\mathbf{g}^T \mathbf{f} = 0 \quad (2.6.71)$$

Utilizando a Eq. (2.6.70) obtemos a seguinte relação entre \mathbf{f} e \mathbf{g}

$$\mathbf{f} = (\mathbf{R} - \mathbf{I})(\mathbf{R} + \mathbf{I})^{-1} \mathbf{g} = \mathbf{B} \mathbf{g} \quad (2.6.72)$$

donde obtemos o seguinte resultado

$$\mathbf{g}^T \mathbf{B} \mathbf{g} = 0 \quad (2.6.73)$$

Através da última expressão, deduzimos que o operador \mathbf{B} é, necessariamente, anti-simétrico. Existe um isomorfismo entre uma matriz anti-simétrica e um vetor, tal que, dada uma base qualquer, as componentes da matriz e do vetor são relacionadas. Portanto, podemos definir o vetor \mathbf{b} , cujas componentes em uma base qualquer são $[b_1 \ b_2 \ b_3]$, tal que a isometria entre a matriz anti-simétrica \mathbf{B} e o vetor \mathbf{b} nos permite escrever a seguinte relação

$$[\mathbf{B}] = [\tilde{\mathbf{b}}] = \begin{bmatrix} 0 & -b_3 & b_2 \\ b_3 & 0 & -b_1 \\ -b_2 & b_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.6.74)$$

Podemos inverter a relação entre \mathbf{B} e \mathbf{R} definida na Eq. (2.6.72), obtendo a seguinte expressão de \mathbf{R}

$$\mathbf{R} = (\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{b}})^{-1} (\mathbf{I} + \tilde{\mathbf{b}}) \quad (2.6.75)$$

Esta última expressão corresponde a uma escolha de três parâmetros para descrever o operador rotação. Porém, é conveniente expandirmos o primeiro termo da multiplicação da última equação. Para tal, consideremos a seguinte identidade

$$(\alpha \mathbf{I} + \beta \mathbf{h} \otimes \mathbf{h} + \gamma \tilde{\mathbf{h}})^{-1} = (\alpha_1 \mathbf{I} + \beta_1 \mathbf{h} \otimes \mathbf{h} + \gamma_1 \tilde{\mathbf{h}}) \quad (2.6.76)$$

onde

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \frac{\alpha}{\gamma^2 \|\mathbf{h}\|^2 + \alpha^2} \\ \beta_1 &= \frac{(\gamma^2 - \alpha\beta)}{(\gamma^2 \|\mathbf{h}\|^2 + \alpha^2)(\alpha + \beta \|\mathbf{h}\|^2)} \\ \gamma_1 &= \frac{-\gamma}{\gamma^2 \|\mathbf{h}\|^2 + \alpha^2}\end{aligned}\tag{2.6.77}$$

Baseados nesta igualdade, podemos calcular o operador

$$(\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{b}})^{-1} = \frac{1}{1 + \|\mathbf{b}\|^2} [\mathbf{I} + \mathbf{b} \otimes \mathbf{b} + \tilde{\mathbf{b}}]\tag{2.6.78}$$

Substituindo o último resultado na Eq. (2.6.75), obtemos a forma algébrica geral do operador rotação

$$\boxed{\mathbf{R} = \mathbf{I} + \frac{2}{1 + \|\mathbf{b}\|^2} (\tilde{\mathbf{b}} + \tilde{\mathbf{b}}\tilde{\mathbf{b}})}\tag{2.6.79}$$

em termos de três parâmetros $[b_1 \ b_2 \ b_3]$.

Comparando a Eq. (2.6.24) com a última equação, podemos deduzir a seguinte relação

$$\mathbf{n} \sin \phi = \frac{2\mathbf{b}}{1 + \|\mathbf{b}\|^2}\tag{2.6.80}$$

e, portanto,

$$\boxed{\mathbf{b} = \mathbf{n} \tan \frac{\phi}{2}}\tag{2.6.81}$$

O conjunto de três parâmetros b_i definidos acima são, normalmente, chamados de *parâmetros de Rodrigues*.

Os parâmetros de Rodrigues oferecem a vantagem de representar a rotação através de uma expressão simples em função de apenas três parâmetros. Eles podem ser obtidos a partir do operador \mathbf{R} , calculando o traço e o vetor associado de \mathbf{R}

$$\text{tr}(\mathbf{R}) = \frac{3 - \|\mathbf{b}\|^2}{1 + \|\mathbf{b}\|^2} \Rightarrow \|\mathbf{b}\|^2 = \frac{3 - \text{tr}(\mathbf{R})}{1 + \text{tr}(\mathbf{R})} \quad (2.6.82)$$

e

$$\text{vect}(\mathbf{R}) = \frac{2\mathbf{b}}{1 + \|\mathbf{b}\|^2} \Rightarrow \mathbf{b} = \frac{1}{2}(1 + \|\mathbf{b}\|^2)\text{vect}(\mathbf{R}) \quad (2.6.83)$$

Este procedimento de inversão apresenta uma singularidade quando $\phi = \pm\pi$.

Para obtermos as expressões das velocidades angulares em termos dos parâmetros de Rodrigues e suas derivadas, podemos derivar a Eq. (2.6.81)

$$\dot{\mathbf{b}} = \dot{\mathbf{n}} \tan \frac{\phi}{2} + \mathbf{n} \frac{\dot{\phi}}{2} \frac{1}{\cos^2 \frac{\phi}{2}} \quad (2.6.84)$$

Pré-multiplicando a última equação por \mathbf{n}^T , obtemos a expressão

$$\dot{\phi} = 2 \cos^2 \frac{\phi}{2} \mathbf{n}^T \dot{\mathbf{b}} \quad (2.6.85)$$

e, substituindo esta expressão na anterior, obtemos

$$\dot{\mathbf{n}} = \frac{1}{\tan \frac{\phi}{2}} (\mathbf{I} - \mathbf{n}\mathbf{n}^T) \dot{\mathbf{b}} \quad (2.6.86)$$

Substituindo os últimos resultados na Eq. (2.6.52), obtemos as expressões das velocidades angulares

$$\boxed{\mathbf{W} = \mathbf{T}(\mathbf{b})\dot{\mathbf{b}} \quad \mathbf{w} = \mathbf{T}^T(\mathbf{b})\dot{\mathbf{b}}} \quad (2.6.87)$$

onde o operador \mathbf{T} é

$$\boxed{\mathbf{T}(\mathbf{b}) = \frac{2}{1 + \|\mathbf{b}\|^2} (\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{b}})} \quad (2.6.88)$$

As acelerações angulares podem ser obtidas através do mesmo procedimento utilizado na seção anterior.

6. 5. Representação de rotações em termos dos parâmetros de Euler

A representação do operador rotação em termos dos parâmetros de Euler pode ser obtida diretamente da representação em termos dos invariantes \mathbf{n} e ϕ . Eles aparecem através da seguinte mudança de variáveis

$$\boxed{\mathbf{e}_0 = \cos \frac{\phi}{2} \quad \mathbf{e} = \mathbf{n} \sin \frac{\phi}{2}} \quad (2.6.89)$$

onde

$$-1 \leq e_i \leq 1 \quad i = (0 \dots 3) \quad (2.6.90)$$

Os parâmetros e_i não são quantidades independentes já que são relacionados pela seguinte restrição

$$e_0^2 + e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 1 \quad (2.6.91)$$

Podemos, também, observar que os parâmetros de Euler são relacionados com os parâmetros de Rodrigues da seguinte forma

$$\mathbf{b} = \frac{1}{e_0} \mathbf{e} \quad (2.6.92)$$

A partir desta última relação e da Eq. (2.6.79) , podemos, facilmente, escrever o operador rotação em termos dos parâmetros de Euler

$$\boxed{\mathbf{R} = \mathbf{I} + 2e_0\tilde{\mathbf{e}} + 2\tilde{\mathbf{e}}\tilde{\mathbf{e}}} \quad (2.6.93)$$

O operador rotação \mathbf{R} também pode ser expresso como produto de dois operadores 4×3 que são escritos em termos dos parâmetros de Euler na seguinte forma

$$\boxed{\mathbf{R} = \mathbf{H}\mathbf{G}^T} \quad (2.6.94)$$

onde

$$\mathbf{H} = [-\mathbf{e} \quad e_0\mathbf{I} + \tilde{\mathbf{e}}] \quad \mathbf{G} = [-\mathbf{e} \quad e_0\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{e}}] \quad (2.6.95)$$

A desvantagem dos parâmetros de Euler é representar a rotação através de quatro parâmetros dependentes, mas esta representação não apresenta nenhuma singularidade. Eles podem ser obtidos a partir da operador \mathbf{R} , calculando o traço e o vetor associado de \mathbf{R}

$$\begin{aligned} \text{tr}(\mathbf{R}) = 4e_0^2 - 1 &\Rightarrow e_0 = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\text{tr}(\mathbf{R}) + 1} \\ \text{vect}(\mathbf{R}) = 2e_0\mathbf{e} &\Rightarrow \mathbf{e} = \frac{\text{vect}(\mathbf{R})}{2e_0}, e_0 \neq 0 \end{aligned} \quad (2.6.96)$$

Porém, este procedimento não apenas só é útil quando e_0 não é nulo, i.e., quando $\phi \neq \pm\pi$, mas é numericamente ineficiente quando e_0 se aproxima de zero. Portanto, apresentaremos uma fórmula (Spurrier 1978) que permite a inversão com máximas precisão e eficiência.

O primeiro passo é construir uma matriz simétrica \mathbf{S} a partir dos elementos da matriz \mathbf{R} , tal que

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 + r_{11} + r_{22} + r_{33} & r_{32} - r_{23} & r_{13} - r_{31} & r_{21} - r_{12} \\ r_{32} - r_{23} & 1 + r_{11} - r_{22} - r_{33} & r_{12} + r_{21} & r_{13} + r_{31} \\ r_{13} - r_{31} & r_{21} + r_{12} & 1 - r_{11} + r_{22} - r_{33} & r_{23} + r_{32} \\ r_{21} - r_{12} & r_{13} + r_{31} & r_{23} + r_{32} & 1 - r_{11} - r_{22} + r_{33} \end{bmatrix} \quad (2.6.97)$$

sendo que, substituindo os elementos de \mathbf{R} , podemos observar facilmente que

$$\mathbf{S} = 4 \begin{bmatrix} \mathbf{e}_0^2 & \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_0 & \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_0 & \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_0 \\ \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_1^2 & \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_2^2 & \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_3^2 \end{bmatrix} \quad (2.6.98)$$

Portanto, podemos usar o maior elemento da diagonal para calcular os parâmetros

$$\mathbf{S}_{ii} = \max_k \{\mathbf{S}_{kk}\} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{e}_i = \frac{1}{2} \sqrt{\mathbf{S}_{ii}} \\ \mathbf{e}_k = \frac{\mathbf{S}_{ik}}{4\mathbf{e}_i} \quad k = 0 \dots 3 \quad (k \neq i) \end{cases} \quad (2.6.99)$$

Para obtermos as expressões das velocidades angulares em termos dos parâmetros de Euler e suas derivadas, vamos derivar a Eq. (2.6.89) com respeito ao tempo. Obtemos o seguinte sistema de equações

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{e}}_0 = -\frac{1}{2} \dot{\phi} \sin \frac{\phi}{2} \\ \dot{\mathbf{e}} = \dot{\mathbf{n}} \sin \frac{\phi}{2} + \frac{1}{2} \mathbf{n} \dot{\phi} \cos \frac{\phi}{2} \end{cases} \quad (2.6.100)$$

o qual pode ser invertido na forma

$$\begin{cases} \dot{\phi} = -\frac{2}{\sin \frac{\phi}{2}} \dot{\mathbf{e}}_0 \\ \dot{\mathbf{n}} = \frac{1}{\sin^2 \frac{\phi}{2}} \left[\dot{\mathbf{e}} \sin \frac{\phi}{2} + \dot{\mathbf{e}}_0 \mathbf{n} \cos \frac{\phi}{2} \right] \end{cases} \quad (2.6.101)$$

Substituindo a equação acima na Eq. (2.6.52) e nomeando $\mathbf{p}^T = [\mathbf{e}_0 \quad \mathbf{e}^T]$, o vetor dos parâmetros de Euler, obtemos

$$\boxed{\mathbf{W} = 2\mathbf{G}(\mathbf{p})\dot{\mathbf{p}} \quad \mathbf{w} = 2\mathbf{H}(\mathbf{p})\dot{\mathbf{p}}} \quad (2.6.102)$$

onde os operadores **H** e **G** foram introduzidos na Eq. (2.6.95) .

As acelerações angulares podem ser obtidas através da diferenciação das expressões das velocidades angulares.

6. 6. Álgebra de quatrnios

A álgebra de quatrnios (Hamilton 1899, Wehage 1984) fornece uma maneira muito elegante de descrever rotações finitas. Ela conduz ao mesmo conceito dos parâmetros de Euler mas, de maneira completamente diferente. A regra fundamental de multiplicação de quatrnios fornece uma maneira eficiente de expressar a velocidade angular e, também, de combinar rotações sucessivas.

Definição e propriedades:

Um quatrnio é definido como um número complexo quadri-dimensional

$$\hat{\mathbf{q}} = q_0 + iq_1 + jq_2 + kq_3 \quad (2.6.103)$$

onde i,j e k são símbolos tais que

$$\begin{aligned} i^2 &= j^2 = k^2 = -1 \\ jk &= -kj = i \\ ki &= -ik = j \\ ij &= -ji = k \end{aligned} \quad (2.6.104)$$

Podemos adotar também a notação vetorial

$$\hat{\mathbf{q}} = q_0 + \mathbf{q} \quad (2.6.105)$$

onde q_0 é a parte escalar e \mathbf{q} é a parte vetorial do quatrnio.

A regra de multiplicação de quatrnios é derivada da propriedade (2.6.104) dos símbolos

$$\hat{\mathbf{r}} = \hat{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{q}} = p_0q_0 - \mathbf{p}^T\mathbf{q} + p_0\mathbf{q} + q_0\mathbf{p} + \tilde{\mathbf{p}}\mathbf{q} \quad (2.6.106)$$

É importante ressaltar que a regra de multiplicação não é comutativa devido a presença do produto vetorial no último termo cujo sinal é invertido ao se inverter a ordem de $\hat{\mathbf{p}}$ e $\hat{\mathbf{q}}$.

O quaternio conjugado é definido como

$$\hat{\mathbf{q}}^* = q_0 - iq_1 - jq_2 - kq_3 = q_0 - \mathbf{q} \quad (2.6.107)$$

A norma de um quaternio é definida como

$$\|\hat{\mathbf{q}}\|^2 = \hat{\mathbf{q}}\hat{\mathbf{q}}^* = q_0^2 + \mathbf{q}^T \mathbf{q} \quad (2.6.108)$$

Um quaternio é definido como unitário quando

$$\|\hat{\mathbf{q}}\| = 1 \quad (2.6.109)$$

Um quaternio vetorial é definido como um quaternio cuja parte escalar é nula

$$\hat{\mathbf{q}} = 0 + \mathbf{q} \quad (2.6.110)$$

e que, consequentemente, verifica a seguinte propriedade

$$\hat{\mathbf{q}} + \hat{\mathbf{q}}^* = 0 \quad (2.6.111)$$

Representação de rotações em termos de quaternios

Sejam $\hat{\mathbf{q}}$ e $\hat{\mathbf{X}}$ quaternios unitário e vetorial, respectivamente

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{q}} &= q_0 + \mathbf{q} \quad \text{onde } \|\hat{\mathbf{q}}\| = 1 \\ \hat{\mathbf{X}} &= 0 + \mathbf{X} \end{aligned} \quad (2.6.112)$$

podemos verificar que a rotação de um vetor \mathbf{X} é dada por

$$\boxed{\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{q}}\hat{\mathbf{X}}\hat{\mathbf{q}}^*} \quad (2.6.113)$$

A prova é obtida verificando que

1. a norma de \hat{X} é preservada na transformação:

$$\begin{aligned}\|\hat{x}\|^2 &= \hat{x}\hat{x}^* = (\hat{q}\hat{X}\hat{q}^*)(\hat{q}\hat{X}\hat{q}^*)^* \\ &= \hat{q}\hat{X}\hat{q}^*\hat{q}\hat{X}^*\hat{q}^* = \hat{q}\|\hat{X}\|^2\hat{q}^* \\ &= \|\hat{X}\|^2\end{aligned}\tag{2.6.114}$$

2. o quaternio resultante \hat{x} é também um quaternio vetorial:

$$\begin{aligned}\hat{x} + \hat{x}^* &= (\hat{q}\hat{X}\hat{q}^*) + (\hat{q}\hat{X}\hat{q}^*)^* = \hat{q}\hat{X}\hat{q}^* + \hat{q}\hat{X}^*\hat{q}^* \\ &= \hat{q}(\hat{X} + \hat{X}^*)\hat{q}^* = 0\end{aligned}\tag{2.6.115}$$

A operação de rotação inversa pode ser escrita na seguinte forma

$$\hat{X} = \hat{q}^* \hat{x} \hat{q}\tag{2.6.116}$$

indicando que a transposição inverte o sentido da rotação.

Podemos notar a equivalência dos quaternios com os parâmetros de Euler colocando o quaternio unitário na forma

$$\hat{q} = \cos \frac{\phi}{2} + \mathbf{n} \sin \frac{\phi}{2} \quad \text{onde } \|\mathbf{n}\| = 1\tag{2.6.117}$$

Utilizando a Eq. (2.6.113) e a regra de multiplicação de quaternios, obtemos

$$\hat{x} = 0 + (\mathbf{I} \cos \phi + (1 - \cos \phi) \mathbf{n} \mathbf{n}^T + \tilde{\mathbf{n}} \sin \phi) \mathbf{X}\tag{2.6.118}$$

Esta transformação é a anteriormente apresentada na Eq. (2.6.24)

Consideremos, agora, duas rotações sucessivas \hat{q}_1 e \hat{q}_2

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{X}}_1 &= \hat{\mathbf{q}}_1 \hat{\mathbf{X}} \hat{\mathbf{q}}_1^* \\ \hat{\mathbf{X}}_2 &= \hat{\mathbf{q}}_2 \hat{\mathbf{X}}_1 \hat{\mathbf{q}}_2^* = (\hat{\mathbf{q}}_2 \hat{\mathbf{q}}_1) \hat{\mathbf{X}} (\hat{\mathbf{q}}_2 \hat{\mathbf{q}}_1)^*\end{aligned}\quad (2.6.119)$$

elas originam a seguinte rotação resultante

$$\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{q}} \hat{\mathbf{X}} \hat{\mathbf{q}}^* \quad \text{onde } \hat{\mathbf{q}} = \hat{\mathbf{q}}_2 \hat{\mathbf{q}}_1 \quad (2.6.120)$$

Este resultado nos permite afirmar o seguinte:

Duas rotações sucessivas podem ser combinadas multiplicando-se os quaternios correspondentes na ordem apropriada.

Para obtermos as expressões das velocidades angulares em termos de quaternios, vamos derivar a Eq. (2.6.113) com respeito ao tempo no referencial inercial ($\dot{\mathbf{X}} = 0$)

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \dot{\hat{\mathbf{q}}} \hat{\mathbf{X}} \hat{\mathbf{q}}^* + \hat{\mathbf{q}} \hat{\mathbf{X}} \dot{\hat{\mathbf{q}}}^* \quad (2.6.121)$$

Substituindo a Eq. (2.6.116) na equação acima e utilizando (2.6.109), obtemos

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \dot{\hat{\mathbf{q}}} \hat{\mathbf{q}}^* \hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{x}} \hat{\mathbf{q}} \dot{\hat{\mathbf{q}}}^* \quad (2.6.122)$$

Se derivarmos a Eq. (2.6.109) no tempo, obtemos a importante relação

$$\dot{\hat{\mathbf{q}}} \hat{\mathbf{q}}^* + \hat{\mathbf{q}} \dot{\hat{\mathbf{q}}}^* = \dot{\hat{\mathbf{q}}} \hat{\mathbf{q}}^* + (\dot{\hat{\mathbf{q}}} \hat{\mathbf{q}}^*)^* = 0 \quad (2.6.123)$$

que mostra que o quaternio $\dot{\hat{\mathbf{q}}} \hat{\mathbf{q}}^*$ é um quaternio vetorial e pode ser escrito na seguinte forma

$$\dot{\hat{\mathbf{q}}} \hat{\mathbf{q}}^* = \frac{1}{2} \hat{\mathbf{w}} = 0 + \frac{1}{2} \mathbf{w} \quad (2.6.124)$$

Substituindo esta relação na Eq. (2.6.122) obtemos

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \frac{1}{2}(\hat{\mathbf{w}}\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{w}}) = 0 + \frac{1}{2}(\tilde{\mathbf{w}}\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}\mathbf{w}) \quad (2.6.125)$$

e, consequentemente,

$$\dot{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{w}}\mathbf{x} \quad (2.6.126)$$

mostrando que a parte vetorial de $\hat{\mathbf{w}}$ é a velocidade angular espacial cuja expressão pode ser desenvolvida a partir de (2.6.124)

$$\boxed{\mathbf{w} = 2(\mathbf{q}_0\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_0\mathbf{q} + \tilde{\mathbf{q}}\dot{\mathbf{q}})} \quad (2.6.127)$$

Podemos, também, obter a expressão da velocidade angular material, utilizando a Eq. (2.6.122)

$$\dot{\hat{\mathbf{X}}} = \hat{\mathbf{q}}^* \dot{\hat{\mathbf{X}}} \hat{\mathbf{q}} = \hat{\mathbf{q}}^* \dot{\hat{\mathbf{q}}} \hat{\mathbf{X}} + \hat{\mathbf{X}} \dot{\hat{\mathbf{q}}}^* \hat{\mathbf{q}} \quad (2.6.128)$$

Analogamente ao caso anterior, podemos escrever o quaternio $\hat{\mathbf{q}}^* \dot{\hat{\mathbf{q}}}$ na seguinte forma

$$\hat{\mathbf{q}}^* \dot{\hat{\mathbf{q}}} = \frac{1}{2} \hat{\mathbf{W}} = 0 + \frac{1}{2} \mathbf{W} \quad (2.6.129)$$

Substituindo esta relação na Eq. (2.6.128) obtemos

$$\dot{\hat{\mathbf{X}}} = \frac{1}{2}(\hat{\mathbf{W}}\hat{\mathbf{X}} - \hat{\mathbf{X}}\hat{\mathbf{W}}) = 0 + \frac{1}{2}(\tilde{\mathbf{W}}\mathbf{X} - \tilde{\mathbf{X}}\mathbf{W}) \quad (2.6.130)$$

e, consequentemente,

$$\dot{\mathbf{X}} = \tilde{\mathbf{W}}\mathbf{X} \quad (2.6.131)$$

mostrando que a parte vetorial de $\hat{\mathbf{W}}$ é a velocidade angular material cuja expressão pode ser desenvolvida a partir de (2.6.129)

$$\boxed{\mathbf{W} = 2(\mathbf{q}_0 \dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_0 \mathbf{q} - \tilde{\mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}})} \quad (2.6.132)$$

Representação matricial de quatérnios

Podemos representar os quatérnios na forma matricial através de uma matriz coluna quadri-dimensional

$$\hat{\mathbf{q}} = [\mathbf{q}_0 \quad \mathbf{q}_1 \quad \mathbf{q}_2 \quad \mathbf{q}_3]^T \quad (2.6.133)$$

O produto de dois quatérnios

$$\hat{\mathbf{a}} = \hat{\mathbf{p}} \hat{\mathbf{q}} \quad (2.6.134)$$

pode ser escrito na seguinte forma

$$\hat{\mathbf{a}} = \mathbf{A}_p \hat{\mathbf{q}} = \mathbf{B}_q \hat{\mathbf{p}} \quad (2.6.135)$$

com as matrizes 4×4

$$\mathbf{A}_p = \begin{bmatrix} p_0 & -\mathbf{p}^T \\ \mathbf{p} & p_0 \mathbf{I} + \tilde{\mathbf{p}} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{B}_q = \begin{bmatrix} q_0 & -\mathbf{q}^T \\ \mathbf{q} & q_0 \mathbf{I} - \tilde{\mathbf{q}} \end{bmatrix} \quad (2.6.136)$$

Na forma matricial, o operador rotação (2.6.113) em um quatérnio vetorial pode ser escrito como

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_q \mathbf{B}_q^T \hat{\mathbf{X}} \quad (2.6.137)$$

onde o produto matricial

$$\mathbf{A}_q \mathbf{B}_q^T = \begin{bmatrix} 1 & 0^T \\ 0 & \mathbf{R} \end{bmatrix} \quad (2.6.138)$$

Desta forma, podemos extrair o operador \mathbf{R}

$$\mathbf{R} = (2q_0^2 - 1)\mathbf{I} + 2\mathbf{q}\mathbf{q}^T + 2q_0\tilde{\mathbf{q}} \quad (2.6.139)$$

Podemos verificar que a expressão obtida é similar a expressão em termos dos parâmetros de Euler, portanto podemos facilmente escrever as velocidades angulares

$$\boxed{\mathbf{W} = 2\mathbf{G}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \quad \mathbf{w} = 2\mathbf{H}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}} \quad (2.6.140)$$

onde os operadores \mathbf{H} e \mathbf{G} foram introduzidos na Eq. (2.6.95) , ou na forma de quaternios

$$\boxed{\hat{\mathbf{W}} = 2\mathbf{A}^T \dot{\hat{\mathbf{q}}} \quad \hat{\mathbf{w}} = 2\mathbf{B}^T \dot{\hat{\mathbf{q}}}} \quad (2.6.141)$$

As acelerações angulares podem ser obtidas através da diferenciação das expressões das velocidades angulares.

6. 7. Representação de rotações em termos do vetor rotação conforme

O vetor rotação conforme (VRC) é obtido aplicando-se um rotação conforme nos parâmetros de Euler (Milenkovic 1982)

$$c_i = \frac{4e_i}{1 + e_0} \quad (i = 0, \dots, 3) \quad (2.6.142)$$

Esta rotação produz um conjunto de três parâmetros independentes função da quarta parte do ângulo de rotação

$$\boxed{\mathbf{c} = 4\mathbf{n} \tan \frac{\phi}{4}} \quad (2.6.143)$$

e, onde

$$c_0 = \frac{1}{8}(16 - \|\mathbf{c}\|^2) \quad (2.6.144)$$

Uma vantagem importante do VRC é sua relação praticamente linear com o ângulo de rotação ϕ no intervalo $[-\pi, +\pi]$, ilustrada na Figura 2.4a que apresenta a relação do ângulo e suas primeira e segunda derivadas com o VRC.

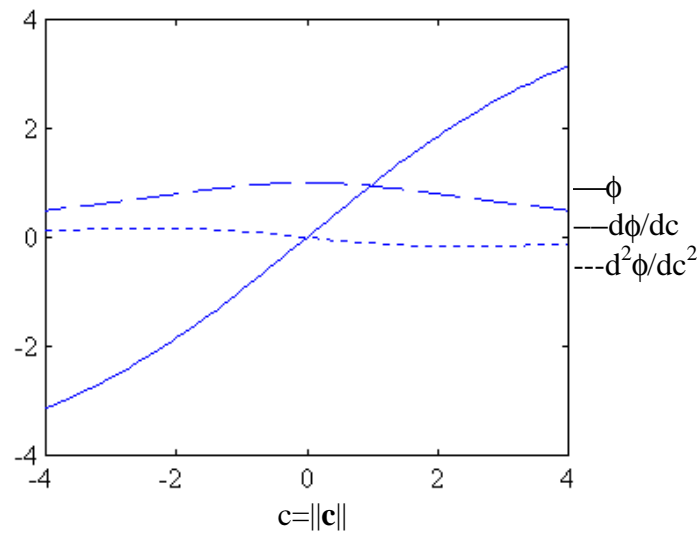


Figura 2.4 - Variação do ângulo de rotação e suas derivadas em termos do VRC.

A representação de rotações em termos do vetor rotação conforme possui uma singularidade em $\phi = \pm 2\pi$, pois $\|\mathbf{c}\| = \pm\infty$. Porém, ao contrário dos parâmetros de Rodrigues, no intervalo $\phi \in [-\pi, +\pi]$, o VRC não apresenta nenhuma singularidade já que neste intervalo

$$\begin{cases} 0 \leq c_0 \leq 2 \\ -4 \leq c_i \leq +4 \end{cases} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (2.6.145)$$

Utilizando algumas relações trigonométricas, podemos observar facilmente que

$$\boxed{\mathbf{b} = \frac{\mathbf{c}}{c_0}} \quad (2.6.146)$$

Substituindo este resultado na Eq. (2.6.79) e utilizando a Eq. (2.6.144) , obtemos a expressão do operador \mathbf{R} em termos do VRC

$$\boxed{\mathbf{R} = \mathbf{I} + \frac{2}{(c_0 - 4)^2} (c_0 \tilde{\mathbf{c}} + \tilde{\mathbf{c}}\tilde{\mathbf{c}})} \quad (2.6.147)$$

A principal propriedade do VRC é o fato de que a rotação total \mathbf{R} pode ser dividida em duas rotações \mathbf{F} de mesma amplitude $\frac{1}{2}\phi$, a qual pode ser computada em termos dos parâmetros de Rodrigues considerando meia rotação.

$$\boxed{\mathbf{R} = \mathbf{F}^2} \quad (2.6.148)$$

onde \mathbf{F} pode ser escrita da seguinte forma

$$\boxed{\mathbf{F} = \mathbf{I} + \frac{1}{(c_0 - 4)} \left(\tilde{\mathbf{c}} + \frac{1}{4} \tilde{\mathbf{c}}\tilde{\mathbf{c}} \right)} \quad (2.6.149)$$

Para obtermos as expressões das velocidades angulares em termos do VRC e suas derivadas, podemos derivar a Eq. (2.6.143)

$$\dot{\mathbf{c}} = 4\dot{\mathbf{n}} \tan \frac{\phi}{4} + \frac{\mathbf{n}}{\cos^2 \frac{\phi}{4}} \dot{\phi} \quad (2.6.150)$$

Pré-multiplicando a última equação por \mathbf{n}^T , obtemos a expressão

$$\dot{\phi} = \cos^2 \frac{\phi}{4} \mathbf{n}^T \dot{\mathbf{c}} \quad (2.6.151)$$

e, substituindo esta expressão na anterior, obtemos

$$\dot{\mathbf{n}} = \frac{1}{4 \tan \frac{\phi}{4}} (\mathbf{I} - \mathbf{n}\mathbf{n}^T) \dot{\mathbf{c}} \quad (2.6.152)$$

Substituindo os últimos resultados na Eq. (2.6.52) e utilizando algumas relações trigonométricas, obtemos as expressões das velocidades angulares

$$\boxed{\mathbf{W} = \mathbf{T}(\mathbf{c})\dot{\mathbf{c}} \quad \mathbf{w} = \mathbf{T}^T(\mathbf{c})\dot{\mathbf{c}}} \quad (2.6.153)$$

onde o operador \mathbf{T} é

$$\boxed{\mathbf{T}(\mathbf{c}) = \frac{2}{(4 - c_0)^2} \left[(4 - c_0)\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{c}} + \frac{1}{4}\tilde{\mathbf{c}}\tilde{\mathbf{c}} \right]} \quad (2.6.154)$$

As acelerações angulares podem ser obtidas através do mesmo procedimento utilizado na seção anterior.

6. 8. Representação de rotações no plano

A rotação mais simples que podemos considerar é a rotação plana de um ângulo finito em torno de um eixo coordenado. Sejam os eixos xyz e $x'y'z'$, apresentados na Figura 2.5. O eixo xyz é fixo no espaço e o eixo $x'y'z'$ é solidário a um vetor \mathbf{X} . Suponhamos, agora, que giremos o vetor \mathbf{X} de um ângulo ϕ em torno do eixo z .

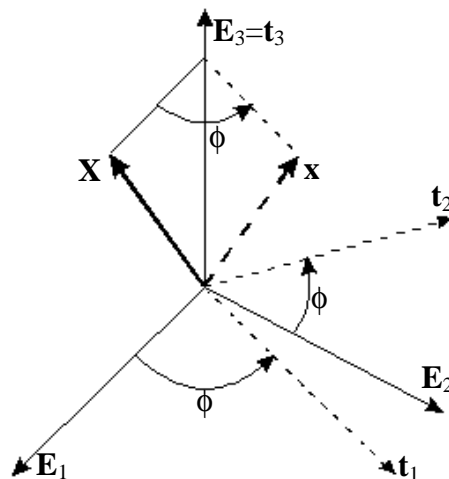


Figura 2.5: Rotação no plano $\mathbf{E}_1\mathbf{E}_2$.

Se considerarmos que o vetor \mathbf{X} possui componentes $[X_1 \ X_2 \ X_3]$ na base material \mathbf{E} , as novas componentes do mesmo vetor na base espacial \mathbf{t} após a rotação ϕ podem ser escritas da seguinte forma:

$$\begin{cases} x_1 = X_1 \cos \phi - X_2 \sin \phi \\ x_2 = X_1 \sin \phi + X_2 \cos \phi \\ x_3 = X_3 \end{cases} \quad (2.6.155)$$

Se escrevermos em forma matricial, obtemos:

$$\mathbf{x} = \mathbf{R}\mathbf{X} \quad (2.6.156)$$

onde o operador rotação \mathbf{R} é da seguinte forma:

$$[\mathbf{R}(z, \phi)]_t^t = [\mathbf{R}(z, \phi)]_E^E = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.6.157)$$

Da mesma forma, podemos obter o operador rotação para rotações nos outros eixos coordenados \mathbf{E}_1 e \mathbf{E}_2 de ângulos ψ e θ , respectivamente.

$$[\mathbf{R}(x, \psi)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \psi & -\sin \psi \\ 0 & \sin \psi & \cos \psi \end{bmatrix} \quad (2.6.158)$$

$$[\mathbf{R}(y, \theta)] = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (2.6.159)$$

6. 9. Não-comutatividade de rotações

Consideremos um corpo rígido (Figura 2.6) submetido a duas rotações sucessivas \mathbf{R}_1 e \mathbf{R}_2 de 90° em torno dos eixos z e y , respectivamente

$$\mathbf{R}_1 = \mathbf{R}_1(z, 90^\circ) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.6.160)$$

e

$$\mathbf{R}_2 = \mathbf{R}_2(y, 90^\circ) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.6.161)$$

Sabemos que o produto de matrizes não é comutativo, i.e.

$$\mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \mathbf{R}_2 \mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.6.162)$$

No caso de rotações finitas, a não-comutatividade significa que a inversão da ordem das operações de rotação dá origem a diferentes configurações geométricas do corpo no qual as operações foram aplicadas. Esta propriedade implica que, em qualquer decomposição de uma rotação finita em termos de rotações elementares sucessivas, a ordem na qual as rotações elementares são aplicadas é essencial.

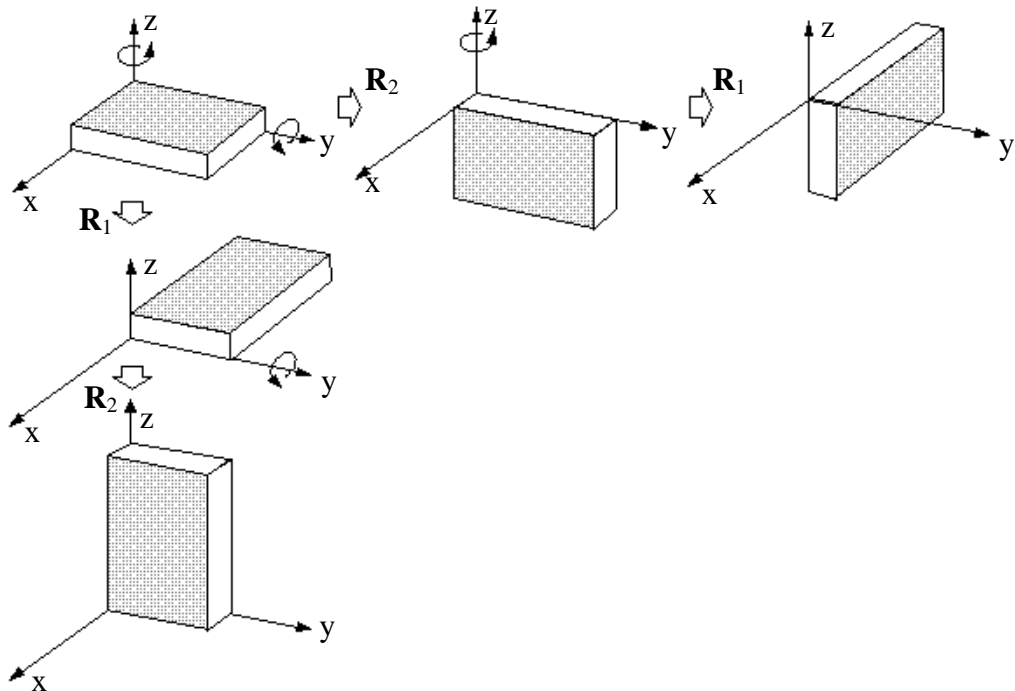


Figura 2.6 - Ilustração da propriedade de não-comutatividade de rotações finitas

6. 10. Representação de rotações em termos dos ângulos de Euler

Os ângulos de Euler formam um conjunto de três parâmetros independentes que permitem representar o operador rotação através da superposição de três rotações planas. Como ainda não há um padrão estabelecido, neste trabalho, usaremos a seguinte notação para os ângulos de Euler (Figura 2.7):

- 1- Uma rotação de ψ (precessão) em torno do eixo \mathbf{E}_3 : $\mathbf{R}_1(z, \psi)$
- 2- Uma rotação de θ (nutação) em torno do eixo \mathbf{r}_1 : $\mathbf{R}_2(x, \theta)$
- 3- Uma rotação de ϕ (rotação própria) em torno do eixo \mathbf{s}_3 : $\mathbf{R}_3(z, \phi)$

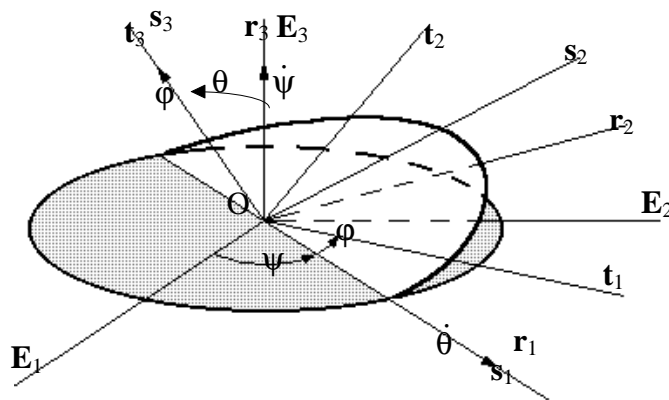


Figura 2.7 - Representação dos ângulos de Euler.

Podemos escrever a transformação resultante da seguinte forma:

$$\mathbf{x} = \mathbf{R}\mathbf{X} \quad (2.6.163)$$

onde o operador rotação \mathbf{R} é a composição das três rotações na seguinte ordem

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_3(z, \phi)\mathbf{R}_2(x, \theta)\mathbf{R}_1(z, \psi) \quad (2.6.164)$$

Para obtermos a expressão matricial do operador \mathbf{R} em termos dos ângulos de Euler, devemos então desenvolver o produto acima, para tal, devemos escrever os operadores \mathbf{R}_1 , \mathbf{R}_2 e \mathbf{R}_3 na mesma base, digamos $\mathbf{t}_i \otimes \mathbf{t}_j$.

Onde,

$$[\mathbf{R}(z, \psi)]_r^r = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.6.165)$$

$$[\mathbf{R}(x, \theta)]_s^s = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (2.6.166)$$

$$[\mathbf{R}(z, \phi)]_t^t = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.6.167)$$

O operador \mathbf{R} pode ser escrito da seguinte forma

$$[\mathbf{R}]_t^t = [\mathbf{R}_3(z, \phi)]_t^t [\mathbf{R}_2(y, \theta)]_t^t [\mathbf{R}_1(z, \psi)]_t^t \quad (2.6.168)$$

onde a mudança de base pode ser escrita da seguinte forma

$$[\mathbf{R}_2(x, \theta)]_t^t = \mathbf{Q}_3 [\mathbf{R}_2(x, \theta)]_s^s \mathbf{Q}_3^{-1} \quad (2.6.169)$$

$$[\mathbf{R}_1(z, \psi)]_t^t = \mathbf{Q}_3 \mathbf{Q}_2 [\mathbf{R}_1(z, \psi)]_r^r \mathbf{Q}_2^{-1} \mathbf{Q}_3^{-1} \quad (2.6.170)$$

Conforme, demonstrado na seção anterior, as matrizes de mudança de base são similares às matrizes de rotação, de forma que as matrizes \mathbf{Q}_2 e \mathbf{Q}_3 são

$$\mathbf{Q}_2 = [\mathbf{R}_2^{-1}(x, \theta)]_s^s \quad \text{e} \quad \mathbf{Q}_3 = [\mathbf{R}_3^{-1}(z, \phi)]_t^t \quad (2.6.171)$$

Substituindo as últimas expressões na Eq. (2.6.168) obtemos

$$[\mathbf{R}]_t^t = [\mathbf{R}_1(\psi)]_r^r [\mathbf{R}_2(\theta)]_s^s [\mathbf{R}_3(\phi)]_t^t \quad (2.6.172)$$

donde, podemos escrever a expressão

$$[\mathbf{R}]_t^t = \begin{bmatrix} c\psi c\varphi - s\psi c\theta s\varphi & -c\psi s\varphi - s\psi c\theta c\varphi & s\psi s\theta \\ s\psi c\varphi + c\psi c\theta s\varphi & -s\psi s\varphi + c\psi c\theta c\varphi & -c\psi s\theta \\ s\theta s\varphi & s\theta c\varphi & c\theta \end{bmatrix} \quad (2.6.173)$$

onde $c\xi = \cos\xi$ e $s\xi = \sin\xi$ ($\xi = \psi, \theta, \varphi$).

Os ângulos de Euler podem ser obtidos a partir da matriz \mathbf{R} , através das seguintes relações

$$\varphi = \tan^{-1} \left(\frac{r_{31}}{r_{32}} \right) \quad (2.6.174)$$

$$\begin{cases} \sin\theta = r_{31} \sin\varphi + r_{32} \cos\varphi \\ \cos\theta = r_{33} \end{cases} \quad (2.6.175)$$

$$\begin{cases} \sin\psi = r_{11} \cos\varphi - r_{12} \sin\varphi \\ \cos\psi = r_{21} \cos\varphi - r_{22} \sin\varphi \end{cases}$$

Podemos observar que esta inversão apresenta uma singularidade quando $\theta = 0$ ou π , pois

$$[\mathbf{R}]_t^t = \begin{bmatrix} \cos(\psi \pm \varphi) & -\sin(\psi \pm \varphi) & 0 \\ \sin(\psi \pm \varphi) & \cos(\psi \pm \varphi) & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{bmatrix} \quad (2.6.176)$$

Para obtermos as expressões das velocidades angulares, vamos relembrar as seguintes relações

$$\tilde{\mathbf{w}} = \dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T \quad \text{e} \quad \tilde{\mathbf{W}} = \mathbf{R}^T \dot{\mathbf{R}} \quad (2.6.177)$$

Utilizando o resultado obtido na Eq. (2.6.173), podemos escrever as expressões das velocidades angulares. As componentes da velocidade angular espacial \mathbf{w} na base \mathbf{E} são

$$[\mathbf{w}]_{\mathbf{E}} = [\mathbf{W}]_{\mathbf{t}} = \begin{bmatrix} 0 & \cos \psi & \sin \psi \sin \theta \\ 0 & \sin \psi & -\cos \psi \sin \theta \\ 1 & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} \quad (2.6.178)$$

e as suas componentes na base \mathbf{t} são

$$[\mathbf{w}]_{\mathbf{t}} = [\mathbf{W}]_{\mathbf{E}} = \begin{bmatrix} \sin \phi \sin \theta & \cos \phi & 0 \\ \cos \phi \sin \theta & -\sin \phi & 0 \\ \cos \theta & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} \quad (2.6.179)$$

6. 11. Representação de rotações em termos dos ângulos de Bryant

Os ângulos de Bryant (Figura 2.8), como os ângulos de Euler, fornecem um conjunto de três parâmetros que permitem representar o operador rotação através da superposição de três rotações planas. As rotações sucessivas são na seguinte ordem:

- 1- Uma rotação de ψ (yaw) em torno do eixo \mathbf{E}_3 : $\mathbf{R}_1(z, \psi)$
- 2- Uma rotação de θ (pitch) em torno do eixo \mathbf{r}_2 : $\mathbf{R}_2(y, \theta)$
- 3- Uma rotação de ϕ (roll) em torno do eixo \mathbf{s}_1 : $\mathbf{R}_3(x, \phi)$

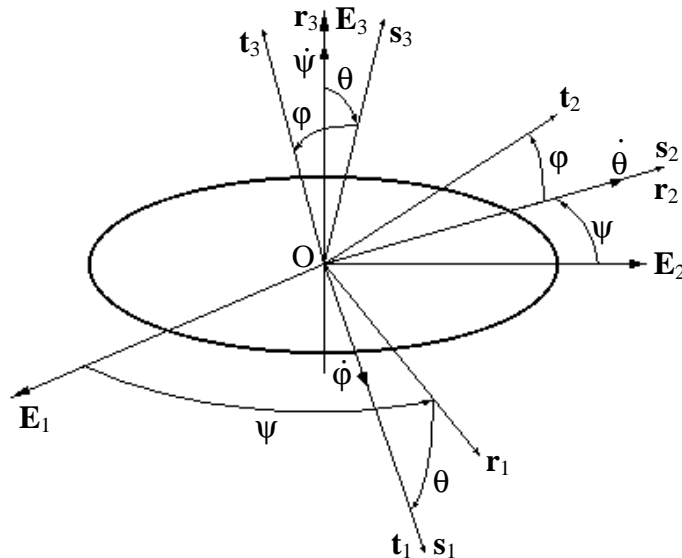


Figura 2.8 - Representação dos ângulos de Bryant.

Podemos escrever a transformação resultante da seguinte forma:

$$\mathbf{x} = \mathbf{R}\mathbf{X} \quad (2.6.180)$$

onde o operador rotação \mathbf{R} é a composição das três rotações na seguinte ordem

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_3(x, \varphi) \mathbf{R}_2(y, \theta) \mathbf{R}_1(z, \psi) \quad (2.6.181)$$

Para obtermos a expressão matricial do operador \mathbf{R} em termos dos ângulos de Bryant, devemos então desenvolver o produto acima, para tal, devemos escrever os operadores \mathbf{R}_1 , \mathbf{R}_2 e \mathbf{R}_3 na mesma base, digamos $\mathbf{t}_i \otimes \mathbf{t}_j$.

Onde,

$$[\mathbf{R}(z, \psi)]_{\mathbf{r}}^{\mathbf{r}} = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.6.182)$$

$$[\mathbf{R}(y, \theta)]_{\mathbf{s}}^{\mathbf{s}} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (2.6.183)$$

$$[\mathbf{R}(x, \varphi)]_{\mathbf{t}}^{\mathbf{t}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \quad (2.6.184)$$

O operador \mathbf{R} pode ser escrito da seguinte forma

$$[\mathbf{R}]_{\mathbf{t}}^{\mathbf{t}} = [\mathbf{R}_3(x, \varphi)]_{\mathbf{t}}^{\mathbf{t}} [\mathbf{R}_2(y, \theta)]_{\mathbf{t}}^{\mathbf{t}} [\mathbf{R}_1(z, \psi)]_{\mathbf{t}}^{\mathbf{t}} \quad (2.6.185)$$

onde a mudança de base pode ser escrita da seguinte forma

$$[\mathbf{R}_2(y, \theta)]_{\mathbf{t}}^{\mathbf{t}} = \mathbf{Q}_3 [\mathbf{R}_2(y, \theta)]_{\mathbf{s}}^{\mathbf{s}} \mathbf{Q}_3^{-1} \quad (2.6.186)$$

$$[\mathbf{R}_1(z, \psi)]_{\mathbf{t}}^{\mathbf{t}} = \mathbf{Q}_3 \mathbf{Q}_2 [\mathbf{R}_1(z, \psi)]_{\mathbf{r}}^{\mathbf{r}} \mathbf{Q}_2^{-1} \mathbf{Q}_3^{-1} \quad (2.6.187)$$

Relembrando a relação das matrizes \mathbf{Q}_2 e \mathbf{Q}_3 com as matrizes de rotação e substituindo as duas últimas expressões na Eq. (2.6.185) obtemos

$$[\mathbf{R}]_t^t = [\mathbf{R}_1(z, \psi)]_r^r [\mathbf{R}_2(y, \theta)]_s^s [\mathbf{R}_3(x, \phi)]_t^t \quad (2.6.188)$$

donde, podemos escrever a expressão

$$[\mathbf{R}]_t^t = \begin{bmatrix} c\psi c\theta & -s\psi c\phi + c\psi s\theta s\phi & s\psi s\phi + c\psi s\theta c\phi \\ s\psi c\theta & c\psi c\phi + s\psi s\theta s\phi & -c\psi s\phi + s\psi s\theta c\phi \\ -s\theta & c\theta s\phi & c\theta c\phi \end{bmatrix} \quad (2.6.189)$$

onde $c\xi = \cos\xi$ e $s\xi = \sin\xi$ ($\xi = \psi, \theta, \phi$).

Os ângulos de Bryant podem ser obtidos a partir da matriz \mathbf{R} , através das seguintes relações

$$\phi = \tan^{-1} \left(\frac{r_{32}}{r_{33}} \right) \quad (2.6.190)$$

$$\begin{cases} \sin\theta = -r_{31} \\ \cos\theta = r_{32} \sin\phi + r_{33} \cos\phi \end{cases} \quad (2.6.191)$$

$$\begin{cases} \sin\psi = -r_{12} \cos\phi + r_{13} \sin\phi \\ \cos\psi = r_{22} \cos\phi - r_{23} \sin\phi \end{cases}$$

Podemos observar que esta inversão apresenta uma singularidade quando $\theta = \pm \pi/2$, pois

$$[\mathbf{R}]_t^t = \begin{bmatrix} 0 & -\sin(\psi \mp \phi) & \cos(\psi \mp \phi) \\ 0 & \cos(\psi \mp \phi) & \sin(\psi \mp \phi) \\ \mp 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.6.192)$$

Para obtermos as expressões das velocidades angulares, vamos relembrar as seguintes relações

$$\tilde{\mathbf{w}} = \dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T \quad \text{e} \quad \tilde{\mathbf{W}} = \mathbf{R}^T \dot{\mathbf{R}} \quad (2.6.193)$$

Utilizando o resultado obtido na Eq. (2.6.189), podemos escrever as expressões das velocidades angulares. As componentes da velocidade angular espacial \mathbf{w} na base \mathbf{E} são

$$[\mathbf{w}]_{\mathbf{E}} = [\mathbf{W}]_{\mathbf{t}} = \begin{bmatrix} 0 & -\sin \psi & \cos \psi \cos \theta \\ 0 & \cos \psi & \sin \psi \cos \theta \\ 1 & 0 & -\sin \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} \quad (2.6.194)$$

e as suas componentes na base \mathbf{t} são

$$[\mathbf{w}]_{\mathbf{t}} = [\mathbf{W}]_{\mathbf{E}} = \begin{bmatrix} -\sin \phi & 0 & 1 \\ \sin \phi \cos \theta & \cos \phi & 0 \\ \cos \phi \cos \theta & -\sin \phi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} \quad (2.6.195)$$

7. CONCLUSÕES

Uma exposição da cinemática de corpos rígidos foi apresentada. Podemos notar que a maior dificuldade para a determinação da cinemática de corpos rígidos consiste na representação de rotações finitas.

O problema de representação de rotações finitas para o estudo de corpos rígidos foi estudado. O operador rotação foi derivado a partir de diferentes abordagens e ao problema de parametrização foi dado um tratamento particular. Vários sistemas de parametrização foram apresentados, entre eles:

- Ângulos de Euler
- Ângulos de Bryant
- Parâmetros de Euler
- Parâmetros de Rodrigues
- Vetor Rotação Conforme (VRC)
- Vetor Rotação
- Quaternions

Podemos, agora, fazer uma exposição dos principais pontos favoráveis e desfavoráveis destes sistemas de parametrização. Vários aspectos podem ser analisados, entre eles:

1. Os ângulos de Euler e Bryant são parametrizações criadas para problemas específicos como, por exemplo, os ângulos de Euler para o problema do pião pesado e os ângulos de Bryant para o problema de direcionamento de aeronaves. Devido a este fato, pode-se

esperar que eles não sejam apropriados para o estudo de problemas gerais. Os dois sistemas apresentam pontos de singularidade, i.e., a matriz \mathbf{T} não é inversível para $\theta = 0$ ou π , no caso dos ângulos de Euler, e para $\theta = \pm \pi/2$, no caso dos ângulos de Bryant. As outras parametrizações são derivações do teorema de Euler acerca da representação de rotações finitas em termos do eixo e do ângulo de rotação.

2. Os parâmetros de Euler, o VRC e o vetor rotação podem ser utilizados para representar rotações de qualquer magnitude dentro do intervalo $\phi \in [-\pi, \pi]$. Enquanto que, os parâmetros de Rodrigues tendem a infinito quando $|\phi| \rightarrow \pi$. Fora do intervalo $[-\pi, \pi]$, os parâmetros de Euler e o vetor rotação não apresentam singularidades, porém, o VRC tende a infinito quando $|\phi| \rightarrow 2\pi$.
3. Quanto às propriedades de diferenciabilidade, os parâmetros de Euler, o VRC e o vetor rotação possuem o operador tangente \mathbf{T} contínuo e inversível dentro do intervalo $\phi \in [-\pi, \pi]$. Contudo, a única parametrização que permite valores fora deste intervalo é o sistema dos parâmetros de Euler. O vetor rotação apresenta um ponto de singularidade (\mathbf{T} não é inversível) quando $|\phi| = 2\pi$ e o VRC quando $|\phi| = 3.709$. No entanto, esta limitação pode ser facilmente superada trabalhando no intervalo $\phi \in [-\pi, \pi]$ e transformando as rotações que excedem esta faixa em rotações dentro do intervalo somando ou diminuindo o ângulo de rotação de 2π . Sendo que, quando $|\phi| = \pi$, o VRC está mais próximo do ponto de singularidade que o vetor rotação, portanto pode-se esperar um melhor comportamento do último quanto a convergência do algoritmo de integração.
4. O vetor rotação e o VRC têm a vantagem de representar rotações com um número mínimo de parâmetros, enquanto os parâmetros de Euler formam um conjunto de quatro parâmetros dependentes relacionados por um vínculo. Isto causa o inconveniente de se tornar necessária a adição de um multiplicador de Lagrange para descrever o vínculo para cada corpo. De forma que, sob o ponto de vista computacional, se torna necessário um algoritmo que integre EADs (Equações Algébrico-Diferenciais) e não mais EDOs (Equações Diferenciais Ordinárias).
5. Os parâmetros de Euler dão origem a expressões mais simples que o VRC e o vetor rotação, especialmente para as acelerações angulares.
6. Os ângulos de Euler e de Bryant fornecem uma caracterização geométrica imediata da rotação. Dentre os sistemas de parametrização que não apresentam singularidades, o vetor rotação fornece uma caracterização geométrica mais simples da rotação. Enquanto que os outros sistemas requerem interpretação dos valores dando origem a funções trigonométricas razoavelmente complicadas.

Como conclusão final, quanto a parametrização de rotações em problemas de corpos rígidos, podemos dizer que, desde que se possa aceitar o custo de integrar equações algébrico-diferenciais, o sistema de parametrização mais indicado é o dos parâmetros de Euler, pois é o único que não apresenta singularidade para qualquer magnitude de rotação e, além disso, este sistema dá origem a equações simples. Entretanto, se é desejado ou necessário empregar um sistema de três parâmetros independentes, tanto o VRC quanto o vetor rotação são apropriados. Porém, em geral, o vetor rotação é uma opção mais adequada já que ele fornece uma caracterização geométrica mais simples e melhores propriedades de convergência dos algoritmos de integração.

Equações do movimento

1. INTRODUÇÃO

O objetivo deste capítulo é apresentar os métodos de Lagrange e Maggi-Kane para formulação das equações do movimento. A metodologia utilizada para a formulação das equações do movimento se torna particularmente importante para a modelagem de problemas tridimensionais de sistemas de multicorpos que traduz parte dos objetivos deste trabalho. A forma final das equações do movimento é apresentada visando a implementação numérica.

2. SISTEMAS HOLÔNOMOS

Vínculos bilaterais - Consideremos um sistema constituído de N partículas. Suponhamos que a posição destas partículas estejam relacionadas por m equações de vínculo do tipo

$$f_j(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_N, y_N, z_N, t) = 0 \quad (j = 1, \dots, m) \quad (3.2.1)$$

Vínculos deste tipo são chamados de vínculos holônomos bilaterais.

Como exemplo de vínculos holônomos bilaterais, consideremos uma partícula forçada a permanecer sobre uma esfera de raio r . A equação de vínculo, neste caso, pode ser definida através da equação da esfera

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0 \quad (3.2.2)$$

Este vínculo holônomo particular é classificado também como esclerônomo pois não depende explicitamente do tempo. Quaisquer vínculos que são funções explícitas do tempo são conhecidos como vínculos reônomos.

Vínculos não-holônomos - Vínculos que não podem ser descritos na forma da Eq. (3.2.1), mas têm que ser escritos em termos de derivadas das coordenadas e, possivelmente, do tempo são chamados de vínculos não-holônomos.

As expressões dos vínculos não-holônomos são caracterizadas por não serem integráveis, pois, se fossem, a forma integrada da equação de vínculo seria equivalente àquela apresentada na Eq. (3.2.1).

Vínculos unilaterais - Consideremos, agora, que o sistema de N partículas é forçado a satisfazer as seguintes equações de vínculo

$$f_j(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_N, y_N, z_N, t) \geq 0 \quad (j = 1, \dots, m) \quad (3.2.3)$$

Vínculos deste tipo são chamados de vínculos unilaterais.

Como exemplo de vínculos unilaterais, consideremos uma partícula forçada a permanecer sobre ou dentro de uma esfera de raio r . A equação de vínculo, neste caso, pode ser definida através da seguinte inequação

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - r^2 \leq 0 \quad (3.2.4)$$

Graus de Liberdade - Quando nós investigamos o equilíbrio de um sistema, supomos que, para posições próximas às aquelas investigadas, os vínculos bilaterais consistem no fato de as coordenadas dos pontos do sistema satisfazerem as Eqs. (3.2.1).

Em geral, supomos que as funções f_j são contínuas e independentes em uma região de valores x_1, \dots, z_N , definindo a posição do sistema.

O valor $n = 3N - m$ é chamado de número de graus de liberdade. Sabendo n variáveis dentre as $3N$ variáveis x_1, \dots, z_N , podemos calcular, através das Eqs. (3.2.1), as $m = 3N - n$ variáveis restantes.

3. TRABALHO VIRTUAL

Deslocamentos virtuais - Suponhamos que um ponto deve permanecer em uma determinada superfície S e está localizado em um ponto A desta superfície.

Vamos deslocar este ponto da posição A para a posição B . O deslocamento \overline{AB} é dito *possível* se o ponto B também está contido na superfície S . Do contrário, o deslocamento é dito *impossível*.

Se um ponto na posição A tem velocidade v , então esta velocidade é dita *possível* ou *compatível com os vínculos* se o ponto pode possuir tal velocidade enquanto se move na superfície. Do contrário, a velocidade é dita *impossível* ou *incompatível com os vínculos*. Podemos ver facilmente que qualquer vetor tangente à superfície no ponto A representa uma velocidade possível.

Deslocamentos proporcionais às velocidades possíveis no ponto A são chamados de *deslocamentos virtuais* neste ponto.

De modo que, suponhamos que os vínculos de um sistema sejam definidos pelas equações

$$f_j(x_1, \dots, z_N) = 0 \quad (j = 1, \dots, m) \quad (3.3.1)$$

Derivando estas equações e utilizando a definição de deslocamentos virtuais, podemos escrever

$$\sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial f_j}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial f_j}{\partial z_i} \delta z_i \right) = 0 \quad (j = 1, \dots, m) \quad (3.3.2)$$

onde, qualquer conjunto de valores $\delta x_1, \dots, \delta z_N$ que satisfaça o sistema de equações (3.3.2) define um deslocamento virtual.

Um deslocamento virtual de um sistema é dito *reversível* se, ao se inverter o sentido dos deslocamentos de todos os pontos, obtemos novamente um deslocamento virtual do sistema. Podemos concluir, portanto, que no caso de vínculos bilaterais, os deslocamentos virtuais são reversíveis.

Princípio dos trabalhos virtuais - Seja um sistema constituído por N partículas A_1, \dots, A_N sobre as quais forças $\mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_N$ são aplicadas. Suponhamos que o sistema sofra um deslocamento virtual arbitrário $\delta \mathbf{r}_1, \dots, \delta \mathbf{r}_N$. O trabalho destas forças é

$$\delta W = \mathbf{P}_1 \cdot \delta \mathbf{r}_1 + \dots + \mathbf{P}_N \cdot \delta \mathbf{r}_N = \sum_{i=1}^N \mathbf{P}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i \quad (3.3.3)$$

O trabalho definido pela fórmula (3.3.3) é chamado de trabalho virtual das forças $\mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_N$ nos deslocamentos virtuais $\delta \mathbf{r}_1, \dots, \delta \mathbf{r}_N$.

Se as forças $\mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_N$ possuem um potencial V, podemos escrever

$$\delta W = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial V}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial V}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial V}{\partial z_i} \delta z_i \right) = \delta V \quad (3.3.4)$$

As forças que obrigam o sistema a satisfazer as equações de vínculo são chamadas de forças de reação e as forças que agem sobre os pontos do sistema e não são forças de reação são chamadas de forças ativas.

Suponhamos que um sistema esteja em equilíbrio. Consequentemente, em cada ponto do sistema as forças ativas aplicadas sobre este ponto são anuladas pelas reações. Denominando $\mathbf{F}_1, \dots, \mathbf{F}_N$ de forças ativas e $\mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_N$ de forças de reação, obtemos

$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{R}_1 = 0 \quad \mathbf{F}_2 + \mathbf{R}_2 = 0 \quad \dots \quad \mathbf{F}_N + \mathbf{R}_N = 0 \quad (3.3.5)$$

Consideremos, agora, um deslocamento virtual arbitrário $\delta \mathbf{r}_1, \dots, \delta \mathbf{r}_N$. O trabalho das forças ativas e de reação neste deslocamento é

$$(\mathbf{F}_1 + \mathbf{R}_1) \cdot \delta \mathbf{r}_1 + (\mathbf{F}_2 + \mathbf{R}_2) \cdot \delta \mathbf{r}_2 + \dots + (\mathbf{F}_N + \mathbf{R}_N) \cdot \delta \mathbf{r}_N = 0 \quad (3.3.6)$$

ou

$$(\mathbf{F}_1 \cdot \delta \mathbf{r}_1 + \dots + \mathbf{F}_N \cdot \delta \mathbf{r}_N) + (\mathbf{R}_1 \cdot \delta \mathbf{r}_1 + \dots + \mathbf{R}_N \cdot \delta \mathbf{r}_N) = 0 \quad (3.3.7)$$

Podemos verificar que, se o sistema não apresenta atrito, o trabalho das reações em cada deslocamento virtual é não-negativo.

Desta maneira, podemos afirmar que

$$\mathbf{R}_1 \cdot \delta \mathbf{r}_1 + \dots + \mathbf{R}_N \cdot \delta \mathbf{r}_N \geq 0 \quad (3.3.8)$$

De (3.3.7) obtemos

$$\mathbf{F}_1 \cdot \delta \mathbf{r}_1 + \dots + \mathbf{F}_N \cdot \delta \mathbf{r}_N \leq 0 \quad (3.3.9)$$

onde a expressão no lado esquerdo desta inequação representa o trabalho virtual das forças ativas. Donde podemos afirmar: “*Se não há atrito e um sistema está em equilíbrio, o trabalho das forças ativas para cada deslocamento virtual ou é zero ou é negativo.*”

Se o deslocamento virtual $\delta \mathbf{r}_1, \dots, \delta \mathbf{r}_N$ é reversível, então $-\delta \mathbf{r}_1, \dots, -\delta \mathbf{r}_N$ é, também, um deslocamento virtual. De modo que, em caso de equilíbrio temos

$$-\mathbf{F}_1 \cdot \delta \mathbf{r}_1 - \dots - \mathbf{F}_N \cdot \delta \mathbf{r}_N \leq 0 \quad (3.3.10)$$

De (3.3.9) e (3.3.10) , podemos afirmar que

$$\mathbf{F}_1 \cdot \delta \mathbf{r}_1 + \dots + \mathbf{F}_N \cdot \delta \mathbf{r}_N = 0 \quad (3.3.11)$$

Portanto, no caso de equilíbrio de um sistema, o trabalho virtual das forças ativas é igual a zero para qualquer deslocamento virtual reversível.

4. PRINCÍPIO DE D'ALEMBERT

O princípio dos trabalhos virtuais, como definido acima, apenas estabelece condições de equilíbrio estático de sistemas, não podendo ser aplicado em problemas dinâmicos. Mas ele pode ser estendido para problemas dinâmicos através do princípio de d'Alembert.

Consideremos a segunda equação de Newton escrita da seguinte forma

$$\mathbf{P}_i - \dot{\mathbf{p}}_i = 0 \quad (3.4.1)$$

onde \mathbf{P}_i é a resultante das forças e $\mathbf{p}_i = m_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i$ representa a quantidade de movimento linear da partícula i. E se separarmos a resultante das forças nas suas partes ativa e de reação, obtemos

$$\mathbf{F}_i + \mathbf{R}_i - \dot{\mathbf{p}}_i = 0 \quad (3.4.2)$$

Façamos, agora, as mesmas considerações que foram feitas, na seção anterior, a respeito dos deslocamentos virtuais, multiplicando escalarmente a Eq. (3.4.2) pelos deslocamentos virtuais.

$$(\mathbf{F}_i + \mathbf{R}_i - \dot{\mathbf{p}}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0 \quad (3.4.3)$$

Reescrevendo o princípio dos trabalhos virtuais a partir da Eq. (3.4.3) e, considerando o trabalho das forças de reação nulo (vínculos bilaterais), temos

$$\sum_{i=1}^N (\mathbf{F}_i - \dot{\mathbf{p}}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0 \quad (3.4.4)$$

Esta última equação é, frequentemente, chamada de princípio de d'Alembert. O termo $\mathbf{F}_i - \dot{\mathbf{p}}_i$ é, normalmente, chamado de força efetiva. O que nos permite definir o princípio de

d'Alembert como: *O trabalho virtual realizado pelas forças efetivas através de deslocamentos virtuais reversíveis é zero.*

Para sistemas conservativos, podemos, aplicar o princípio de d'Alembert para derivar o princípio de conservação de energia, bastando lembrar a definição de \mathbf{p}_i . Se escrevermos $\delta \mathbf{r}_i = \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \delta t$, podemos reescrever a Eq. (3.4.4) da seguinte forma

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i - \sum_{i=1}^N \frac{d}{dt} (m \dot{\mathbf{r}}_i) \cdot \dot{\mathbf{r}}_i \delta t = 0 \quad (3.4.5)$$

se as forças ativas possuem um potencial V , i.e., se o sistema é conservativo, o primeiro termo é simplesmente $-\delta V$, onde V é a energia potencial e o segundo termo pode ser reescrito tirando d/dt para fora do somatório, ficando claro que o segundo termo na verdade é δT , onde T é a energia cinética do sistema. Portanto, notamos que a Eq. (3.4.4) equivalente a

$$\delta(T + V) = 0 \quad (3.4.6)$$

que, por sua vez, é equivalente a

$$T + V = E = \text{const.} \quad (3.4.7)$$

o que significa que a energia total do sistema se conserva .

5. EQUAÇÕES DE LAGRANGE

Podemos notar facilmente que, para sistemas com vínculo, os deslocamentos virtuais não são independentes. Neste caso, é interessante reescrevermos o princípio de D'Alembert em termos de um número mínimo de coordenadas, as quais denominaremos coordenadas generalizadas. Desta maneira, os coeficientes dos deslocamentos virtuais podem ser anulados separadamente, obtendo-se um sistema de equações diferenciais ordinárias em termos das coordenadas generalizadas denominadas equações de Lagrange.

As equações de Lagrange apresentam, como uma das principais vantagens, o fato de que as equações do movimento podem ser derivadas de uma única função, chamada de Lagrangeano, para um sistema com vínculos holônomos.

Para definirmos as equações de Lagrange, primeiro vamos introduzir as coordenadas generalizadas através da seguinte transformação:

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t) \quad (3.5.1)$$

donde, utilizando a regra da cadeia, obtemos a expressão para a velocidade da partícula

$$\dot{\mathbf{r}}_i = \sum_j \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \quad (3.5.2)$$

e os deslocamentos virtuais podem ser relacionados por

$$\delta \mathbf{r}_i = \sum_j \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \quad (3.5.3)$$

Agora, podemos escrever o trabalho virtual das forças \mathbf{F}_i em função das coordenadas generalizadas

$$\sum_i \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_{i,j} \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_j Q_j \delta q_j \quad (3.5.4)$$

onde Q_j são escalares chamadas de forças generalizadas, definidas como

$$Q_j = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \quad (3.5.5)$$

Apesar de serem chamadas de forças generalizadas, as Q_j não necessariamente têm dimensões de força, assim como δq_j não necessariamente tem dimensão de comprimento, apenas o produto delas ($Q_j \delta q_j$) tem que ter dimensão de trabalho. Por exemplo, se uma coordenada generalizada for um ângulo, a força generalizada correspondente a ela será um momento.

Com o objetivo de escrevermos o princípio de d'Alembert em termos das coordenadas generalizadas, escrevamos agora o segundo termo correspondente a variação da quantidade de movimento linear como função das coordenadas generalizadas

$$\sum_i \dot{\mathbf{p}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_i m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_i m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \quad (3.5.6)$$

Consideremos a seguinte relação

$$\sum_i m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = \sum_i \left[\frac{d}{dt} \left(m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) - m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) \right] \quad (3.5.7)$$

podemos ainda dizer que

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_i} \quad (3.5.8)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_i} \right) = \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_i} \quad (3.5.9)$$

Substituindo as Eqs. (3.5.8) e (3.5.9) na Eq. (3.5.7) , obtemos

$$\sum_i m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = \sum_i \left[\frac{d}{dt} \left(m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right] \quad (3.5.10)$$

Esta última equação pode ser escrita também da forma abaixo

$$\sum_i m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_j \left[\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 \right) \right] - \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 \right) \right] \delta q_j \quad (3.5.11)$$

onde podemos identificar o aparecimento da energia cinética total do sistema.

Reescrevendo o princípio de d'Alembert e substituindo os resultados encontrados, temos

$$\sum_j \left[Q_j - \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right] \right] \delta q_j = 0 \quad (3.5.12)$$

Se o sistema é holônomo, as coordenadas generalizadas q_j não são relacionadas por vínculos, e, portanto, quaisquer deslocamentos virtuais δq_j são independentes uns dos outros, o que nos permite afirmar que a única maneira da Eq. (3.5.12) ser satisfeita é se os coeficientes de δq_j forem nulos, donde

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \quad (3.5.13)$$

Consideramos, agora, que as forças generalizadas Q_j podem ser decompostas em forças conservativas e forças não-conservativas. Deste modo, as forças conservativas podem ser derivadas de uma função potencial V (energia potencial do sistema) e podemos escrever

$$Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j} + Q'_j \quad (3.5.14)$$

onde Q'_j representam as forças não-conservativas aplicadas ao sistema.

Desta forma, como V não é função de \dot{q}_j , a Eq. (3.5.13) para sistemas holônomos pode ser reescrita da seguinte forma

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q'_j \quad (j = 1, \dots, n) \quad (3.5.15)$$

onde $L = T - V$ é chamado de Lagrangeano.

As n Eqs. (3.5.15) são chamadas de 2ª forma das equações de Lagrange.

Se o sistema é não-holônomo, as coordenadas generalizadas q_j são relacionadas por m equações de vínculo do tipo

$$\sum_{j=1}^n A_{ij}(q_1, \dots, q_n, t) \delta q_j = 0 \quad (i = 1, \dots, m) \quad (3.5.16)$$

Podemos multiplicar a equação acima por um fator λ_i denominado multiplicador de Lagrange, obtendo

$$\sum_{j=1}^n \lambda_i A_{ij}(q_1, \dots, q_n, t) \delta q_j = 0 \quad (i = 1, \dots, m) \quad (3.5.17)$$

Somando as m equações acima à Eq. (3.5.12) , obtemos

$$\sum_j \left[Q_j - \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right] + \sum_{i=1}^m \lambda_i A_{ij} \right] \delta q_j = 0 \quad (3.5.18)$$

Se escolhermos os valores de λ_i tal que os coeficientes dos deslocamentos virtuais δq_j sejam zero, podemos escrever

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j + \sum_{i=1}^m \lambda_i A_{ij} \quad (3.5.19)$$

Analogamente ao caso holônomo, podemos decompor as forças Q_j em forças conservativas e não-conservativas, obtendo

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} - \sum_{i=1}^m \lambda_i A_{ij} = Q'_j \quad (j = 1, \dots, n) \quad (3.5.20)$$

Estas n equações em conjunto com as m equações de vínculo

$$\sum_{j=1}^n A_{ij}(q_1, \dots, q_n, t) \dot{q}_j = a_i(q_1, \dots, q_n, t) \quad (i = 1, \dots, m) \quad (3.5.21)$$

formam um sistema de n+m equações do movimento.

5. 1. Exemplo de formulação das equações de Lagrange - Pêndulo Duplo

Consideremos, como exemplo, o problema do pêndulo duplo, descrito na Figura 3.1. O sistema é composto de dois corpos A e B que se movem no plano xy. Onde θ_1 é o ângulo de rotação relativo entre o corpo A e a vertical, e θ_2 é o ângulo de rotação relativo entre o corpo B e o corpo A.

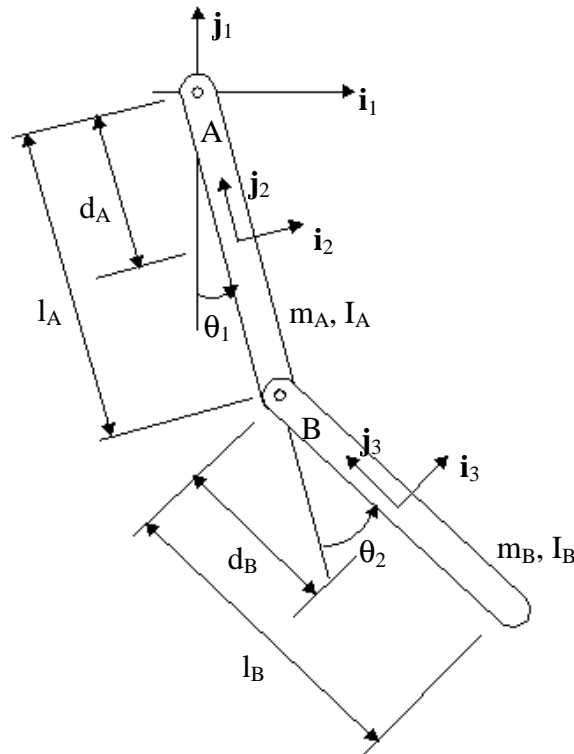


Figura 3.1 - Pêndulo duplo

O corpo A possui massa m_A , momento de inércia I_A e comprimento $l_A=2d_A$ e o corpo B possui massa m_B , momento de inércia I_B e comprimento $l_B=2d_B$. Este sistema possui dois graus de liberdade e definiremos como suas coordenadas generalizadas os ângulos de rotação θ_1 e θ_2 . Em seguida, vamos apresentar os passos para derivar as equações do movimento utilizando as equações de Lagrange.

1) Posição do centro de massa dos corpos em termos das coordenadas generalizadas

$$\begin{aligned} x_A &= d_A \sin \theta_1 & y_A &= -d_A \cos \theta_1 \\ x_B &= l_A \sin \theta_1 + d_B \sin(\theta_1 + \theta_2) & y_B &= -l_A \cos \theta_1 - d_B \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{aligned}$$

2) Velocidade do centro de massa dos corpos em termos das coordenadas generalizadas e suas derivadas

$$\begin{aligned} \dot{x}_A &= d_A \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 & \dot{y}_A &= d_A \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 \\ \dot{x}_B &= l_A \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + d_B (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \cos(\theta_1 + \theta_2) & \dot{y}_B &= l_A \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 + d_B (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \sin(\theta_1 + \theta_2) \end{aligned}$$

3) Energia Cinética $T = T_A + T_B$

$$\begin{aligned}
T_A &= \frac{1}{2} I_A \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_A (\dot{x}_A^2 + \dot{y}_A^2) = \\
&= \frac{1}{2} I_A \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{8} m_A l_A^2 \dot{\theta}_1^2 = \frac{1}{2} (I_A + m_A d_A^2) \dot{\theta}_1^2 \\
T_B &= \frac{1}{2} I_B (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 + \frac{1}{2} m_B (\dot{x}_B^2 + \dot{y}_B^2) = \\
&= \frac{1}{2} I_B (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 + \frac{1}{2} m_B \left[l_A^2 \dot{\theta}_1^2 + d_B^2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 + l_A l_B \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \cos \theta_2 \right]
\end{aligned}$$

4) Energia Potencial $V = V_A + V_B$

$$\begin{aligned}
V_A &= -m_A g d_A \cos \theta_1 \\
V_B &= -m_B g [l_A \cos \theta_1 + d_B \cos(\theta_1 + \theta_2)]
\end{aligned}$$

5) Lagrangeano $L = T - V$

$$\begin{aligned}
L &= \frac{1}{2} [I_A + (m_A + 2m_B) d_A^2 + I_B + m_B d_B^2 + m_B l_A l_B \cos \theta_2] \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} (I_B + m_B d_B^2) \dot{\theta}_2^2 + \\
&+ (I_B + m_B d_B^2 + m_B d_A l_B \cos \theta_2) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + (m_A + 2m_B) g d_A \cos \theta_1 + m_B g d_B \cos(\theta_1 + \theta_2)
\end{aligned}$$

6) Equações de Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q'_j \quad (j = 1, \dots, n)$$

Substituindo L na equação acima, obtemos o seguinte sistema de segunda ordem

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix}$$

onde

$$M_{11} = I_A + m_A d_A^2 + m_B l_A^2 + I_B + m_B d_B^2 + m_B l_A l_B \cos \theta_2$$

$$M_{12} = M_{21} = I_B + m_B d_B^2 + m_B d_A l_B \cos \theta_2$$

$$M_{22} = I_B + m_B d_B^2$$

$$G_1 = m_B l_A l_B \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 + m_B d_A l_B \dot{\theta}_2^2 \sin \theta_2 - m_A g d_A \sin \theta_1 - m_B g l_A \sin \theta_1 + \\ - m_B g d_B \sin(\theta_1 + \theta_2)$$

$$G_2 = -m_B d_A l_B \dot{\theta}_1^2 \sin \theta_2 - m_B g d_B \sin(\theta_1 + \theta_2)$$

6. EQUAÇÕES DE MAGGI-KANE

Na década de 1970, quando se começou a estudar aeronaves, manipuladores robóticos e sistemas dinâmicos complexos, utilizando a dinâmica de multicorpos, foi constatado que os métodos clássicos de formulação das equações do movimento como os métodos de Newton, Lagrange e Hamilton, todos datando do século XVIII ou menos, não mais eram satisfatórios. Os métodos clássicos para estes tipos de problemas exigiam quantidades enormes de tempo dos analistas e das máquinas para formulação das equações do movimento, e a forma final das equações tornava as soluções e análises numéricas muito difíceis e demoradas.

O método de Maggi-Kane para formular as equações do movimento apresenta características básicas que facilitam demasiadamente a formulação. O método centra sua atenção em movimentos ao invés de configurações, o que facilita a análise das equações. Enquanto as equações de Lagrange dão origem a equações diferenciais envolvendo as coordenadas generalizadas e suas derivadas, no método de Maggi-Kane, as equações de movimento envolvem as coordenadas generalizadas e as velocidades generalizadas. Onde as velocidades generalizadas não são necessariamente as derivadas das coordenadas generalizadas, mas são funções destas derivadas, o que permite ao analista escolher estas velocidades generalizadas de modo que elas tenham um significado físico mensurável e que facilitem a análise, como por exemplo, as próprias velocidades angulares de um corpo rígido.

As equações de Maggi-Kane apresentam como uma de suas principais vantagens, o tratamento de forças de reação. O método se baseia em escrever os vetores de velocidade e velocidade angular como uma combinação de produtos de variáveis cinemáticas independentes, chamadas velocidades generalizadas, e vetores de velocidades parciais. As equações de Maggi-Kane podem ser caracterizadas como a projeção das equações de Newton sobre as velocidades parciais. No método de Maggi-Kane, se desejado, as forças de reação que não produzem trabalho são eliminadas automaticamente, evitando assim a necessidade de se incluí-las no cálculo como nas equações de Newton-Euler ou da utilização de multiplicadores de Lagrange como nas equações de Lagrange. Apesar de que, pode-se utilizar multiplicadores de Lagrange nas equações de Maggi-Kane em algumas situações como, por exemplo, quando se deseja evitar o trabalho de escolher velocidades generalizadas independentes ou quando se deseja calcular as forças de reação.

Consideremos um sistema dinâmico composto por NP partículas $P_r (r = 1, \dots, NP)$ cuja configuração é representada por n coordenadas generalizadas $q_j (j = 1, \dots, n)$. Se as n

coordenadas generalizadas forem independentes, o número de graus de liberdade do sistema é igual a n . Porém, normalmente, o sistema está submetido a vínculos que, de maneira geral, podem ser representados pela seguinte equação:

$$\sum_{j=1}^n A_{ij}(q_1, \dots, q_n, t) \dot{q}_j = a_i(q_1, \dots, q_n, t) \quad (i = 1, \dots, m) \quad (3.6.1)$$

As Eqs. (3.6.1) são equações de vínculo não-holônomas se não forem redutíveis a equações em função apenas de q_j e t . Os sistemas holônomos são aqueles tais que as equações de vínculo (3.6.1) podem ser reduzidas a equações em função apenas de q_j e t , ou no caso em que $A = [0]_{m \times n}$. Para os sistemas holônomos, as equações de vínculo podem ser escritas da seguinte forma:

$$f_i(q_1, \dots, q_n, t) = 0 \quad (i = 1, \dots, m) \quad (3.6.2)$$

Para os sistemas holônomos, é possível eliminar m coordenadas generalizadas através de (3.6.2), obtendo assim um sistema com NS coordenadas generalizadas independentes, procedimento que é denominado método de Maggi-Kane com vínculos implícitos, onde

$$NS = n - m \quad (3.6.3)$$

Outra maneira é resolver o sistema com n coordenadas generalizadas dependentes e m equações de vínculo, através do método de multiplicadores de Lagrange, denominado método de Maggi-Kane com vínculos explícitos. No caso, das equações de Maggi-Kane, o mesmo procedimento utilizado para sistemas holônomos pode ser usado para os não-holônomos, devido à possibilidade de se escolher velocidades generalizadas que não necessariamente são as derivadas das coordenadas generalizadas. O segundo método é utilizado, normalmente, quando se pretende determinar as forças de reação.

6. 1. Método de Maggi-Kane com Vínculos Implícitos

Seja $NS = NG$ o número de graus de liberdade do sistema. Devido às equações de vínculo apenas NS das derivadas das coordenadas generalizadas \dot{q}_j ($j = 1, \dots, n$) são independentes e vamos supor que sejam as primeiras NS ($\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_{NS}$). Se as últimas m colunas de A formarem uma matriz inversível, podemos escrever a relação (3.6.1) da seguinte forma:

$$\dot{q}_{NS+i} = \sum_{j=1}^{NS} C_{ij}(q_1, \dots, q_n, t) \dot{q}_j + d_i(q_1, \dots, q_n, t) \quad (i = 1, \dots, m) \quad (3.6.4)$$

Sejam as NS velocidades generalizadas w_p ($p = 1, \dots, NS$) definidas por:

$$w_p = \sum_{j=1}^{NS} W_{pj}(q_1, \dots, q_n, t) \dot{q}_j + w'_p(q_1, \dots, q_n, t) \quad (p = 1, \dots, NS) \quad (3.6.5)$$

onde a matriz W é inversível, e a relação inversa pode ser escrita da seguinte forma:

$$\dot{q}_j = \sum_{p=1}^{NS} Z_{jp}(w_p - w'_p) \quad (j = 1, \dots, NS) \quad (3.6.6)$$

Seja \mathbf{x}^{Pr} o vetor de posição da partícula P_r . A velocidade absoluta de P_r pode ser escrita da seguinte forma:

$$\mathbf{v}^{Pr} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{x}^{Pr}}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \mathbf{x}^{Pr}}{\partial t} \quad (3.6.7)$$

Substituindo (3.6.4) na equação acima:

$$\mathbf{v}^{Pr} = \sum_{j=1}^{NS} \left(\frac{\partial \mathbf{x}^{Pr}}{\partial q_j} + \sum_{i=1}^m \frac{\partial \mathbf{x}^{Pr}}{\partial q_{NS+i}} C_{ij} \right) \dot{q}_j + \sum_{i=1}^m \frac{\partial \mathbf{x}^{Pr}}{\partial q_{NS+i}} d_i + \frac{\partial \mathbf{x}^{Pr}}{\partial t} \quad (3.6.8)$$

Definindo

$$\mathbf{v}_{q_j}^{Pr} = \frac{\partial \mathbf{x}^{Pr}}{\partial q_j} + \sum_{i=1}^m \frac{\partial \mathbf{x}^{Pr}}{\partial q_{NS+i}} C_{ij} \quad (j = 1, \dots, NS) \quad (3.6.9)$$

Utilizando (3.6.6), obtemos:

$$\mathbf{v}^{P_r} = \sum_{p=1}^{NS} \mathbf{v}_p^{P_r} w_p + \mathbf{v}_t^{P_r} \quad (3.6.10)$$

onde

$$\mathbf{v}_p^{P_r} = \sum_{j=1}^{NS} \mathbf{v}_{\dot{q}_j}^{P_r} Z_{jp} \quad (p = 1, \dots, NS) \quad (3.6.11)$$

$$\mathbf{v}_t^{P_r} = - \sum_{p=1}^{NS} \mathbf{v}_p^{P_r} w'_p + \sum_{i=1}^m \frac{\partial \mathbf{x}^{P_r}}{\partial q_{NS+i}} d_i + \frac{\partial \mathbf{x}^{P_r}}{\partial t} \quad (3.6.12)$$

onde a relação inversa de (3.6.11) pode ser escrita como:

$$\mathbf{v}_{\dot{q}_j}^{P_r} = \sum_{p=1}^{NS} \mathbf{v}_p^{P_r} W_{pj} \quad (j = 1, \dots, NS) \quad (3.6.13)$$

Os vetores $\mathbf{v}_p^{P_r}$ ($p = 1, \dots, NS$) são chamados de velocidades parciais do ponto P_r relativas à w_p . As velocidades parciais constituem uma importante definição no método de Maggi-Kane, pois elas que permitem escrever a forma final das equações de Maggi-Kane. Na prática, as velocidades parciais não são obtidas pela Eq. (3.6.11) e sim analisando a expressão da velocidade absoluta de uma partícula (3.6.10), donde as velocidades parciais serão

$$\mathbf{v}_p^{P_r} = \frac{\partial \mathbf{v}^{P_r}}{\partial w_p} \quad (p = 1, \dots, NS) \quad (3.6.14)$$

As velocidades parciais só precisam ser calculadas em alguns pontos, normalmente, nos centros de massa dos corpos e nos pontos de aplicação de força.

Escrevendo o princípio de d'Alembert para a partícula P_r :

$$\sum_{r=1}^{NP} (\mathbf{F}_a^{P_r} - m^{P_r} \mathbf{a}^{P_r}) \cdot \delta \mathbf{x}^{P_r} = 0 \quad (3.6.15)$$

já que, as forças de reação \mathbf{F}_c não realizam trabalho

$$\sum_{r=1}^{NP} \mathbf{F}_c^{Pr} \cdot \delta \mathbf{x}^{Pr} = 0 \quad (3.6.16)$$

O vetor de deslocamentos virtuais pode ser escrito da seguinte forma

$$\delta \mathbf{x}^{Pr} = \sum_{j=1}^{NS} \mathbf{V}_{\dot{q}_j}^{Pr} \delta q_j \quad (3.6.17)$$

Podemos reescrever a equação (3.6.15) da seguinte forma

$$\sum_{j=1}^{NS} \left(\sum_{r=1}^{NP} (\mathbf{F}_a^{Pr} - m^{Pr} \mathbf{a}^{Pr}) \cdot \mathbf{V}_{\dot{q}_j}^{Pr} \right) \delta q_j = 0 \quad (3.6.18)$$

Como a equação acima é satisfeita para valores arbitrários de δq_j ($j = 1, \dots, ns$), podemos escrever:

$$\sum_{r=1}^{NP} (\mathbf{F}_a^{Pr} - m^{Pr} \mathbf{a}^{Pr}) \cdot \mathbf{V}_{\dot{q}_j}^{Pr} = 0 \quad (j = 1, \dots, NS) \quad (3.6.19)$$

Utilizando a equação (3.6.13), podemos reescrever a equação acima em função das velocidades parciais:

$$\sum_{r=1}^{NP} (\mathbf{F}_a^{Pr} - m^{Pr} \mathbf{a}^{Pr}) \cdot \mathbf{V}_p^{Pr} = 0 \quad (p = 1, \dots, NS) \quad (3.6.20)$$

Separando os dois termos da equação acima, definiremos o primeiro como forças ativas generalizadas do sistema, relativas à w_p ,

$$\mathbf{F}_p = \sum_{r=1}^{NP} \mathbf{F}_a^{P_r} \cdot \mathbf{V}_p^{P_r} \quad (p = 1, \dots, NS) \quad (3.6.21)$$

e o segundo como forças inerciais generalizadas do sistema, relativas à w_p ,

$$\mathbf{F}_p^* = - \sum_{r=1}^{NP} m^{P_r} \mathbf{a}^{P_r} \cdot \mathbf{V}_p^{P_r} \quad (p = 1, \dots, NS) \quad (3.6.22)$$

Utizando as equações (3.6.20) , (3.6.21) e (3.6.22) , podemos escrever as equações de Maggi-Kane da seguinte forma:

$$\mathbf{F}_p + \mathbf{F}_p^* = 0 \quad (p = 1, \dots, NS) \quad (3.6.23)$$

De forma que teremos NS equações de movimento. Nas quais, no caso não-holônomo, as m equações de vínculo já estão incluídas. É importante observar que as NS equações de movimento resultantes são equações escalares.

A contribuição de uma força é dada por suas projeções sobre as velocidades parciais do ponto de aplicação, assim como, a contribuição de um momento aplicado em um corpo é sua projeção sobre a velocidade angular parcial do corpo. De forma que, as velocidades parciais são o ponto principal da metodologia de Maggi-Kane. Por esta razão, é importante que as velocidades parciais sejam escritas da forma mais simples possível, consequentemente, a escolha das velocidades generalizadas tem uma enorme influência na complexidade da forma final da equação. É importante escrever a velocidade de um corpo, sempre, na base fixa neste corpo, já que as forças aplicadas neste corpo também estarão escritas nesta base. Deve-se evitar escrever as velocidades de todos os corpos em uma única base, já que esta atitude dá origem à expressões trigonométricas complicadas que, nessa metodologia, não são necessárias.

Consideremos, agora, um sistema composto por NB corpos rígidos. Seja P_r ($r = 1, \dots, NP_k$) uma partícula do corpo rígido k ($k = 1, \dots, NB$).

Seja R_k um ponto arbitrário do corpo rígido k e seja \mathbf{t}^k um triedro ortogonal fixo no corpo k com origem em R_k . A velocidade da partícula P_r pode ser escrita da seguinte forma:

$$\mathbf{v}^{P_r} = \mathbf{v}^{R_k} + \boldsymbol{\Omega}^k \times \mathbf{r}^{P_r} \quad (r = 1, \dots, NP_k) \quad (3.6.24)$$

onde \mathbf{v}^{R_k} é a velocidade de R_k , $\boldsymbol{\Omega}^k$ é a velocidade angular do referencial fixo \mathbf{t}^k relativa ao referencial inercial \mathbf{t}^0 e \mathbf{r}^{P_r} é o vetor de posição da partícula P_r no referencial \mathbf{t}^k .

Usando a mesma forma utilizada para escrever a velocidade de uma partícula, podemos escrever a velocidade angular do corpo k em função das velocidades generalizadas

$$\Omega^k = \sum_{p=1}^{NS} \Omega_p^k w_p + \Omega_t^k \quad (3.6.25)$$

onde Ω_p^k ($p = 1, \dots, NS$) são as velocidades angulares parciais do corpo k, relativas à w_p .

As velocidades angulares parciais são determinadas analisando a expressão (3.6.25) da velocidade angular do corpo k, donde as velocidades angulares parciais serão

$$\Omega_p^k = \frac{\partial \Omega^k}{\partial w_p} \quad (3.6.26)$$

Das equações (3.6.25), (3.6.24) e (3.6.14), podemos mostrar que as velocidades parciais de P_r e R_k são relacionadas através da seguinte expressão

$$\mathbf{V}_p^{P_r} = \mathbf{V}_p^{R_k} + \Omega_p^k \times \mathbf{r}^{P_r} \quad (r = 1, \dots, NP_k; p = 1, \dots, NS) \quad (3.6.27)$$

Seja \mathbf{F}^{P_r} ($r = 1, \dots, NP_k$) a resultante das forças exercidas sobre a partícula P_r do corpo k. A contribuição do corpo k à força ativa generalizada \mathbf{F}_p pode ser escrita como

$$\mathbf{F}_p^k = \sum_{r=1}^{NP_k} \mathbf{F}^{P_r} \cdot \mathbf{V}_p^{P_r} \quad (p = 1, \dots, NS) \quad (3.6.28)$$

Substituindo a Eq. (3.6.27) na Eq. (3.6.28), obtemos

$$\mathbf{F}_p^k = \mathbf{V}_p^{R_k} \cdot \sum_{r=1}^{NP_k} \mathbf{F}^{P_r} + \Omega_p^k \cdot \sum_{r=1}^{NP_k} \mathbf{r}^{P_r} \times \mathbf{F}^{P_r} \quad (p = 1, \dots, NS) \quad (3.6.29)$$

No primeiro somatório da equação acima, todas as forças de reação internas se anulam duas a duas, assim como no segundo somatório, todos os momentos causados por estas forças também se anulam. Sejam \mathbf{F}^k a resultante do somatório das forças exercidas sobre o corpo k e

\mathbf{M}^{R_k} a resultante dos momentos causados por estas forças com relação ao ponto R_k . Podemos escrever a Eq. (3.6.29) como

$$\mathbf{F}_p^k = \mathbf{V}_p^{R_k} \cdot \mathbf{F}^{R_k} + \mathbf{\Omega}_p^k \cdot \mathbf{M}^{R_k} \quad (p = 1, \dots, NS) \quad (3.6.30)$$

Porém, pode ser que existam NP_{ek} pontos P_r ($r = 1, \dots, NP_{ek}$) do corpo sobre os quais são exercidas forças externas $\mathbf{F}_e^{P_r}$, assim como, pode ser que existam momentos externos aplicados ao corpo k cujo somatório seja \mathbf{M}_e^k . Desta maneira, podemos reescrever a expressão da força ativa generalizada da seguinte forma:

$$\mathbf{F}_p^k = \sum_{r=1}^{NP_{ek}} \mathbf{V}_p^{P_r} \cdot \mathbf{F}_e^{P_r} + \mathbf{\Omega}_p^k \cdot \mathbf{M}_e^k \quad (p = 1, \dots, NS) \quad (3.6.31)$$

Desta forma, devemos calcular as velocidades parciais apenas dos pontos de aplicação das forças ativas e as velocidades angulares parciais apenas dos corpos sobre os quais são exercidos momentos ativos.

A contribuição do corpo k à força inercial generalizada \mathbf{F}_p^* pode ser escrita como:

$$\mathbf{F}_p^{*k} = - \sum_{r=1}^{NP_k} m^{P_r} \mathbf{V}_p^{P_r} \cdot \mathbf{a}^{P_r} \quad (p = 1, \dots, NS) \quad (3.6.32)$$

Substituindo (3.6.27) em (3.6.32), obtemos:

$$\mathbf{F}_p^{*k} = - \mathbf{V}_p^{R_k} \cdot \sum_{r=1}^{NP_k} m^{P_r} \mathbf{a}^{P_r} - \mathbf{\Omega}_p^k \cdot \sum_{r=1}^{NP_k} m^{P_r} \mathbf{r}^{P_r} \times \mathbf{a}^{P_r} \quad (p = 1, \dots, NS) \quad (3.6.33)$$

Seja G_k o centro de massa do corpo k e m^k a massa do corpo k . Podemos escrever

$$\sum_{r=1}^{NP_k} m^{P_r} \mathbf{a}^{P_r} = m^k \mathbf{a}^{G_k} \quad (3.6.34)$$

Sabemos também que

$$\mathbf{a}^{P_r} = \mathbf{a}^{R_k} + \ddot{\mathbf{r}}^{P_r} \quad (r = 1, \dots, NP_k) \quad (3.6.35)$$

portanto

$$\sum_{r=1}^{NP_k} m^{P_r} \mathbf{r}^{P_r} \times \mathbf{a}^{P_r} = m^k \mathbf{r}^{G_k} \times \mathbf{a}^{R_k} + \dot{\mathbf{H}}^{R_k} \quad (r = 1, \dots, NP_k) \quad (3.6.36)$$

onde \mathbf{r}^{G_k} é o vetor de posição do centro de massa G_k no referencial \mathbf{t}^k e \mathbf{H}^{R_k} é o momento angular do corpo k com relação ao ponto R_k , definido por:

$$\mathbf{H}^{R_k} = \sum_{r=1}^{NP_k} m^{P_r} \mathbf{r}^{P_r} \times \dot{\mathbf{r}}^{P_r} \quad (3.6.37)$$

Podemos escrever o momento angular também da seguinte forma:

$$\mathbf{H}^{R_k} = \mathbf{J}^{R_k} \cdot \boldsymbol{\Omega}^k \quad (3.6.38)$$

e

$$\dot{\mathbf{H}}^{R_k} = \mathbf{J}^{R_k} \cdot \dot{\boldsymbol{\Omega}}^k + \boldsymbol{\Omega}^k \times (\mathbf{J}^{R_k} \cdot \boldsymbol{\Omega}^k) \quad (3.6.39)$$

onde \mathbf{J}^{R_k} é o tensor de inércia do corpo k .

Substituindo as equações (3.6.34) e (3.6.36) na equação (3.6.33), obtemos:

$$\mathbf{F}_p^{*k} = -m^k \mathbf{V}_p^{R_k} \cdot \mathbf{a}^{G_k} - m^k \boldsymbol{\Omega}_p^k \cdot (\mathbf{r}^{G_k} \times \mathbf{a}^{R_k}) - \boldsymbol{\Omega}_p^k \cdot \dot{\mathbf{H}}^{R_k} \quad (p = 1, \dots, NS) \quad (3.6.40)$$

Podemos mostrar que

$$\dot{\mathbf{H}}^{R_k} = \dot{\mathbf{H}}^{G_k} + m^k \mathbf{r}^{G_k} \times \ddot{\mathbf{r}}^{G_k} \quad (3.6.41)$$

Substituindo (3.6.41) em (3.6.40) e utilizando a relação (3.6.27) , obtemos a forma final das forças inerciais generalizadas

$$\mathbf{F}_p^{*k} = -m^k \mathbf{V}_p^{G_k} \cdot \mathbf{a}^{G_k} - \boldsymbol{\Omega}_p^k \cdot \dot{\mathbf{H}}^{G_k} \quad (p = 1, \dots, NS) \quad (3.6.42)$$

onde

$$\dot{\mathbf{H}}^{G_k} = \mathbf{J}^{G_k} \cdot \dot{\boldsymbol{\Omega}}_p^k + \boldsymbol{\Omega}_p^k \times (\mathbf{J}^{G_k} \cdot \boldsymbol{\Omega}_p^k) \quad (3.6.43)$$

Para o cálculo das forças inerciais generalizadas, somente as velocidades angulares parciais e as velocidades parciais dos centros de massa dos corpos precisam ser calculadas.

6. 2. Método de Maggi-Kane com Vínculos Explícitos

Seja $NS = n$ o número de coordenadas generalizadas do sistema. Diferente do método de Maggi-Kane com vínculos implícitos, vamos escrever NS velocidades generalizadas w_p ($p = 1, \dots, NS$) definidas por

$$w_p = \sum_{j=1}^{NS} W_{pj}(q_1, \dots, q_n, t) \dot{q}_j + w'_p(q_1, \dots, q_n, t) \quad (p = 1, \dots, NS) \quad (3.6.44)$$

onde a matriz W é inversível, e a relação inversa pode ser escrita da seguinte forma:

$$\dot{q}_j = \sum_{p=1}^{NS} Z_{jp}(w_p - w'_p) \quad (3.6.45)$$

A velocidade absoluta de P_r pode ser escrita da seguinte forma:

$$\mathbf{v}^{P_r} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{x}^{P_r}}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \mathbf{x}^{P_r}}{\partial t} \quad (3.6.46)$$

Substituindo (3.6.45) em (3.6.46) , obtemos:

$$\mathbf{v}^{P_r} = \sum_{p=1}^{NS} \mathbf{v}_p^{P_r} w_p + \mathbf{v}_t^{P_r} \quad (3.6.47)$$

onde

$$\mathbf{v}_p^{P_r} = \sum_{j=1}^{NS} \frac{\partial \mathbf{x}^{P_r}}{\partial q_j} Z_{jp} \quad (p = 1, \dots, NS) \quad (3.6.48)$$

$$\mathbf{v}_t^{P_r} = - \sum_{p=1}^{NS} \mathbf{v}_p^{P_r} w'_p + \frac{\partial \mathbf{x}^{P_r}}{\partial t} \quad (3.6.49)$$

e

$$\frac{\partial \mathbf{x}^{P_r}}{\partial q_j} = \sum_{p=1}^{NS} \mathbf{v}_p^{P_r} W_{jp} \quad (j = 1, \dots, NS) \quad (3.6.50)$$

Podemos reescrever o princípio de d'Alembert

$$\sum_{r=1}^{NP} (\mathbf{F}_a^{P_r} - m^{P_r} \mathbf{a}^{P_r}) \cdot \delta \mathbf{x}^{P_r} = 0 \quad (3.6.51)$$

onde

$$\delta \mathbf{x}^{P_r} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{x}^{P_r}}{\partial q_j} \delta q_j \quad (r = 1, \dots, NP) \quad (3.6.52)$$

Os deslocamentos virtuais $\delta q_1, \dots, \delta q_{NS}$ devem satisfazer as equações de vínculo instantâneas

$$\sum_{j=1}^{NS} A_{ij} \delta q_j = 0 \quad (i = 1, \dots, m) \quad (3.6.53)$$

Por causa destas m equações de vínculo, somente $NG = NS - m$ dos δq_j ($j = 1, \dots, NS$) são independentes e vamos supor que eles serão os NG primeiros $\delta q_1, \dots, \delta q_{NG}$. A matriz $(m \times m)$ formada pelas últimas m colunas da matriz A é inversível.

Introduziremos, agora, m multiplicadores de Lagrange λ_i ($i = 1, \dots, m$) arbitrários. De forma que podemos escrever a Eq. (3.6.53) da seguinte forma

$$\sum_{j=1}^{NS} \left(\sum_{i=1}^m \lambda_i A_{ij} \right) \delta q_j = 0 \quad (3.6.54)$$

Substituindo (3.6.52) em (3.6.51) e somando com (3.6.54), obtemos

$$\sum_{j=1}^{NS} \left(\sum_{r=1}^{NP} (\mathbf{F}_a^{P_r} - m^{P_r} \mathbf{a}^{P_r}) \cdot \frac{\partial \mathbf{x}^{P_r}}{\partial \mathbf{q}_j} + \sum_{i=1}^m \lambda_i A_{ij} \right) \delta q_j = 0 \quad (3.6.55)$$

Sendo que $\delta q_1, \dots, \delta q_{NS}$ não são independentes e não podem ter valores arbitrários. Porém, como os multiplicadores $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ são arbitrários, podemos escolhê-los de modo que

$$\sum_{r=1}^{NP} (\mathbf{F}_a^{P_r} - m^{P_r} \mathbf{a}^{P_r}) \cdot \frac{\partial \mathbf{x}^{P_r}}{\partial \mathbf{q}_j} + \sum_{i=1}^m \lambda_i A_{ij} = 0 \quad (j = NG + 1, \dots, NS) \quad (3.6.56)$$

De (3.6.55) e (3.6.56), podemos escrever

$$\sum_{j=1}^{NG} \left(\sum_{r=1}^{NP} (\mathbf{F}_a^{P_r} - m^{P_r} \mathbf{a}^{P_r}) \cdot \frac{\partial \mathbf{x}^{P_r}}{\partial \mathbf{q}_j} + \sum_{i=1}^m \lambda_i A_{ij} \right) \delta q_j = 0 \quad (3.6.57)$$

Como $\delta q_1, \dots, \delta q_{NG}$ são independentes, podem ter valores arbitrários e a Eq. (3.6.57) só será satisfeita se

$$\sum_{r=1}^{NP} (\mathbf{F}_a^{P_r} - m^{P_r} \mathbf{a}^{P_r}) \cdot \frac{\partial \mathbf{x}^{P_r}}{\partial \mathbf{q}_j} + \sum_{i=1}^m \lambda_i A_{ij} = 0 \quad (j = 1, \dots, NG) \quad (3.6.58)$$

As Eqs. (3.6.56) e (3.6.58) constituem NS equações

$$\sum_{r=1}^{NP} (\mathbf{F}_a^{P_r} - m^{P_r} \mathbf{a}^{P_r}) \cdot \frac{\partial \mathbf{x}^{P_r}}{\partial \mathbf{q}_j} + \sum_{i=1}^m \lambda_i A_{ij} = 0 \quad (j = 1, \dots, NS) \quad (3.6.59)$$

Multiplicando (3.6.59) por Z_{jp} , adicionando as NS equações resultantes e lembrando (3.6.48), obtemos

$$\sum_{r=1}^{NP} (\mathbf{F}_a^{P_r} - m^{P_r} \mathbf{a}^{P_r}) \mathbf{V}_p^{P_r} + \sum_{i=1}^m \lambda_i \left(\sum_{j=1}^n A_{ij} Z_{jp} \right) = 0 \quad (p = 1, \dots, NS) \quad (3.6.60)$$

De forma que, podemos escrever as equações de Maggi-Kane com multiplicadores de Lagrange através da seguinte expressão:

$$\mathbf{F}_p + \mathbf{F}_p^* + \sum_{i=1}^m \lambda_i \mathbf{B}_{ip} = 0 \quad (p = 1, \dots, NS) \quad (3.6.61)$$

onde

$$\mathbf{F}_p = \sum_{r=1}^{NP} \mathbf{V}_p^{P_r} \mathbf{F}_a^{P_r} \quad (p = 1, \dots, NS) \quad (3.6.62)$$

$$\mathbf{F}_p^* = - \sum_{r=1}^{NP} m^{P_r} \mathbf{V}_p^{P_r} \mathbf{a}^{P_r} \quad (p = 1, \dots, NS) \quad (3.6.63)$$

$$\mathbf{B}_{ip} = \sum_{j=1}^{NS} A_{ij} Z_{jp} \quad (i = 1, \dots, m; p = 1, \dots, NS) \quad (3.6.64)$$

As equações de Maggi-Kane (3.6.61) fornecem NS equações para NS + m incógnitas $(w_1, \dots, w_{NS}, \lambda_1, \dots, \lambda_m)$, portanto estas equações devem ser acompanhadas das m equações de vínculo que podem ser expressas em termos de w_p ($p = 1, \dots, NS$) por

$$\sum_{j=1}^{NS} B_{ip} w_p = b_i \quad (i = 1, \dots, m) \quad (3.6.65)$$

onde

$$b_i = a_i + \sum_{p=1}^{NS} B_{ip} w'_p \quad (i = 1, \dots, m) \quad (3.6.66)$$

Para calcularmos as forças de reação, relembremos a segunda lei de Newton, expressando a força externa em força ativa e força de vínculo:

$$\mathbf{F}_a^{P_r} - m^{P_r} \mathbf{a}^{P_r} = -\mathbf{F}_c^{P_r} \quad (r = 1, \dots, NP) \quad (3.6.67)$$

Substituindo (3.6.67) em (3.6.60), obtemos:

$$\sum_{r=1}^{NP} \mathbf{V}_p^{P_r} \cdot \mathbf{F}_c^{P_r} = \sum_{i=1}^m \lambda_i B_{ip} \quad (p = 1, \dots, NS) \quad (3.6.68)$$

A contribuição das forças de reação para as equações de Maggi-Kane é chamada de força de reação generalizada relativa à w_p e é definida por:

$$F_p^c = \sum_{r=1}^{NP} \mathbf{V}_p^{P_r} \cdot \mathbf{F}_c^{P_r} = \sum_{i=1}^m \lambda_i B_{ip} \quad (p = 1, \dots, NS) \quad (3.6.69)$$

e, ao contrário das equações de Maggi-Kane sem multiplicadores de Lagrange, estas forças não são nulas já que as velocidades generalizadas w_1, \dots, w_n , assim como as derivadas das coordenadas generalizadas $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n$, não são independentes.

6. 3. Roteiro para a formulação das equações do movimento via Maggi-Kane

Apresentaremos nesta seção, um roteiro com os passos necessários para derivar as equações do movimento utilizando o método de Maggi-Kane.

1. Escolha das coordenadas generalizadas q_1, \dots, q_n e das velocidades generalizadas w_1, \dots, w_{NS} ;

2. Escrever, em termos das velocidades generalizadas w_p , as velocidades angulares Ω^k dos corpos;
3. Escrever, em termos das velocidades generalizadas w_p , as velocidades \mathbf{v}^{G_k} do centro de massa dos corpos e as velocidades \mathbf{v}^{P_r} dos pontos P_r ($r=1, \dots, NP_a$) de aplicação de forças ativas;
4. Identificação das velocidades parciais $\mathbf{V}_p^{G_k}$ e $\mathbf{V}_p^{P_r}$ e das velocidades angulares parciais Ω_p^k ;
5. Se desejado, linearizar as velocidades, as velocidades angulares, as velocidades parciais, as velocidades angulares parciais e as equações de vínculo;
6. Cálculo das acelerações \mathbf{a}^{G_k} do centro de massa dos corpos;
7. Cálculo das acelerações angulares $\dot{\Omega}^k$ dos corpos;
8. Cálculo das forças inerciais e dos momentos inerciais dos corpos:

$$\mathbf{F}^{*k} = -m^k \mathbf{a}^{G_k} \quad (k = 1, \dots, NB)$$

$$\mathbf{M}^{*k} = \dot{\mathbf{H}}^{G_k} = -\mathbf{J}^{G_k} \dot{\Omega}^k - \dot{\Omega}^k \times (\mathbf{J}^{G_k} \cdot \Omega^k) \quad (k = 1, \dots, NB)$$

9. Cálculo das forças ativas $\mathbf{F}_a^{P_r}$ aplicadas nos pontos P_r e dos momentos ativos \mathbf{M}_a^k aplicados nos corpos k ($k=1, \dots, NB$):
10. Cálculo das forças inerciais generalizadas:

$$F_p^* = \sum_{k=1}^{NB} (\mathbf{V}_p^{G_k} \cdot \mathbf{F}^{*k} + \Omega_p^k \cdot \mathbf{M}^{*k}) \quad (p = 1, \dots, NS)$$

11. Cálculo das forças ativas generalizadas:

$$F_p = \sum_{r=1}^{NP_a} \mathbf{V}_p^{P_r} \cdot \mathbf{F}_a^{P_r} + \sum_{k=1}^{NB} \Omega_p^k \cdot \mathbf{M}_a^k \quad (p = 1, \dots, NS)$$

12. Escrever as equações do movimento:

- Se $NS=NG$:

$$F_p + F_p^* = 0 \quad (p = 1, \dots, NS)$$

- Se $NS=n$:

$$F_p + F_p^* + \sum_{i=1}^m \lambda_i B_{ip} = 0 \quad (p = 1, \dots, NS)$$

6. 4. Exemplo de formulação das equações de Maggi-Kane - Pêndulo Duplo

Consideremos, como exemplo, o problema do pêndulo duplo, descrito na Figura 3.1, formulado anteriormente através das equações de Lagrange. Para formular este problema utilizando o método de Maggi-Kane, vamos seguir o roteiro apresentado na seção anterior.

1a.Coordenadas generalizadas: θ_1 e θ_2

1b.Velocidades generalizadas:

$$\begin{cases} w_1 = \dot{\theta}_1 \\ w_2 = \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \end{cases}$$

2.Velocidades angulares:

$$\Omega^A = w_1 \mathbf{k}$$

$$\Omega^B = w_2 \mathbf{k}$$

3.Velocidades dos centros de massa:

$$\mathbf{v}^{G_A} = w_1 d_A \mathbf{i}_2$$

$$\mathbf{v}^{G_B} = w_1 l_A \mathbf{i}_2 + w_2 d_B \mathbf{i}_3$$

4.Velocidades parciais e velocidades angulares parciais:

| | p = 1 | p = 2 |
|----------------------|--------------------|--------------------|
| Ω_p^A | \mathbf{k} | 0 |
| Ω_p^B | 0 | \mathbf{k} |
| $\mathbf{v}_p^{G_A}$ | $d_A \mathbf{i}_2$ | 0 |
| $\mathbf{v}_p^{G_B}$ | $l_A \mathbf{i}_2$ | $d_B \mathbf{i}_3$ |

6.Acelerações dos centros de massa:

$$\mathbf{a}^{G_A} = \dot{w}_1 d_A \mathbf{i}_2 - w_1^2 d_A \mathbf{j}_2$$

$$\mathbf{a}^{G_B} = \dot{w}_1 l_A \mathbf{i}_2 - w_1^2 l_A \mathbf{j}_2 + \dot{w}_2 d_B \mathbf{i}_3 - w_2^2 d_B \mathbf{j}_3$$

7. Acelerações angulares:

$$\dot{\Omega}^A = \dot{w}_1 \mathbf{k}$$

$$\dot{\Omega}^B = \dot{w}_2 \mathbf{k}$$

8a. Forças inerciais:

$$\mathbf{F}^{*A} = -m_A \mathbf{a}^{GA} = -m_A (\dot{w}_1 d_A \mathbf{i}_2 - w_1^2 d_A \mathbf{j}_2)$$

$$\mathbf{F}^{*B} = -m_B \mathbf{a}^{GB} = -m_B (\dot{w}_1 l_A \mathbf{i}_2 - w_1^2 l_A \mathbf{j}_2 + \dot{w}_2 d_B \mathbf{i}_3 - w_2^2 d_B \mathbf{j}_3)$$

8b. Momentos inerciais:

$$\mathbf{M}^{*A} = -\mathbf{J}^{GA} \dot{\Omega}^A - \dot{\Omega}^A \times (\mathbf{J}^{GA} \cdot \Omega^A) = -I_A \dot{w}_1 \mathbf{k}$$

$$\mathbf{M}^{*B} = -\mathbf{J}^{GB} \dot{\Omega}^B - \dot{\Omega}^B \times (\mathbf{J}^{GB} \cdot \Omega^B) = -I_B \dot{w}_2 \mathbf{k}$$

9a. Forças ativas:

$$\mathbf{F}^{GA} = -m_A g \mathbf{j}_1$$

$$\mathbf{F}^{GB} = -m_B g \mathbf{j}_1$$

9b. Momentos ativos:

$$\mathbf{M}^A = 0$$

$$\mathbf{M}^B = 0$$

10. Forças inerciais generalizadas:

$$\begin{aligned} F_1^* &= \mathbf{V}_1^{GA} \cdot \mathbf{F}^{*A} + \Omega_1^A \cdot \mathbf{M}^{*A} + \mathbf{V}_1^{GB} \cdot \mathbf{F}^{*B} + \Omega_1^B \cdot \mathbf{M}^{*B} \\ &= -(I_A + m_A d_A^2 + m_B l_A^2) \dot{w}_1 - m_B l_A d_B \dot{w}_2 \cos \theta_2 + m_B l_A d_B w_2^2 \sin \theta_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_2^* &= \mathbf{V}_2^{GA} \cdot \mathbf{F}^{*A} + \Omega_2^A \cdot \mathbf{M}^{*A} + \mathbf{V}_2^{GB} \cdot \mathbf{F}^{*B} + \Omega_2^B \cdot \mathbf{M}^{*B} \\ &= -(I_B + m_B d_B^2) \dot{w}_2 - m_B l_A d_B \dot{w}_1 \cos \theta_2 - m_B l_A d_B w_1^2 \sin \theta_2 \end{aligned}$$

11. Cálculo das forças ativas generalizadas:

$$\begin{aligned} F_1 &= \mathbf{V}_1^{GA} \cdot \mathbf{F}^{GA} + \Omega_1^A \cdot \mathbf{M}^A + \mathbf{V}_1^{GB} \cdot \mathbf{F}^{GB} + \Omega_1^B \cdot \mathbf{M}^B \\ &= -m_A g d_A \sin \theta_1 - m_B g l_A \sin \theta_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_2 &= \mathbf{V}_2^{GA} \cdot \mathbf{F}^{GA} + \Omega_2^A \cdot \mathbf{M}^A + \mathbf{V}_2^{GB} \cdot \mathbf{F}^{GB} + \Omega_2^B \cdot \mathbf{M}^B \\ &= -m_B g d_B \sin(\theta_1 + \theta_2) \end{aligned}$$

12. Escrever as equações do movimento:

$$F_1 + F_1^* = 0$$

$$F_2 + F_2^* = 0$$

Substituindo as forças generalizadas na equação acima, obtemos o seguinte sistema de equações diferenciais de primeira ordem

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{w}_1 \\ \dot{w}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix}$$

onde

$$M_{11} = I_A + m_A d_A^2 + m_B l_A^2$$

$$M_{12} = M_{21} = m_B l_A d_B \cos \theta_2$$

$$M_{22} = I_B + m_B d_B^2$$

$$G_1 = m_B l_A d_B w_2^2 \sin \theta_2 - m_A g d_A \sin \theta_1 - m_B g l_A \sin \theta_1$$

$$G_2 = -m_B l_A d_B w_1^2 \sin \theta_2 - m_B g d_B \sin(\theta_1 + \theta_2)$$

Estas equações são diferentes das equações de Lagrange, pois as velocidades generalizadas escolhidas não são as derivadas das coordenadas generalizadas. Para obtermos as equações de Lagrange, basta observarmos a seguinte relação

$$\begin{bmatrix} \dot{w}_1 \\ \dot{w}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} = Z^{-1} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

Substituindo esta relação nas equações de Maggi-Kane obtidas acima e pré-multiplicando as equações por Z^T , obtemos as equações de Lagrange.

6. 5. Exemplo de formulação das equações de Maggi-Kane - Pião pesado com ponto fixo

Nesta seção, apresentamos formulações das equações do movimento, através do método de Maggi-Kane, para o pião pesado com ponto fixo, descrito na Figura 3.2.. Obtemos duas formulações distintas, uma utilizando os ângulos de Euler para parametrizar as rotações, e, outra, utilizando o vetor rotação.

O pião pesado tem as seguintes características: massa m , momentos principais de inércia I_1 , I_2 , e I_3 em relação ao centro de massa, e l é a distância do centro de massa do pião até o ponto fixo na origem do referencial inercial.

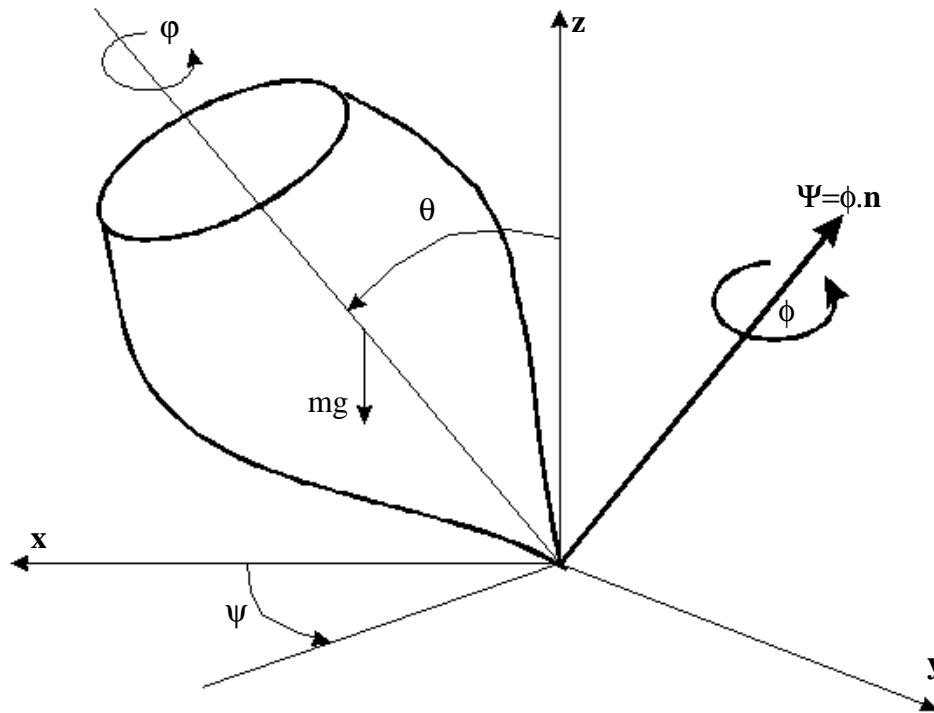


Figura 3.2 - Ilustração do pião pesado com ponto fixo (Ângulos de Euler - ψ, θ, ϕ e Vetor rotação Ψ)

Para formular as equações do movimento do pião pesado utilizando o método de Maggi-Kane, vamos seguir o roteiro apresentado anteriormente.

1a.Coordenadas generalizadas:

Componentes do vetor rotação (Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3) com respeito ao referencial inercial.

1b.Velocidades generalizadas:

Componentes do vetor de velocidade angular $\mathbf{w} = \mathbf{T}^T \dot{\Psi}$ (w_1, w_2, w_3) com respeito ao referencial inercial.

2.Velocidade angular:

$$\mathbf{\Omega} = w_1 \mathbf{n}_1 + w_2 \mathbf{n}_2 + w_3 \mathbf{n}_3$$

3.Velocidade do centro de massa:

$$\mathbf{v}_c = w_2 l \mathbf{n}_1 - w_1 l \mathbf{n}_2$$

4. Velocidades parciais e velocidades angulares parciais:

| | p = 1 | p = 2 | p = 3 |
|----------------|---------------------------|--------------------------|----------------|
| Ω_p | \mathbf{n}_1 | \mathbf{n}_2 | \mathbf{n}_3 |
| \mathbf{V}_p | $-\mathbf{l}\mathbf{n}_2$ | $\mathbf{l}\mathbf{n}_1$ | 0 |

5. Aceleração do centro de massa:

$$\mathbf{a}_c = (\dot{w}_2 + w_1 w_3) \mathbf{l} \cdot \mathbf{n}_1 - (\dot{w}_1 - w_2 w_3) \mathbf{l} \cdot \mathbf{n}_2 - (w_2^2 + w_1^2) \mathbf{l} \cdot \mathbf{n}_3$$

6. Aceleração angular:

$$\dot{\mathbf{\Omega}} = \dot{w}_1 \cdot \mathbf{n}_1 + \dot{w}_2 \cdot \mathbf{n}_2 + \dot{w}_3 \cdot \mathbf{n}_3$$

7a. Forças inerciais:

$$\mathbf{F} = -m\mathbf{a}_c = -ml [(\dot{w}_2 + w_1 w_3) \mathbf{l} \cdot \mathbf{n}_1 - (\dot{w}_1 - w_2 w_3) \mathbf{l} \cdot \mathbf{n}_2 - (w_2^2 + w_1^2) \mathbf{l} \cdot \mathbf{n}_3]$$

7b. Momentos inerciais:

$$\begin{aligned} \mathbf{M} = & [-I_1 \dot{w}_1 + (I_2 - I_3) w_2 w_3] \cdot \mathbf{n}_1 + \\ & + [-I_2 \dot{w}_2 + (I_3 - I_1) w_1 w_3] \cdot \mathbf{n}_2 + \\ & + [-I_3 \dot{w}_3 + (I_1 - I_2) w_1 w_2] \cdot \mathbf{n}_3 \end{aligned}$$

8a. Forças ativas:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_c = -mg \cdot \left\{ \left[\frac{(1 - \cos \phi)}{\phi^2} \Psi_1 \Psi_3 - \frac{\sin \phi}{\phi} \Psi_2 \right] \cdot \mathbf{n}_1 + \right. \\ \left. + \left[\frac{(1 - \cos \phi)}{\phi^2} \Psi_2 \Psi_3 + \frac{\sin \phi}{\phi} \Psi_1 \right] \cdot \mathbf{n}_2 + \right. \\ \left. + \left[\frac{(1 - \cos \phi)}{\phi^2} \Psi_3^2 + \cos \phi \right] \cdot \mathbf{n}_3 \right\} \end{aligned}$$

9. Forças inerciais generalizadas:

$$F_i^* = \Omega_i \cdot \mathbf{M} + \mathbf{V}_i \cdot \mathbf{F}$$

$$F_1^* = -I_1 \dot{w}_1 + (I_2 - I_3) w_2 w_3 - ml^2 (\dot{w}_1 - w_2 w_3)$$

$$F_2^* = -I_2 \dot{w}_2 + (I_3 - I_1) w_1 w_3 - ml^2 (\dot{w}_2 + w_1 w_3)$$

$$F_3^* = -I_3 \dot{w}_3 + (I_1 - I_2) w_1 w_2$$

10. Forças ativas generalizadas:

$$F_i = \mathbf{V}_i \cdot \mathbf{F}_c$$

$$F_1 = mgl \left[\frac{(1 - \cos \phi)}{\phi^2} \Psi_2 \Psi_3 + \frac{\sin \phi}{\phi} \Psi_1 \right]$$

$$F_2 = -mgl \left[\frac{(1 - \cos \phi)}{\phi^2} \Psi_1 \Psi_3 - \frac{\sin \phi}{\phi} \Psi_2 \right]$$

$$F_3 = 0$$

11. Equações do movimento:

$$F_i + F_i^* = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (I_1 + ml^2) \dot{w}_1 = (I_2 - I_3 + ml^2) w_2 w_3 + mgl \left[\frac{(1 - \cos \phi)}{\phi^2} \Psi_2 \Psi_3 + \frac{\sin \phi}{\phi} \Psi_1 \right] \\ (I_2 + ml^2) \dot{w}_2 = (I_3 - I_1 - ml^2) w_1 w_3 - mgl \left[\frac{(1 - \cos \phi)}{\phi^2} \Psi_1 \Psi_3 - \frac{\sin \phi}{\phi} \Psi_2 \right] \\ I_3 \dot{w}_3 = (I_1 - I_2) w_1 w_2 \\ \mathbf{w} = \mathbf{T}^T \dot{\Psi} \end{array} \right.$$

onde \mathbf{T} é

$$\mathbf{T}(\Psi) = \mathbf{I} + \left(\frac{\cos \|\Psi\| - 1}{\|\Psi\|^2} \right) \tilde{\Psi} + \left(1 - \frac{\sin \|\Psi\|}{\|\Psi\|} \right) \frac{\tilde{\Psi} \tilde{\Psi}}{\|\Psi\|^2}$$

Utilizando o mesmo procedimento, podemos escrever as equações do movimento para os ângulos de Euler.

$$\left\{ \begin{array}{l} (I_1 + ml^2)\dot{w}_1 = (I_2 - I_3 + ml^2)w_2w_3 + mgl \cos \varphi \sin \theta \\ (I_2 + ml^2)\dot{w}_2 = (I_3 - I_1 - ml^2)w_1w_3 - mgl \sin \varphi \sin \theta \\ I_3\dot{w}_3 = (I_1 - I_2)w_1w_2 \\ \mathbf{w} = \mathbf{T} \begin{bmatrix} \dot{\psi} & \dot{\theta} & \dot{\phi} \end{bmatrix}^T \end{array} \right.$$

onde \mathbf{T} é

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \sin \varphi \sin \theta & \cos \varphi & 0 \\ \cos \varphi \sin \theta & -\sin \varphi & 0 \\ \cos \theta & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

7. CONCLUSÕES

Neste capítulo foram apresentadas formulações das equações do movimento através das equações de Lagrange e Maggi-Kane. Ambos os métodos são bastante utilizados na literatura, mas, atualmente, nota-se uma preferência pelas equações de Maggi-Kane no caso de grandes estruturas como estruturas espaciais. Não é objetivo deste trabalho esgotar o assunto acerca da melhor escolha de método para cada tipo de problema, mas, em seguida, apresentamos alguns aspectos positivos e negativos de cada um dos métodos.

As principais vantagens do uso das equações de Lagrange para obter as equações do movimento são:

- As equações de Lagrange são escalares, o que torna sua derivação mais simples que a das equações de Newton;
- Apenas deslocamentos e velocidades precisam ser calculados, evitando o cálculo de acelerações;
- As forças de reação que não produzem trabalho não precisam ser incluídas na formulação das equações do movimento, como na formulação das equações de Newton;
- Toda a derivação das equações do movimento é realizada a partir do conhecimento do lagrangeano L ;

As principais desvantagens das equações de Lagrange são:

- Para sistemas com número muito grande de graus de liberdade, escrever o Lagrangeano é bastante trabalhoso;
- A necessidade da realização de um número muito grande de derivadas simbólicas pode inviabilizar a derivação computacional das equações do movimento de alguns problemas.

As principais vantagens do uso das equações de Maggi-Kane para obter as equações do movimento são:

- Se desejado, as forças de reação que não produzem trabalho são eliminadas automaticamente na formulação das equações do movimento;
- A possibilidade da escolha das velocidades generalizadas facilita a análise do resultado, já que as velocidades generalizadas podem representar as velocidades mensuráveis do sistema;
- A forma final das equações do movimento é, normalmente, mais simples e mais conveniente para a integração do que pela formulação de Lagrange;
- A quantidade de derivações simbólicas requeridas pela formulação de Maggi-Kane é bastante inferior a formulação de Lagrange.

As principais desvantagens das equações de Maggi-Kane são:

- A derivação simbólica das equações de Maggi-Kane é mais difícil de implementar que a das equações de Lagrange.

Vibrações de Sistemas Contínuos

1. INTRODUÇÃO

Até o momento, toda a discussão acerca da representação e modelagem de sistemas de multicorpos foi baseada no fato de que todos os corpos do sistema eram rígidos. Na dinâmica de corpos rígidos, é suposto que a distância entre dois pontos arbitrários do corpo permanece constante sob quaisquer condições. Desta maneira, o comportamento dinâmico do corpo é completamente definido pelo movimento de translação de um ponto do corpo acoplado com uma rotação em torno de um eixo variável no tempo.

Recentemente, o desenvolvimento tecnológico causou a necessidade de se projetar sistemas mecânicos de alta velocidade, leves, com alta precisão e baixo consumo de energia. Porém, para projetar sistemas com esses requerimentos, normalmente, a hipótese de corpos rígidos não fornece resultados satisfatórios. Por isso, em muitas aplicações industriais e tecnológicas, os sistemas mecânicos considerados devem ser modelados como um conjunto de corpos rígidos e corpos elásticos que podem deformar, tais como barras, vigas, placas e cascas. Muitos destes elementos estruturais são constantemente utilizados em muitas aplicações industriais e tecnológicas, tais como manipuladores robóticos de alta velocidade, sistemas veiculares, aviões e estruturas espaciais. O projeto e a análise de tais sistemas, que podem ser modelados como sistemas de multicorpos compostos por corpos rígidos e deformáveis interconectados, podem ser bastante melhorados com o auxílio da simulação da dinâmica.

O movimento de um corpo rígido pode ser descrito por seis coordenadas, fornecendo seis equações diferenciais ordinárias de segunda ordem independentes. No entanto, um corpo deformável só pode ser completamente descrito utilizando um número infinito de coordenadas. Isto faz com que a representação de sua dinâmica seja feita por um conjunto de equações diferenciais parciais dependentes do tempo e, também, da posição. Neste capítulo, apresentaremos métodos aproximados para discretização dos corpos deformáveis, onde são necessários apenas um número finito de parâmetros.

A dificuldade em obter soluções fechadas para os problemas de sistemas de parâmetros distribuídos é causada, principalmente, pela necessidade de se resolver sistemas de equações diferenciais parciais. Esta dificuldade pode ser contornada eliminando a dependência da posição dos problemas através da discretização no espaço. Existem duas grandes classes de

procedimentos de discretização, uma baseada na expressão da solução como uma combinação linear de determinadas funções e, outra consistindo em simplesmente concentrar as propriedades do sistema. Esta forma de discretização simplesmente transforma um conjunto de equações diferenciais parciais em equações diferenciais ordinárias.

Existem duas classes de esquemas de discretização baseados em expansão de séries, métodos do tipo Rayleigh-Ritz, como o método clássico de Rayleigh-Ritz, o método de modos supostos e o método de elementos finitos; e métodos de resíduos ponderados como o método de Galerkin. Neste trabalho serão tratados apenas os métodos de Rayleigh-Ritz e de modos supostos.

2. MÉTODO DE RAYLEIGH

O método de Rayleigh é baseado em um princípio enunciado por Lord Rayleigh em seu trabalho “*The Theory of Sound*” (Rayleigh 1877). O princípio de Rayleigh pode ser escrito da seguinte forma: *A frequência de vibração de um sistema conservativo é estacionária quando o sistema oscila em um modo natural de vibração.*

Para aplicarmos este princípio para o problema de vibrações, é conveniente determinarmos a frequência em termos das energias potencial e cinética do sistema. Consideremos o princípio da conservação de energia

$$T(t) + V(t) = E = \text{constante} \quad (4.2.1)$$

Quando oscilando em um modo natural de vibração, os deslocamentos de um sistema variam harmonicamente com frequência ω , i.e.

$$w(t, x) = c(x) \sin \omega t \quad (4.2.2)$$

As velocidades associadas são igualmente periódicas

$$\dot{w}(t, x) = c(x) \omega \cos \omega t \quad (4.2.3)$$

As energias potencial e cinética são do tipo

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \int_0^l \rho A \dot{w}^2 dx = T_{\max} \omega^2 \cos^2 \omega t \\ V &= \frac{1}{2} \int_0^l EI w''^2 dx = V_{\max} \sin^2 \omega t \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

De maneira que, T e V também são harmônicas com frequência 2ω .

$$\begin{aligned} T(t) &= \omega^2 T_{\max} \cos^2 \omega t = \frac{\omega^2 T_{\max}}{2} (1 + \cos 2\omega t) \\ V(t) &= V_{\max} \sin^2 \omega t = \frac{V_{\max}}{2} (1 - \cos 2\omega t) \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

onde consideramos que, no instante inicial, o sistema passa por sua posição de equilíbrio. Para que as Eqs. (4.2.1) e (4.2.5) sejam satisfeitas para qualquer instante de tempo t , a seguinte relação deve existir

$$\omega^2 = \frac{V_{\max}}{T_{\max}} \quad (4.2.6)$$

Como V_{\max} e T_{\max} dependem do modo natural de vibração, a última equação estabelece uma relação entre a frequência natural e o modo natural de vibração correspondente. O método de Rayleigh estima as frequências naturais usando funções que aproximam os modos naturais. Na prática, este método é aplicado apenas ao primeiro modo para o qual pode-se fazer aproximações facilmente. Apesar de que, para estruturas complexas, fazer aproximações satisfatórias pode ser difícil até mesmo para o primeiro modo.

Para demonstrar este método, vamos aplicar as equações obtidas acima para o caso da vibração transversal de uma viga engastada (Figura 4.1).

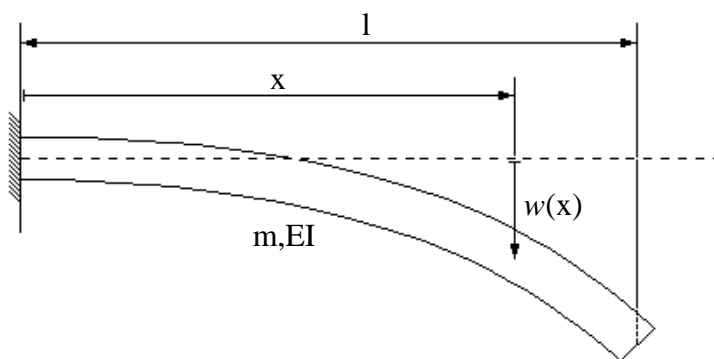


Figura 4.1 - Deflexão de uma viga engastada.

Consideremos a deformação da viga no plano horizontal, de modo que, a energia potencial gravitacional possa ser eliminada. Desta maneira, a energia potencial V da viga é igual a energia de deformação U . As expressões das energias cinética e de deformação da viga são

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{1}{2} \int_0^l \rho A \dot{w}^2 dx \\
 U &= \frac{1}{2} \int_0^l EI w''^2 dx
 \end{aligned}
 \tag{4.2.7}$$

onde ρ é a densidade volumétrica, A é a área da seção transversal, EI é a rigidez de flexão, l é o comprimento, w é a deflexão e x é coordenada que indica a posição da seção. Como a deflexão $w(x)$, em cada seção x da viga, é harmônica no tempo com frequência angular igual a ω , podemos escrever

$$\begin{aligned}
 T_{\max} &= \frac{1}{2} \int_0^l \rho A w_m^2(x) dx \\
 U_{\max} &= \frac{1}{2} \int_0^l EI w_m''^2(x) dx
 \end{aligned}
 \tag{4.2.8}$$

onde $w_m(x)$ é a máxima amplitude de vibração da seção x da viga.

Utilizando a Eq. (4.2.6) obtemos

$$\omega^2 = \frac{\int_0^l EI w_m''^2 dx}{\int_0^l \rho A w_m^2 dx}
 \tag{4.2.9}$$

Supondo que a viga vibra no r -ésimo modo natural, a amplitude $w_m(x)$ se torna o r -ésimo modo de vibração $\Phi_r(x)$ e, portanto, a Eq. (4.2.9) fornece a frequência neste modo.

$$\omega_r^2 = \frac{\int_0^l EI \Phi_r''^2(x) dx}{\int_0^l \rho A \Phi_r^2(x) dx}
 \tag{4.2.10}$$

A expressão no lado direito desta equação é chamada de *quociente de Rayleigh*.

Nem sempre é possível determinar exatamente os modos naturais, porém, normalmente, podemos estimar o primeiro modo. Desta forma, podemos utilizar o quociente de Rayleigh para determinar o valor aproximado da frequência associada ao primeiro modo. Como exemplo, consideremos o caso da viga engastada. Vamos escolher a seguinte função para aproximar o primeiro modo

$$\bar{\Phi}_1 = b \left(1 - \cos \frac{\pi x}{2l} \right) \quad (4.2.11)$$

onde b é uma constante. Substituindo (4.2.11) em (4.2.10) obtemos

$$\omega_1^2 \approx \bar{\omega}_1^2 = \frac{\int_0^l EI \left(\frac{\pi^2}{4l^2} \cos \frac{\pi x}{2l} \right)^2 dx}{\int_0^l \rho A \left(1 - \cos \frac{\pi x}{2l} \right)^2 dx} \quad (4.2.12)$$

onde $\bar{\omega}_1$ é a frequência aproximada. Supondo que a viga é feita de um material homogêneo e resolvendo as integrais, obtemos

$$\omega_1 \approx \bar{\omega}_1 = \frac{3,6667}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad (4.2.13)$$

A frequência associada ao primeiro modo de vibração de uma viga engastada é

$$\omega_1 = \frac{3,5156}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad (4.2.14)$$

Ou seja, o erro da aproximação usando o método de Rayleigh é menor que 5%. Mas, é importante enfatizar que o uso do quociente de Rayleigh para estimar a frequência de vibração sempre dá origem a uma frequência aproximada maior que a real.

É importante notarmos que o modo aproximado satisfaz todas as condições de contorno geométricas, mas só satisfaz uma das condições de contorno naturais na extremidade livre ($\Phi''(l, t) = 0$). No método de Rayleigh, as funções supostas têm que satisfazer apenas as condições de contorno geométricas.

3. MÉTODO DE RAYLEIGH-RITZ

Este método, desenvolvido por Ritz (Ritz 1911), é uma extensão do método de Rayleigh. Ele é baseado na combinação linear de um certo número de funções para fornecer uma melhor aproximação dos modos naturais de vibração, diferente do método de Rayleigh que só utiliza uma função. Se as funções forem bem escolhidas, este método não só fornece

melhores aproximações para o primeiro modo, mas também permite estimar as outras frequências e modos naturais.

No método de Rayleigh-Ritz, a deformação de um sistema contínuo é aproximado usando uma combinação linear de funções que devem satisfazer as condições de contorno geométricas do problema. Se N funções $\xi_1(x), \xi_2(x), \dots, \xi_N(x)$ são escolhidas, a deflexão $w(x)$ pode ser representada por

$$\begin{aligned} w(x) &= C_1 \xi_1(x) + C_2 \xi_2(x) + \dots + C_N \xi_N(x) \\ &= \sum_{i=1}^N C_i \xi_i(x) \end{aligned} \quad (4.3.1)$$

As funções $\xi_1(x), \xi_2(x), \dots, \xi_N(x)$, que podem ser autofunções ou funções polinomiais, são consideradas conhecidas. Os coeficientes C_1, C_2, \dots, C_N , chamados de *coeficientes de Ritz*, devem ser determinados de maneira que a superposição de funções forneça a melhor aproximação possível dos modos naturais de vibração. O método de Ritz é baseado no fato de que a melhor aproximação é obtida ajustando-se os coeficientes de tal modo que a frequência seja estacionária nos modos naturais, de acordo com o princípio de Rayleigh. Portanto, os coeficientes de Ritz são ajustados minimizando o quociente de Rayleigh com respeito a cada um destes coeficientes.

Como exemplo, vamos aplicar este método para o problema da vibração de uma viga engastada apresentado na seção anterior. Substituindo a expressão (4.3.1) na Eq. (4.2.8) obtemos

$$T_{\max} = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^N \sum_{i=1}^N m_{ri} C_i C_r \quad (4.3.2)$$

$$U_{\max} = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^N \sum_{i=1}^N k_{ri} C_i C_r \quad (4.3.3)$$

onde m_{ri} e k_{ri} são coeficientes de massa e rigidez que dependem das funções de forma. Para o caso da viga engastada em questão, os coeficientes de massa e rigidez são

$$\begin{aligned} m_{ri} &= \int_0^l \rho A \xi_r(x) \xi_i(x) dx \\ k_{ri} &= \int_0^l EI \xi_r''(x) \xi_i''(x) dx \end{aligned} \quad (4.3.4)$$

Podemos reescrever as Eqs. (4.3.2) e (4.3.3) na forma matricial

$$T_{\max} = \frac{1}{2} \mathbf{C}^T \mathbf{M} \mathbf{C} \quad (4.3.5)$$

$$U_{\max} = \frac{1}{2} \mathbf{C}^T \mathbf{K} \mathbf{C} \quad (4.3.6)$$

onde \mathbf{M} e \mathbf{K} são as matrizes de massa e de rigidez, respectivamente, e \mathbf{C} é o vetor dos coeficientes de Ritz definido por

$$\mathbf{C} = [C_1 \quad C_2 \quad \dots \quad C_N]^T \quad (4.3.7)$$

Substituindo as Eq. (4.3.5) e (4.3.6) no quociente de Rayleigh da Eq. (4.2.6) obtemos

$$\omega^2 = \frac{U_{\max}}{T_{\max}} = \frac{\mathbf{C}^T \mathbf{K} \mathbf{C}}{\mathbf{C}^T \mathbf{M} \mathbf{C}} \quad (4.3.8)$$

Para minimizar os quocientes de Rayleigh com respeito aos coeficientes de Ritz, vamos escrever

$$\frac{\partial \omega^2}{\partial \mathbf{C}} = \frac{T_{\max} \frac{\partial U_{\max}}{\partial \mathbf{C}} - U_{\max} \frac{\partial T_{\max}}{\partial \mathbf{C}}}{(T_{\max})^2} = 0 \quad (4.3.9)$$

ou seja,

$$T_{\max} \frac{\partial U_{\max}}{\partial \mathbf{C}} - U_{\max} \frac{\partial T_{\max}}{\partial \mathbf{C}} = 0 \quad (4.3.10)$$

Se dividirmos a última equação por T_{\max} e usarmos a Eq. (4.2.6) obtemos

$$\frac{\partial U_{\max}}{\partial \mathbf{C}} - \omega^2 \frac{\partial T_{\max}}{\partial \mathbf{C}} = 0 \quad (4.3.11)$$

Utilizando as Eqs. (4.3.5) e (4.3.6) observamos que

$$\frac{\partial U_{\max}}{\partial \mathbf{C}} = \mathbf{C}^T \mathbf{K} \quad \frac{\partial T_{\max}}{\partial \mathbf{C}} = \mathbf{C}^T \mathbf{M} \quad (4.3.12)$$

e, conseqüentemente, a Eq. (4.3.11) pode ser reescrita como

$$[\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}] \mathbf{C} = 0 \quad (4.3.13)$$

Esta equação representa um sistema de N equações algébricas. Para que este sistema tenha uma solução não-trivial, o determinante da matriz de coeficientes deve ser nulo. Portanto,

$$|\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}| = 0 \quad (4.3.14)$$

As N raízes desta equações são o quadrado das frequências naturais do sistema $\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_N^2$. Associado a cada frequência natural ω_r , existe pelo menos um vetor de coeficientes de Ritz \mathbf{C}_r que pode ser determinado resolvendo o sistema

$$[\mathbf{K} - \omega_r^2 \mathbf{M}] \mathbf{C}_r = 0 \quad (4.3.15)$$

O modo natural associado a frequência ω_r pode ser obtido a partir da Eq. (4.3.1)

$$\begin{aligned} w_r(x) &= C_{r1} \xi_1(x) + C_{r2} \xi_2(x) + \dots + C_{rN} \xi_N(x) \\ &= \sum_{i=1}^N C_{ri} \xi_i(x) \quad (r = 1, \dots, N) \end{aligned} \quad (4.3.16)$$

Uma vez que as frequências e modos naturais de vibração foram determinados, o sistema contínuo pode ser representado por um sistema discreto de N graus de liberdade equivalente. Neste caso, a vibração do sistema pode ser determinada usando-se separação de variáveis

$$w(x, t) = \sum_{r=1}^N w_r(x) q_r(t) \quad (4.3.17)$$

onde $q_r(t)$ são coeficientes dependentes do tempo apenas.

Pode ser mostrado que se as funções supostas forem exatamente iguais às autofunções, o método de Rayleigh-Ritz fornece as frequências e modos naturais de vibração exatos.

4. MÉTODO DE MODOS SUPOSTOS

O método de modos supostos é baseado no método de Rayleigh-Ritz, apresentado na seção anterior. Neste método, o modo de deformação de um sistema contínuo é aproximado usando um conjunto de modos supostos de deformação. Este procedimento pode ser utilizado, por exemplo, para a caracterização da deformação de estruturas complexas e/ou com condições de contorno complexas. Para tais sistemas, é difícil determinar, exatamente, as autofunções. Porém, se a forma de deformação de tais estruturas é parecida com a forma de deformação de algum sistema simples, ou com uma superposição delas; as autofunções dos sistemas simples podem ser consideradas como a função de forma do sistema complexo. Outra maneira é utilizar testes experimentais para determinar o modo de deformação, medindo os deslocamentos em determinados pontos. De maneira que, o modo de deformação pode ser definido utilizando funções polinomiais calculadas a partir das medidas experimentais. Isto pode ser feito excitando o sistema com frequências próximas às desejadas e medindo o modo de vibração para cada frequência de excitação. Desta maneira, pode-se determinar experimentalmente uma aproximação dos modos de vibração desejados e, com eles, representar o sistema.

Outra maneira de utilizar o método de modos supostos é quando, até mesmo para sistemas simples, deseja-se reduzir o número de graus de liberdade. De maneira que, utilizando este método, pode-se aproximar a vibração de uma viga engastada, por exemplo, considerando que a sua deformação é uma combinação dos dez primeiros modos de deformação. É natural pensar que quanto maior o número de modos considerados mais precisa será a aproximação. Porém, uma hipótese importante, e que será vastamente utilizada neste trabalho, é que os primeiros modos de vibração contribuem mais que os restantes pelo fato de que os primeiros modos, normalmente, possuem menor energia de deformação, i.e., é mais fácil o sistema se deformar nos primeiros modos de vibração.

O método de modos supostos consiste em representar a deformação na seguinte maneira

$$w(x, t) = \sum_{r=1}^N w_r(x) q_r(t) \quad (4.4.1)$$

onde $w_r(x)$ são os modos supostos e $q_r(t)$ são coeficientes dependentes apenas do tempo.

Como exemplo, consideremos o problema da vibração transversal de um viga bi-apoiada (Figura 4.2). Vamos representar a vibração da viga utilizando apenas seus dois

primeiros modos de vibração. Os modos de vibração desta viga podem ser facilmente calculados (Timoshenko 1974)

$$w_r(x) = \text{sen} \frac{r\pi x}{l} \quad (r = 1, \dots, \infty) \quad (4.4.2)$$

ou seja, os dois primeiros modos são

$$w_1(x) = \text{sen} \frac{\pi x}{l} \quad w_2(x) = \text{sen} \frac{2\pi x}{l} \quad (4.4.3)$$

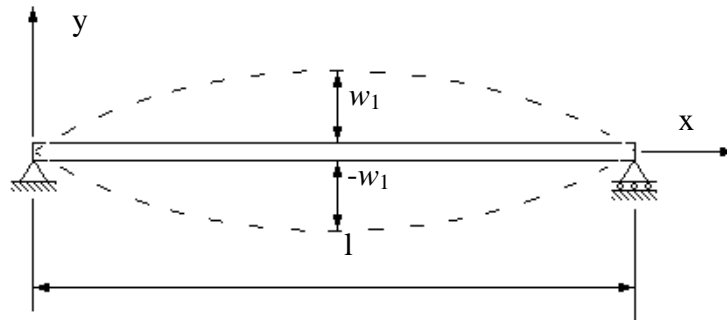


Figura 4.2 - Primeiro modo de vibração de uma viga bi-apoiada.

As energias cinética e de deformação podem ser escritas na seguinte forma geral

$$T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}} \quad (4.4.4)$$

$$U = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q} \quad (4.4.5)$$

onde \mathbf{q} é o vetor dos coeficientes q_r e as matrizes \mathbf{M} e \mathbf{K} são tais que seus elementos são

$$m_{ri} = \int_0^l \rho A w_r(x) w_i(x) dx$$

$$k_{ri} = \int_0^l EI w_r''(x) w_i''(x) dx \quad (4.4.6)$$

Aplicando as equações de Lagrange para este problema, obtemos

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_r} + \frac{\partial U}{\partial q_r} = Q_r \quad (r = 1, 2) \quad (4.4.7)$$

donde, utilizando as Eqs. (4.4.4) e (4.4.5) obtemos

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{Q} \quad (4.4.8)$$

Calculando as matrizes \mathbf{M} e \mathbf{K} de (4.4.6)

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \int_0^l \rho A \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 & w_2 \end{bmatrix} dx \\ &= \frac{\rho A l}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{K} &= \int_0^l EI \begin{bmatrix} w_1'' \\ w_2'' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1'' & w_2'' \end{bmatrix} dx \\ &= \frac{EI \pi^4}{2l^3} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 16 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

O vetor de forçamento \mathbf{Q} é igual a

$$\mathbf{Q} = \int_0^l F(x, t) \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} dx$$

Portanto, a equação do movimento do sistema equivalente de dois graus de liberdade pode ser escrita como

$$\frac{\rho A l}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \frac{EI \pi^4}{2l^3} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix}$$

podemos verificar que as frequências naturais ω_1 e ω_2 são

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \left(\frac{\pi}{1} \right)^2 \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \left(\frac{2\pi}{1} \right)^2$$

A solução da equação homogênea deste sistema pode ser escrita como

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) \\ A_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2) \end{bmatrix}$$

onde A_1, A_2, ϕ_1 e ϕ_2 são constantes determinadas pelas condições iniciais do problema, de maneira que, podemos escrever a deflexão da viga como

$$w(x, t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) \sin \frac{\pi x}{1} + A_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2) \sin \frac{2\pi x}{1} + w_p(x, t)$$

onde $w_p(x, t)$ é uma solução particular que depende do forçamento Q .

Algoritmos de Integração

1. INTRODUÇÃO

Neste capítulo, apresentaremos uma introdução aos problemas envolvidos na integração numérica das equações do movimento de sistemas de multicorpos. Não é objetivo deste capítulo descrever em detalhes cada algoritmo de integração, e sim apresentar uma visão geral dos algoritmos existentes e como eles se aplicam à dinâmica de multicorpos.

Problemas de valor inicial provenientes da descrição da dinâmica de sistemas de multicorpos são, normalmente, problemas de difícil análise numérica. Isto se deve ao fato de que as equações do movimento e a maneira que são simuladas dependem tanto da formulação do problema como do formalismo aplicado (Schiehlen 1990). As equações do movimento podem ser equações diferenciais ordinárias (EDO) explícitas ou linearmente implícitas ou equações algébrico-diferenciais (EAD). Podemos classificar os diferentes casos da seguinte forma:

- A forma mínima ou forma reduzida (5.1.1) ocorre quando não existem vínculos ou quando todos os vínculos foram eliminados na formulação, de forma que é possível a escolha de um número n mínimo de coordenadas, i.e., o número de equações é igual ao número de graus de liberdade. Este é o máximo grau de redução possível.

$$\mathbf{M}(\mathbf{t}, \mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{f}(\mathbf{t}, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \quad (5.1.1)$$

- A forma descritiva (5.1.2) e (5.1.3) ocorre quando o sistema possui vínculos e alguns deles são modelados por m equações algébricas do tipo (5.1.3), i.e., não são eliminados na formulação. Esta forma é conveniente quando se deseja acoplar diversas subestruturas de uma biblioteca de modelos para formar o sistema em estudo, ou, ainda, realizar os cálculos de cada subestrutura em paralelo e deixar que as equações de vínculo realizem o acoplamento. Esta última vem tendo grande avanço desde o advento da computação paralela. Nestes casos, os modelos têm um médio grau de redução.

$$\mathbf{M}(\mathbf{t}, \mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} - \Phi_{\mathbf{q}}^T(\mathbf{t}, \mathbf{q}) \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{f}(\mathbf{t}, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \quad (5.1.2)$$

$$\Phi(\mathbf{t}, \mathbf{q}) = 0 \quad (5.1.3)$$

onde $\Phi_{\mathbf{q}}$ é o Jacobiano da equação de vínculo holônoma (5.1.3) e $\boldsymbol{\lambda}$ é o vetor dos multiplicadores de Lagrange. A combinação das Eqs. (5.1.2) e (5.1.3) constituem um sistema de $n + m$ equações algébrico-diferenciais de índice 3 (Andrzejewski et al 1993).

- Nenhum grau de redução é obtido na forma totalmente descritiva, onde todos os vínculos são modelados através de equações algébricas. Este caso é interessante porque cada corpo pode ser tratado separadamente.

A principal vantagem de obter as equações do movimento de sistemas de multicorpos na forma mínima é que quaisquer métodos de integração de equações diferenciais ordinárias, bastante conhecidos e testados, podem ser utilizados. Enquanto que, os algoritmos de integração de equações algébrico-diferenciais existentes, em geral, só tratam de EADs de índice 1. Como as equações da dinâmica de sistemas de multicorpos com vínculos explícitos são normalmente escritas na forma (5.1.2) e (5.1.3) que representam uma EAD de índice 3, é preciso encontrar uma maneira de contornar este problema. Em seguida, apresentamos algumas metodologias encontradas na literatura que expõem uma solução para este problema.

1. Eliminação dos vínculos - A primeira solução possível consiste em eliminar os vínculos na formulação das equações do movimento. Uma das maneiras de fazer isso, apresentada no capítulo 3 deste trabalho, é utilizar a formulação de Kane com vínculos implícitos. Outra maneira, é utilizar uma formulação lagrangeana modificada (Bayo et al 1988), onde os vínculos são incorporados às equações do movimento através da inclusão de três termos na expressão do princípio de Hamilton. Estes termos representam um potencial, uma energia cinética e um termo de dissipação fictícios associados aos vínculos. Ambos os métodos dão origem à n equações diferenciais ordinárias.

Em alguns casos, não é interessante trabalhar com a forma mínima, já que as equações resultantes, normalmente, são muito complexas e altamente não-lineares (Andrzejewski e von Schwerin 1995). Além de que, a forma descritiva permite uma modelagem mais intuitiva e o cálculo direto das forças de vínculo.

2. Utilização de métodos de EDO para resolver EADs - Uma outra possível solução é obter a forma descritiva na formulação (EADs), mas utilizar métodos de integração de EDOs convencionais para resolver as EADs (Gear e Petzold 1984, Knorrenschild 1992). Eles se baseiam no fato de que algumas EADs podem ser resolvidas utilizando métodos utilizados para integração de sistemas rígidos (stiff) de EDOs. No entanto, alguns sistemas de EADs só podem ser resolvidos desta maneira após muitas modificações no algoritmo, e alguns outros, simplesmente, não podem (Petzold 1982).

3. Redução de índice de EADs - Pode-se também resolver o sistemas de EADs diretamente. Porém, devido ao fato de que algoritmos para resolução de sistemas de EADs de índice 3 ainda não são conhecidos, se faz necessário reduzir o índice das EADs. Alguns algoritmos estão sendo desenvolvidos baseados na redução de índice (Andrzejewski e von Schwerin 1995).

Neste trabalho, só serão resolvidos problemas escritos na forma mínima (5.1.1) , i.e, caracterizados por equações diferenciais ordinárias. Além disso, os integradores a serem

estudados são algoritmos desenvolvidos para a solução de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, portanto, uma manipulação algébrica para redução da ordem das EDOs ainda é necessária quando se obtém as equações do movimento na forma da Eq. (5.1.1) ou das Eqs. (5.1.2) e (5.1.3). Convém lembrar que na formulação de Maggi-Kane, apresentada anteriormente neste trabalho, as equações do movimento são obtidas diretamente na forma de EDOs ou EADs de primeira ordem.

Serão apresentados, neste capítulo, métodos explícitos para sistemas não-rígidos (non-stiff) na forma

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{F}(\mathbf{t}, \mathbf{y}) \quad (5.1.4)$$

e métodos implícitos para sistemas rígidos (stiff) de EDOs. Sendo que os algoritmos para problemas rígidos admitem a forma mais geral

$$\mathbf{M}(\mathbf{t})\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(\mathbf{t}, \mathbf{y}) \quad (5.1.5)$$

onde a matriz $\mathbf{M}(\mathbf{t})$ é não-singular e, normalmente, esparsa.

Um dos objetivos do trabalho é apresentar um algoritmo de simulação de sistemas de mult corpos utilizando o código MATLAB, um ambiente largamente usado para computação científica. Por essa razão, todos os algoritmos de integração utilizados são baseados no MATLAB (The MathWorks, Inc. 1994) e, muitos deles, encontrados no “The MATLAB OdeSuite” (Shampine e Reichelt 1995). Este pacote contém diversos integradores para sistemas rígidos ou não e, também, incorpora uma função que habilita a utilização dos integradores contidos no SIMULINK. Aumentando bastante a capacidade do MATLAB de resolver equações diferenciais ordinárias.

2. MÉTODOS EXPLÍCITOS

Nesta seção será apresentada uma breve exposição dos métodos explícitos de integração para sistemas não-rígidos (non-stiff) utilizados neste trabalho. Dos quatro algoritmos baseados em métodos explícitos utilizados, três fazem parte do “The MATLAB OdeSuite” (Shampine e Reichelt 1995), são eles:

- * ODE45
- * ODE23
- * ODE113

e o outro faz parte dos integradores do SIMULINK (The Mathworks, Inc. 1994):

- * ADAMS

Os quatro métodos só admitem equações na forma da Eq. (5.1.4) .

Algoritmo ODE45 - Este algoritmo, contido no OdeSuite, é baseado nas fórmulas explícitas de Runge-Kutta. Ele substitui o algoritmo de mesmo nome que acompanha o MATLAB, pois a fórmula desenvolvida por Dormand e Prince, utilizada na nova versão, tem

demonstrado ser bastante mais eficiente que a fórmula de Fehlberg utilizada na versão anterior. Além disso, os gráficos obtidos usando o algoritmo original, algumas vezes, não apresentam a resolução adequada, já que, em um intervalo de tempo mudanças substanciais podem ocorrer nas variáveis. Para contornar este problema, o novo algoritmo de integração também possui, internamente, um algoritmo bastante eficiente de interpolação que calcula quatro valores entre cada intervalo de tempo. Isto, apesar de demandar um certo tempo de CPU, proporciona gráficos bem mais suaves. Convém mencionar que esta função pode ser desabilitada quando desnecessário. Na Figura 5.1, apresentamos um exemplo da importância do algoritmo de interpolação, através da simulação do problema *rigid*, contido no OdeSuite, que representa as equações de Euler de um corpo rígido sem força externa. As curvas contínuas resultam da saída padrão do ODE45, os valores discretos são os resultados ao final de cada intervalo de tempo e as curvas tracejadas resultam da ligação dos pontos discretos. Através deste exemplo percebe-se claramente a importância dos pontos adicionais calculados pela interpolação para a representação adequada da solução. Apesar de, em alguns casos, os outros métodos para problemas não-rígidos apresentarem melhor desempenho, o ODE45 é, normalmente, o método de escolha.

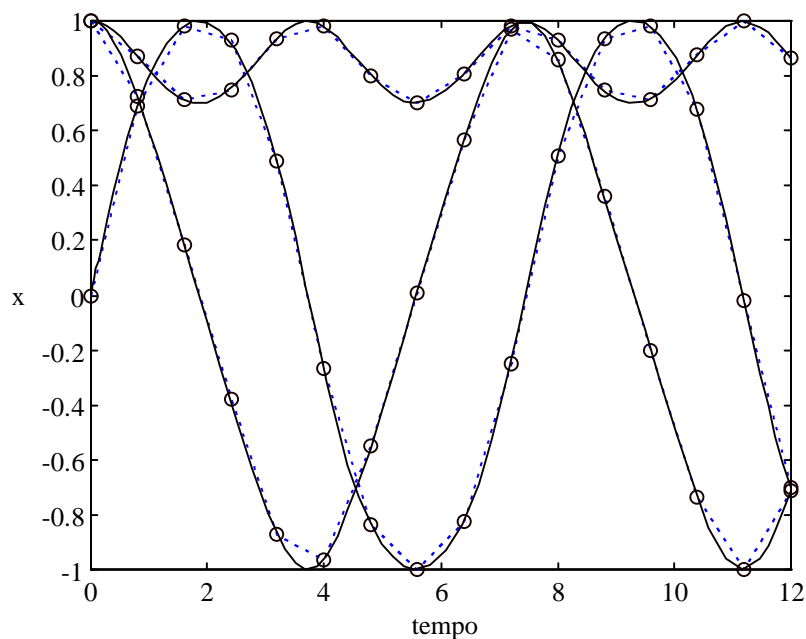


Figura 5.1 - Solução do problema *rigid* utilizando o algoritmo ODE45. As linhas contínuas representam a saída padrão do ODE45. Os valores discretos são os resultados ao final de cada intervalo de tempo. As linhas tracejadas representam o que acontece quando se desabilita a interpolação.

Algoritmo ODE23 - Este algoritmo, contido no OdeSuite, também é baseado nas fórmulas explícitas de Runge-Kutta. Ele substitui o algoritmo de mesmo nome que acompanha o MATLAB. Esta nova versão é baseada na fórmula desenvolvida por Bogacki-Shampine. Esta fórmula é de alta qualidade e bastante mais eficiente que a fórmula utilizada na versão anterior. Para tolerâncias padrão, o ODE23 apresenta custo maior, porém é preferível para tolerâncias grosseiras.

Algoritmo ODE113 - O algoritmo ODE113 é descendente da fórmula de ordem variável de Adams-Bashforth-Moulton. Os métodos de Adams são baseados em polinômios de interpolação que são utilizados para obter o resultado em pontos específicos. Esta fórmula foi desenvolvida para obter, da maneira mais eficiente possível, soluções de alta precisão para problemas onde o cálculo de $\mathbf{F}(t, \mathbf{y})$ apresenta custo elevado. Desta maneira, as fórmulas para cálculo de \mathbf{F} são de ordem elevada e, conseqüentemente, de custo elevado. Portanto, pode se esperar que o algoritmo ODE113 seja o mais eficiente em termos do cálculo de \mathbf{F} , mas não o mais rápido. Porém, no caso de um problema onde o cálculo de \mathbf{F} é de custo elevado e/ou quando o cálculo de \mathbf{F} deve ser realizado com alta precisão, o ODE113 é o mais rápido.

Algoritmo ADAMS - Este algoritmo é o único dentre os utilizados neste trabalho para sistemas não-rígidos que não está contido no OdeSuite. Ele é baseado no método predictor-corrector de Adams e é parte integrante do SIMULINK. Uma função fornecida pelo OdeSuite permite a utilização deste algoritmo no ambiente do MATLAB e fora do SIMULINK. É um algoritmo bastante rápido e preciso, porém, pelo fato de não possuir interpolação interna seus resultados não são apropriados para se obter uma representação gráfica satisfatória. Ele é especialmente apropriado para sistemas não-lineares desde que não apresentem singularidades ou variações bruscas.

3. MÉTODOS IMPLÍCITOS

Nesta seção, seguindo a mesma metodologia da seção anterior, será apresentada uma breve exposição dos métodos implícitos de integração para sistemas rígidos (stiff) utilizados neste trabalho. Um sistema rígido é um sistema em que algumas das equações possuem dinâmica rápida e, outras, dinâmica lenta.

São três os algoritmos baseados em métodos implícitos utilizados, dos quais dois fazem parte do “The MATLAB OdeSuite” (Shampine e Reichelt 1995), são eles:

- * ODE15s

- * ODE23s

e o outro faz parte dos integradores do SIMULINK (The Mathworks, Inc. 1994):

- * GEAR

Os dois métodos do OdeSuite (ODE15s e ODE23s) permitem que equação seja escrita na forma da Eq. (5.1.5), no entanto, apenas o algoritmo ODE15s admite que a matriz \mathbf{M} seja variável no tempo.

Algoritmo ODE15s - Este método é baseado em uma família de NDFs (Numerical Differentiation Formulas) desenvolvida por Klopfenstein-Shampine. Os métodos NDF são variações dos métodos BDF (Backward Differentiation Formula), indubitavelmente, os mais utilizados para solução sistemas rígidos. A partir da fórmula NDF de ordem k (NDF $_k$) definida por Klopfenstein (Shampine e Reichelt 1995), a fórmula utilizada pelo ODE15s pode ser escrita como

$$\sum_{m=1}^k \frac{1}{m} \nabla^m \mathbf{y}_{n+1} = \gamma_k (\mathbf{y}_{n+1} - \mathbf{y}_{n+1}^{(0)}) + \sum_{m=1}^k \gamma_m \nabla^m \mathbf{y}_n \quad (5.3.1)$$

onde $\gamma_k = \sum_{j=1}^k \frac{1}{j}$.

Esta equação implícita é resolvida por um método de Newton simplificado. O OdeSuite também possui um algoritmo eficiente para o cálculo numérico do Jacobiano de $\mathbf{F}(t, \mathbf{y})$, fator que, aliado a eficiência e rapidez em álgebra linear do MATLAB, torna o algoritmo ODE15s muito rápido e preciso para problemas rígidos. Este algoritmo, no entanto, é menos eficiente para problemas não-rígidos que os algoritmos desenvolvidos para problemas não-rígidos apresentados na seção anterior.

Algoritmo ODE23s - Este algoritmo é baseado na fórmula modificada de Rosenbrock (Shampine e Reichelt 1995). Ele é baseado em um método de ordem constante, especialmente eficiente em tolerâncias grosseiras, onde métodos de passo único têm vantagens sobre métodos com memória. Porém, em geral, é um algoritmo lento porque a integração avança utilizando uma fórmula de ordem baixa e, portanto, não faz extrapolação local como os outros métodos.

Algoritmo GEAR - Este algoritmo é parte integrante do SIMULINK, mas pode ser utilizado no ambiente do MATLAB e fora do SIMULINK utilizando uma função do OdeSuite. Ele é um algoritmo rápido para sistemas rígidos, mas não é eficiente para sistemas não-rígidos e para sistemas que possuem singularidades ou variações bruscas. Deve ser usado para sistemas não-lineares suaves.

4. EXEMPLOS NUMÉRICOS

Nesta seção, apresentaremos uma comparação dos métodos apresentados, através da simulação do pião pesado (Figura 5.2), descrito no capítulo 3. O motivo da utilização deste exemplo é basicamente porque a dinâmica do pião pesado varia bastante quando as condições iniciais são alteradas. Como veremos por meio da simulação, o pião pode apresentar efeitos como dinâmica rápida e lenta ou singularidade para determinadas condições iniciais.

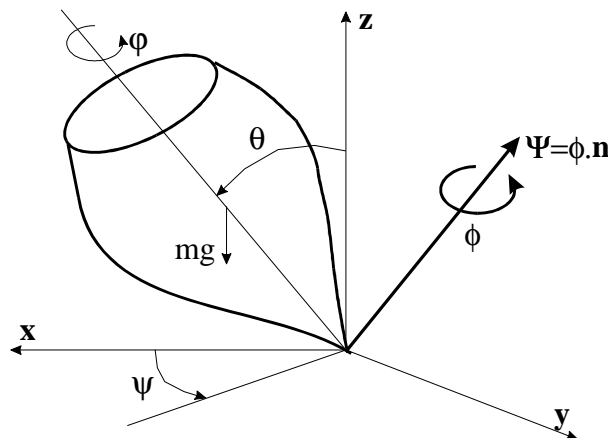


Figura 5.2 - Representação do pião pesado (ψ, θ, ϕ - ângulos de Euler; Ψ - vetor rotação)

As equações do movimento do pião pesado representadas em termos dos ângulos de Euler formuladas no capítulo 3 podem ser escritas na forma do seguinte sistemas de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem

$$\left\{ \begin{array}{l} (I_1 + ml^2)\dot{w}_1 = (I_2 - I_3 + ml^2)w_2w_3 + mgl \cos \varphi \sin \theta \\ (I_2 + ml^2)\dot{w}_2 = (I_3 - I_1 - ml^2)w_1w_3 - mgl \sin \varphi \sin \theta \\ I_3\dot{w}_3 = (I_1 - I_2)w_1w_2 \\ \mathbf{w} = \mathbf{T} \begin{bmatrix} \dot{\psi} & \dot{\theta} & \dot{\phi} \end{bmatrix}^T \end{array} \right. \quad (5.4.1)$$

onde \mathbf{T} é

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \sin \varphi \sin \theta & \cos \varphi & 0 \\ \cos \varphi \sin \theta & -\sin \varphi & 0 \\ \cos \theta & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.4.2)$$

Podemos, também, escrever as equações do movimento em termos do vetor rotação. O que dá origem ao seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem

$$\left\{ \begin{array}{l} (I_1 + ml^2)\dot{w}_1 = (I_2 - I_3 + ml^2)w_2w_3 + mgl \left[\frac{(1 - \cos \phi)}{\phi^2} \Psi_2 \Psi_3 + \frac{\sin \phi}{\phi} \Psi_1 \right] \\ (I_2 + ml^2)\dot{w}_2 = (I_3 - I_1 - ml^2)w_1w_3 - mgl \left[\frac{(1 - \cos \phi)}{\phi^2} \Psi_1 \Psi_3 - \frac{\sin \phi}{\phi} \Psi_2 \right] \\ I_3\dot{w}_3 = (I_1 - I_2)w_1w_2 \\ \mathbf{w} = \mathbf{T}^T \dot{\Psi} \end{array} \right. \quad (5.4.3)$$

onde o ângulo de rotação $\phi = \|\Psi\|$ e a matriz \mathbf{T} é

$$\mathbf{T}(\Psi) = \mathbf{I} + \left(\frac{\cos\|\Psi\| - 1}{\|\Psi\|^2} \right) \tilde{\Psi} + \left(1 - \frac{\sin\|\Psi\|}{\|\Psi\|} \right) \frac{\tilde{\Psi}\tilde{\Psi}}{\|\Psi\|^2} \quad (5.4.4)$$

Em seguida, apresentaremos os resultados das simulações realizadas utilizando os diversos integradores apresentados anteriormente. Em ambos os casos, vamos considerar que o pião tem as seguintes características $I_1 = I_2 = 0,8 \text{ kg.m}^2$, $I_3 = 1,4 \text{ kg.m}^2$, $m = 5 \text{ kg}$ e $l = 1,3 \text{ m}$. Na primeira simulação, cujos resultados são mostrados nas Figuras 5.3 e 5.4, o pião possui as seguintes condições iniciais: $\theta = \pi/9 \text{ rad}$ e $\dot{\phi} = 50 \text{ rad/s}$. Para estas condições iniciais, como pode ser observado na Figura 5.3, o pião permanece longe do ponto de singularidade dos ângulos de Euler ($\theta = 0, \pi$). Neste caso, todos os métodos apresentaram resultados satisfatórios. A Tabela 5.1 apresenta a performance dos algoritmos de integração para o caso da simulação das equações em termos dos ângulos de Euler e do vetor rotação.

Tabela 5.1 - Performance dos algoritmos de integração. Exemplo I. ($\theta_0 = \pi/9 \text{ rad}$ e $\dot{\phi}_0 = 50 \text{ rad/s}$)

| Algoritmo (tol. erro=1e-6) | Tempo de CPU (seg) (Ângulos de Euler) | Tempo de CPU (seg) (Vetor Rotação) |
|--------------------------------------|--|---------------------------------------|
| Mét. Explícitos | | |
| ODE45 | 160 | 374 |
| ODE23 | 565 | 1155 |
| ODE113 | 158 | 405 |
| ADAMS | 121 | 380 |
| Mét. Implícitos | | |
| ODE15s | 111 | 421 |
| ODE23s | 2281 | 5431 |
| GEAR | 163 | 379 |

Observando a Tabela 5.1, podemos notar que a integração das equações expressas em termos do vetor rotação é mais lenta. Isto pode ser explicado, pelo fato de que: 1) as equações do movimento em termos do vetor rotação são mais complexas e 2) as componentes do vetor rotação variam com uma frequência muito alta, enquanto que os ângulos de Euler não. A alta frequência de variação das componentes do vetor rotação força um intervalo de tempo pequeno. O comportamento das componentes pode ser observado através do gráfico do módulo do vetor rotação (ângulo de rotação) na Figura 5.4. Na integração das equações em termos dos ângulos de Euler, a frequência de variação das componentes da velocidade angular é alta e a frequência de variação dos ângulos de Euler é baixa. Este fenômeno de dinâmica rápida e lenta faz com que a integração do método implícito ODE15s seja mais rápida, como pode ser observado na Tabela 5.1.

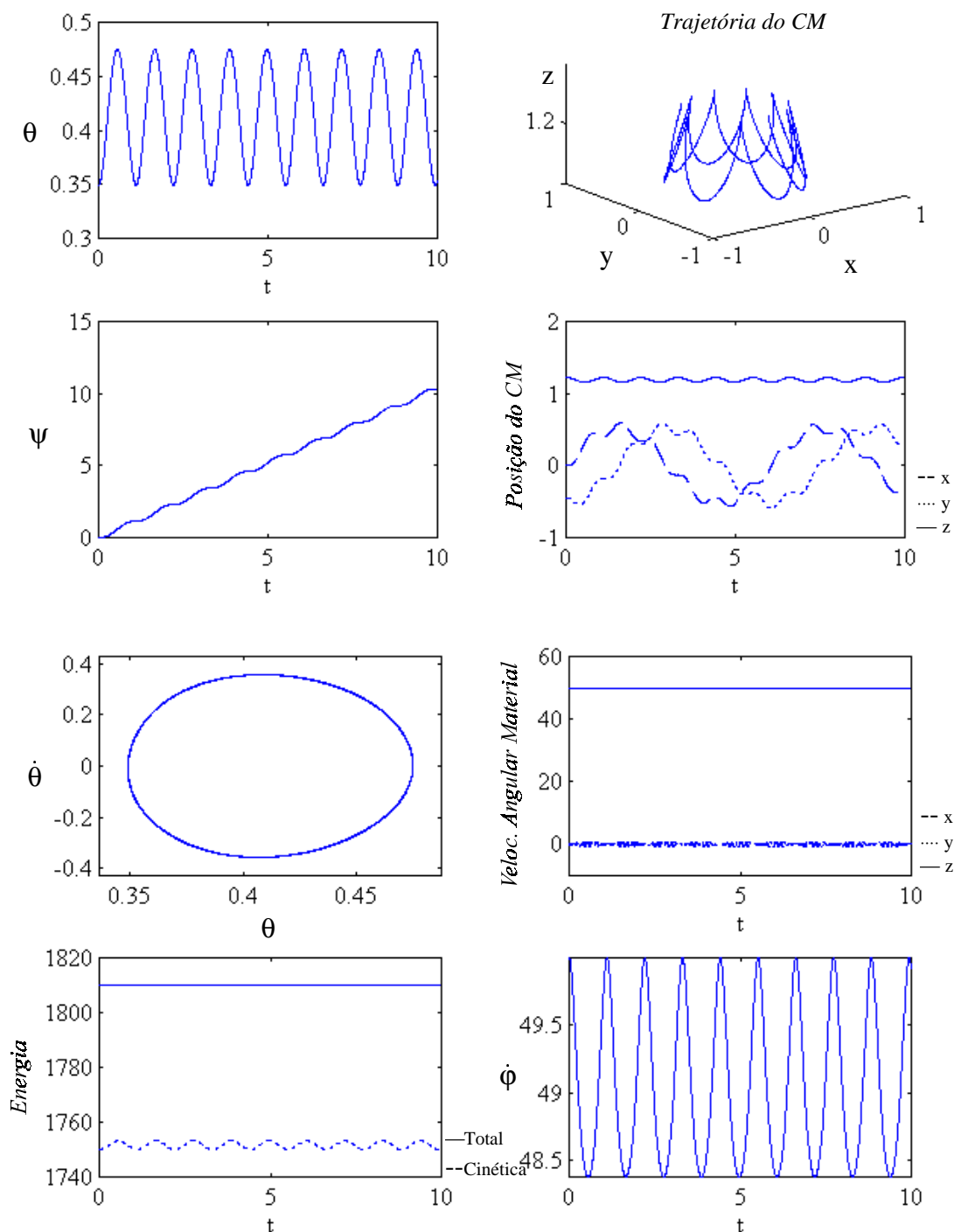


Figura 5.3 - Simulação das equações do movimento do pião pesado em termos dos ângulos de Euler. Condições iniciais: $(\theta_0 = \pi/9 \text{ rad e } \dot{\phi}_0 = 50 \text{ rad/s})$.

Esta simulação representa o comportamento do pião pesado mais comum, e mais fácil de ser observado na prática. O pião apresenta uma nutação periódica, como pode ser observado no gráfico $\dot{\theta} \times \theta$ da Figura 5.3, de frequência maior que a precessão de acordo com a aproximação dada por Goldstein (Goldstein 1980) para o pião rápido.

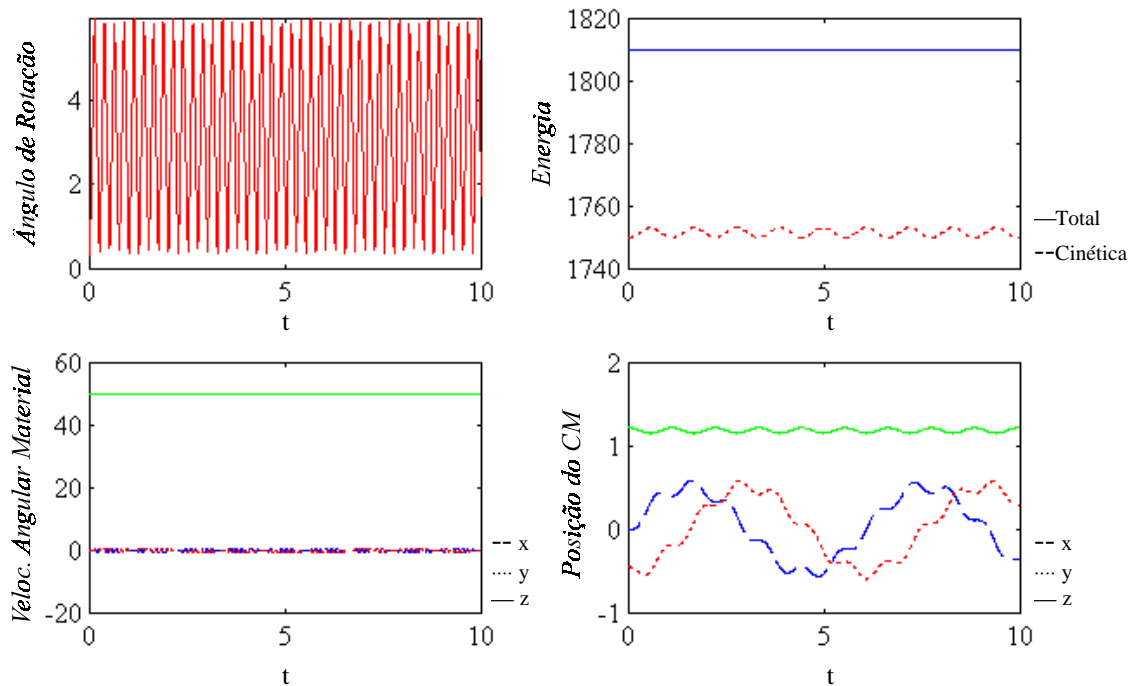


Figura 5.4 - Simulação das equações do movimento do pião pesado em termos do vetor rotação. Condições iniciais: $(\theta_0 = \pi/9 \text{ rad e } \dot{\phi}_0 = 50 \text{ rad/s})$.

Na segunda simulação, cujos resultados são mostrados nas Figuras 5.5 e 5.6, consideramos que o pião tem as seguintes condições iniciais: $\theta_0 = \pi/9 \text{ rad}$, $\dot{\phi}_0 = 50 \text{ rad/s}$ e $\dot{\psi}_0 = -10 \text{ rad/s}$. Para estas condições iniciais, a velocidade inicial de precessão negativa faz com que o pião apresente um comportamento diferente da primeira simulação, com uma amplitude de nutação bem maior. A Tabela 5.2 mostra a performance dos integradores para estas condições iniciais.

Tabela 5.2 - Performance dos algoritmos de integração. Exemplo II. $(\theta_0 = \pi/9 \text{ rad}$, $\dot{\phi}_0 = 50 \text{ rad/s}$ e $\dot{\psi}_0 = -10 \text{ rad/s})$

| Algoritmo (tol. erro=1e-6) | Tempo de CPU (seg) (Ângulos de Euler) | Tempo de CPU (seg) (Vetor Rotação) |
|-------------------------------|--|---------------------------------------|
| Mét. Explícitos | | |
| ODE45 | 168 | 275 |
| ODE23 | 695 | 1071 |
| ODE113 | 139 | 301 |
| ADAMS | 95 | 262 |
| Mét. Implícitos | | |
| ODE15s | 104 | 290 |
| ODE23s | 3026 | 4812 |
| GEAR | 115 | 262 |

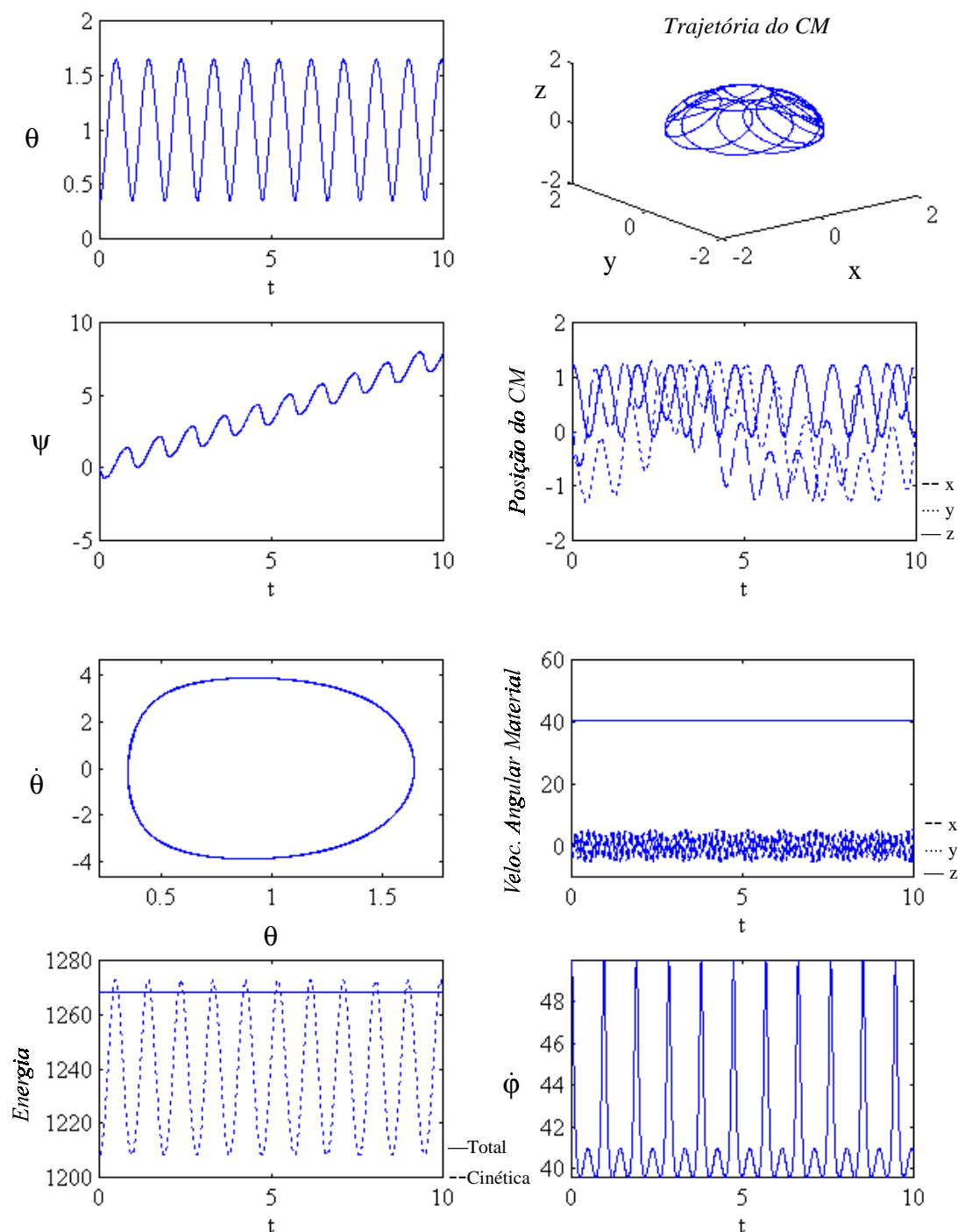


Figura 5.5 - Simulação das equações do movimento do pião pesado em termos dos ângulos de Euler. Condições iniciais: $(\theta_0 = \pi/9 \text{ rad}, \dot{\phi}_0 = 50 \text{ rad/s e } \dot{\psi}_0 = -10 \text{ rad/s})$.

Observando a Tabela 5.2, podemos notar que a razão entre o tempo de CPU da integração com o vetor rotação e com ângulos de Euler diminuiu, i.e., a integração com o vetor rotação ficou mais rápida, em relação à integração com os ângulos de Euler, que no caso anterior. Isto pode ser explicado pelo fato de que a frequência de oscilação das componentes do vetor rotação diminuiu em relação ao caso anterior (Figura 5.6).

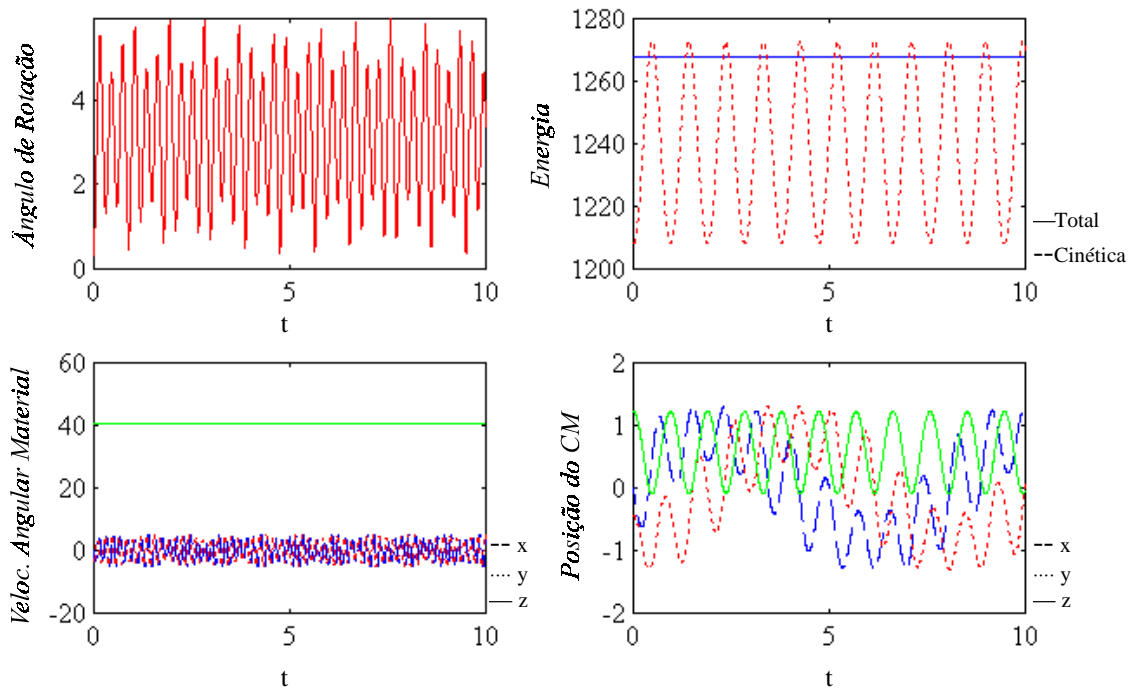


Figura 5.6 - Simulação das equações do movimento do pião pesado em termos do vetor rotação. Condições iniciais: $\theta_0 = \pi/9$ rad, $\dot{\phi}_0 = 50$ rad/s e $\dot{\psi}_0 = -10$ rad/s.

Na terceira simulação, cujos resultados são mostrados nas Figuras 5.7 e 5.8, o pião possui as seguintes condições iniciais: $\theta_0 = \pi/9$ rad, $\dot{\phi}_0 = 50$ rad/s e $\dot{\psi}_0 = 1$ rad/s. Os resultados desta simulação são próximos aos da primeira simulação, entretanto, estas condições iniciais dão origem a um comportamento particular do pião difícil de ser observado deveras interessante que será analisado a seguir. A Tabela 5.3 mostra a performance dos integradores.

Tabela 5.3 - Performance dos algoritmos de integração. Exemplo III. ($\theta_0 = \pi/9$ rad, $\dot{\phi}_0 = 50$ rad/s e $\dot{\psi}_0 = 1$ rad/s)

| Algoritmo (tol. erro=1e-6) | Tempo de CPU (seg) (Ângulos de Euler) | Tempo de CPU (seg) (Vetor Rotação) |
|-------------------------------|--|---------------------------------------|
| Mét. Explícitos | | |
| ODE45 | 161 | 398 |
| ODE23 | 558 | 1184 |
| ODE113 | 160 | 415 |
| ADAMS | 121 | 356 |
| Mét. Implícitos | | |
| ODE15s | 117 | 422 |
| ODE23s | 2193 | 5606 |
| GEAR | 86 | 357 |

Neste caso, como podemos observar na Figura 5.7, o ângulo de nutação θ é praticamente constante e, conseqüentemente, a altura do centro de massa também. Podemos notar, ainda, que o ângulo de precessão ψ varia quase linearmente no tempo. Por esta razão, o pião é dito estar girando com velocidade uniforme em torno do eixo vertical.

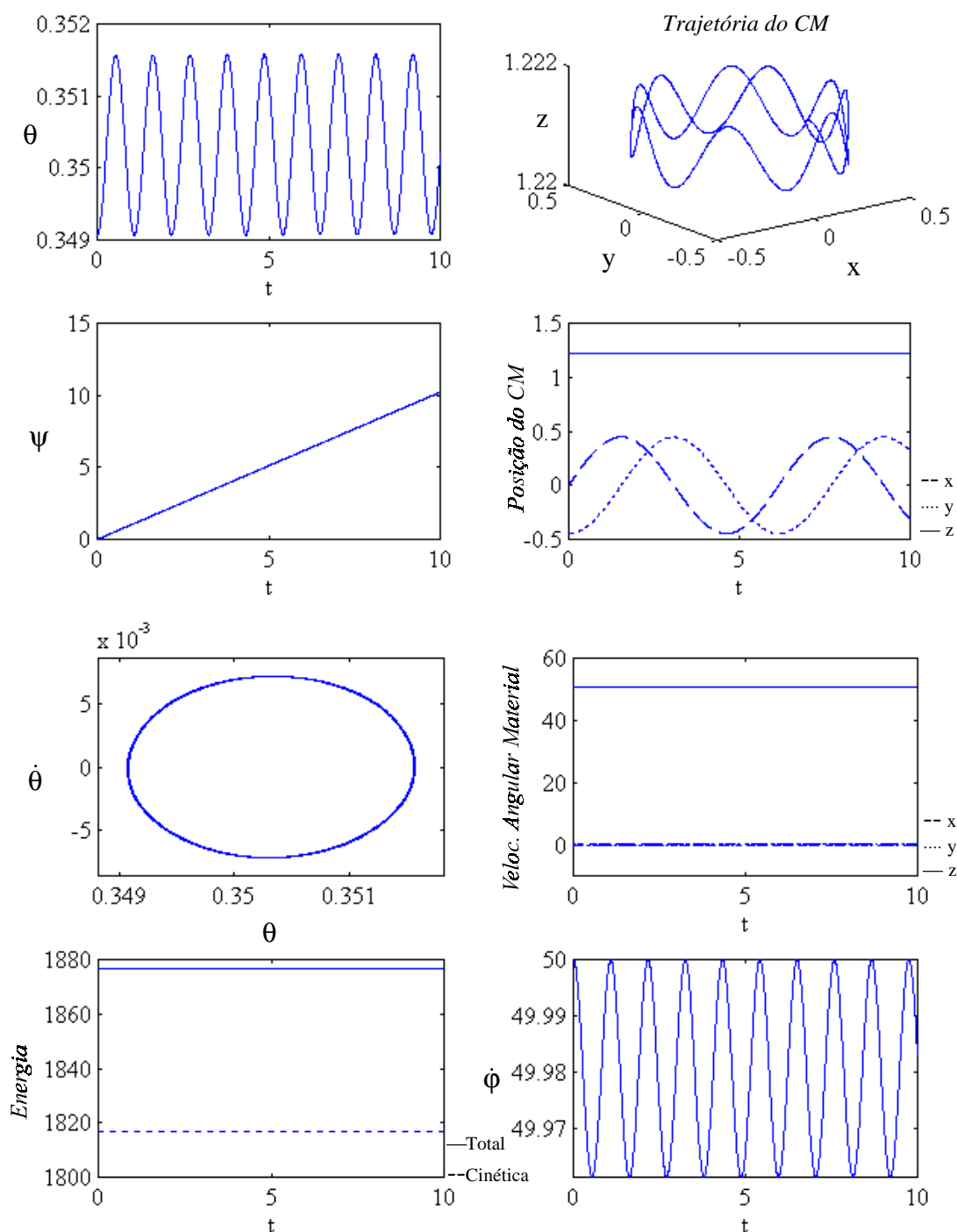


Figura 5.7 - Simulação das equações do movimento do pião pesado em termos dos ângulos de Euler. Condições iniciais: $\theta_0 = \pi/9$ rad, $\dot{\phi}_0 = 50$ rad/s e $\dot{\psi}_0 = 1$ rad/s.

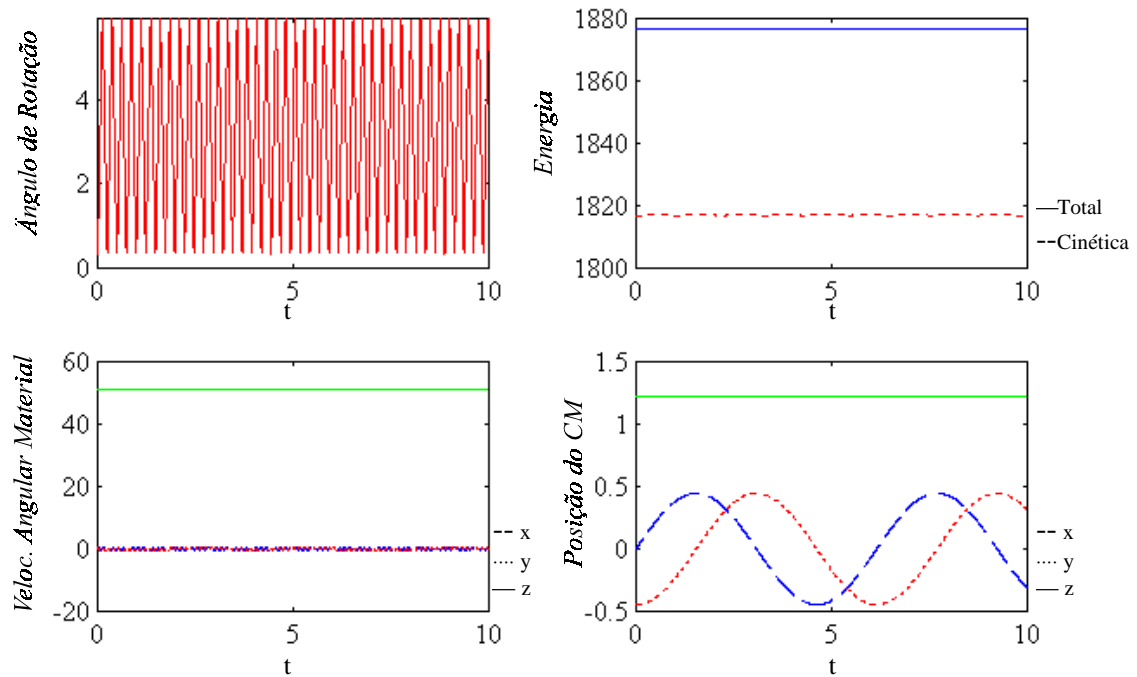


Figura 5.8 - Simulação das equações do movimento do pião pesado em termos do vetor rotação. Condições iniciais: $\theta_0 = \pi/9$ rad, $\dot{\phi}_0 = 50$ rad/s e $\dot{\psi}_0 = 1$ rad/s.

Na última simulação, cujos resultados são mostrados nas Figuras 5.9 e 5.10, consideramos que o pião possui as seguintes condições iniciais: $\theta_0 = \pi/9$ rad e $\dot{\phi}_0 = 0,01$ rad/s. Neste caso, o pião se aproxima bastante do ponto de singularidade inferior dos ângulos de Euler ($\theta = \pi$). A Tabela 5.4 mostra a performance dos integradores, onde podemos observar que o tempo de CPU diminuiu bastante em relação aos exemplos anteriores. Isto é explicado pelo fato de que as frequências de oscilação das componentes da velocidade angular e do vetor rotação diminuíram sensivelmente.

Tabela 5.4 - Performance dos algoritmos de integração. Exemplo IV. ($\theta_0 = \pi/9$ rad e $\dot{\phi}_0 = 0,01$ rad/s)

| Algoritmo (tol. erro=1e-6) | Tempo de CPU (seg) (Ângulos de Euler) | Tempo de CPU (seg) (Vetor Rotação) |
|-------------------------------|--|---------------------------------------|
| Mét. Explícitos | | |
| ODE45 | 35 | 18 |
| ODE23 | 81 | 54 |
| ODE113 | 111 | 78 |
| ADAMS | 38 | 27 |
| Mét. Implícitos | | |
| ODE15s | 58 | 23 |
| ODE23s | 302 | 216 |
| GEAR | 49 | 27 |

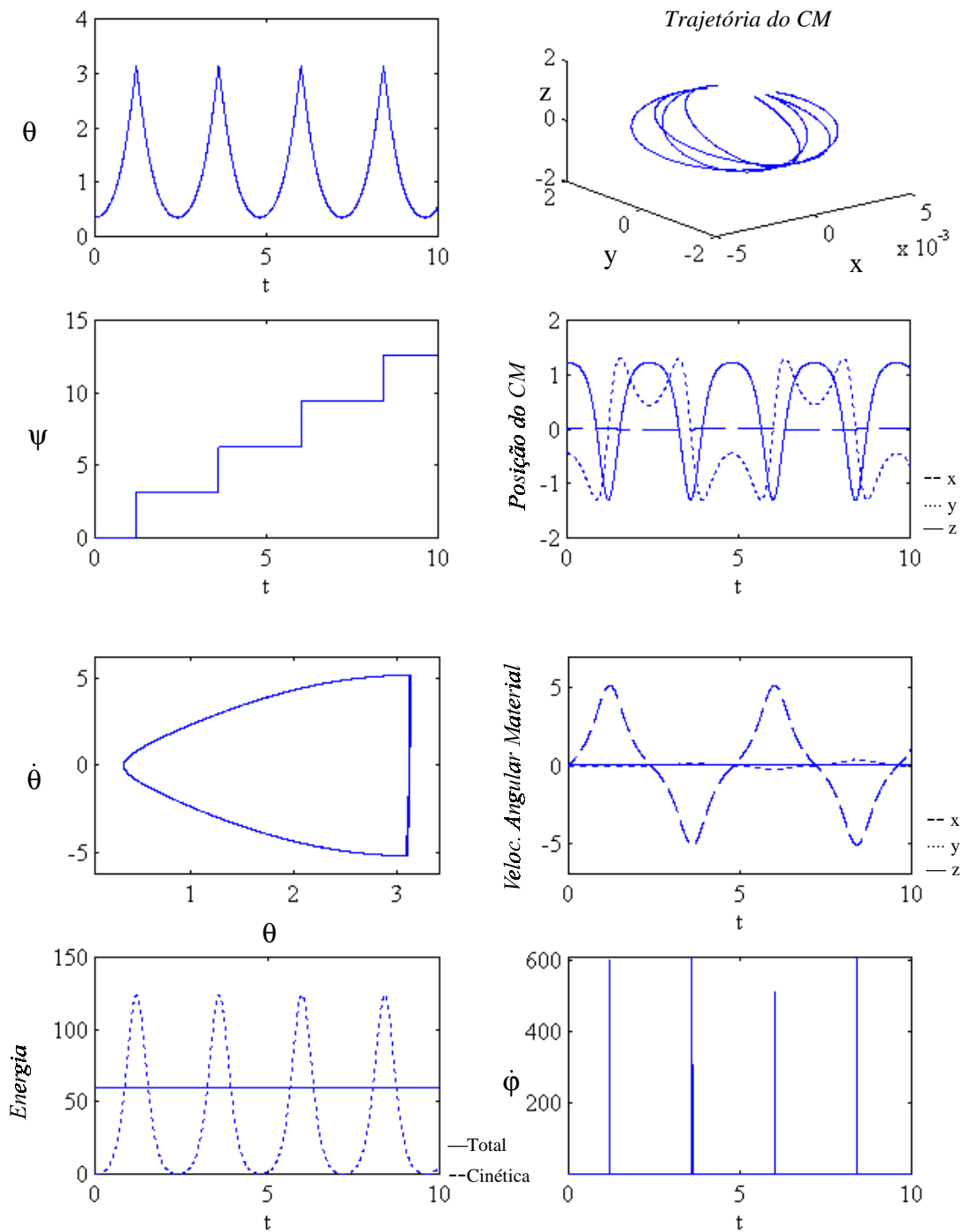


Figura 5.9 - Simulação das equações do movimento do pião pesado em termos dos ângulos de Euler. Condições iniciais: $\theta_0 = \pi/9$ rad e $\dot{\phi}_0 = 0,01$ rad/s.

Podemos observar na Tabela 5.4 que a integração com o vetor rotação foi mais rápida que com os ângulos de Euler. Isto é devido, principalmente, a dois fatores: 1) as equações em termos dos ângulos de Euler se tornam singulares para $(\theta = \pi)$, já que, neste caso como mostrado no capítulo 2, $\det(\mathbf{T}) = 0$ e 2) a frequência de oscilação das componentes do vetor rotação (Figura 5.10) diminuiu muito.

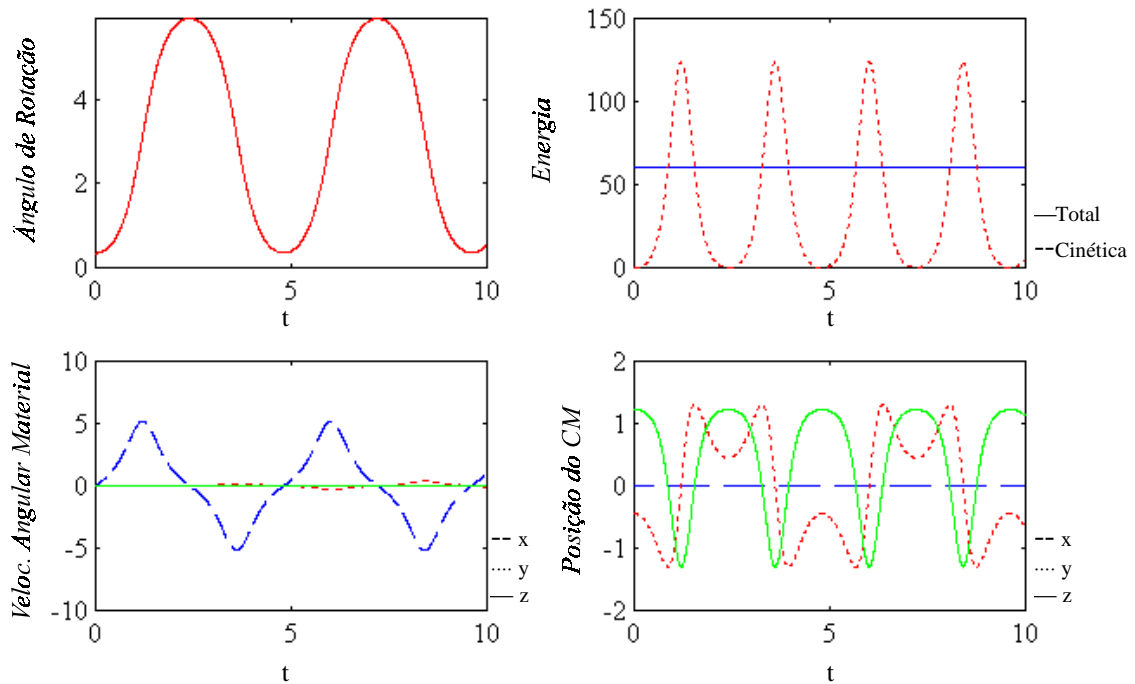


Figura 5.10 - Simulação das equações do movimento do pião pesado em termos do vetor rotação. Condições iniciais: $\theta_0 = \pi/9$ rad e $\dot{\phi}_0 = 0,01$ rad/s.

Neste caso, podemos observar na Tabela 5.4 que o algoritmo ODE45 foi o mais rápido para os ângulos de Euler e para o vetor rotação. O algoritmo ODE15s foi bastante lento em relação ao ODE45 no caso dos ângulos de Euler, mas teve quase a mesma performance no

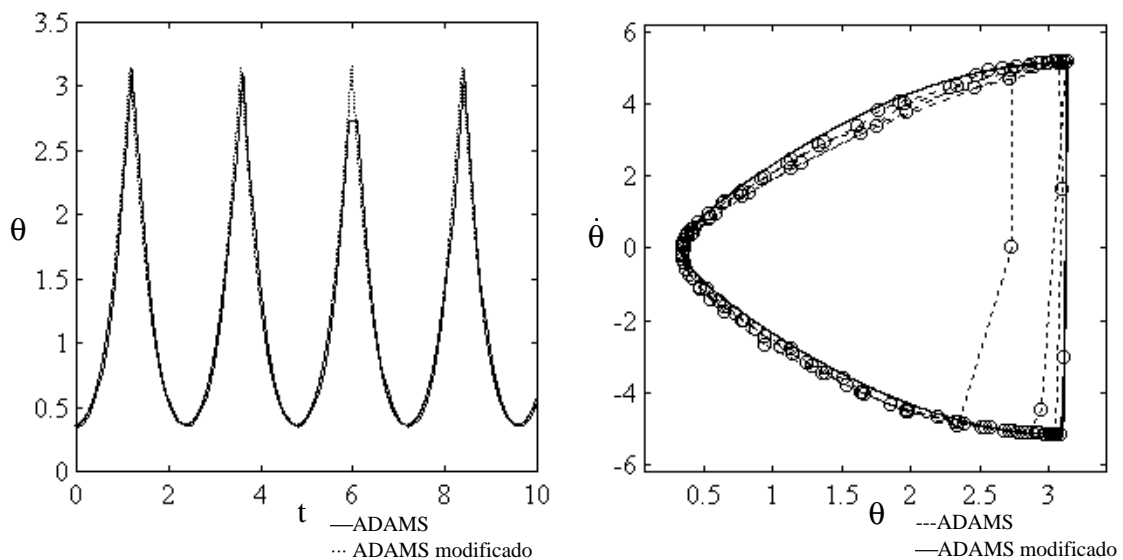


Figura 5.11 - Resolução da saída do algoritmo ADAMS com (linha pontilhada) e sem (linha contínua) limitação de tamanho de passo máximo na simulação do pião pesado em termos dos ângulos de Euler. Condições iniciais: $\theta_0 = \pi/9$ rad e $\dot{\phi}_0 = 0,01$ rad/s.

caso do vetor rotação. Isto se deve ao fato de que, os ângulos de Euler apresentam variações bruscas (quase descontinuidades) e, conseqüentemente, os algoritmos têm que efetuar mudanças bruscas no passo de integração, de maneira que o número de passos perdidos aumenta e são prejudicados os métodos cujo custo por passo é alto, como o ODE113 por exemplo. Os métodos ADAMS e GEAR não apresentaram resultados satisfatórios, por isso, uma limitação no tamanho de passo máximo teve que ser feita para que a resolução da saída fosse aceitável. Na Figura 5.11, apresentamos o gráfico da variação do ângulo de nutação θ no tempo simulado pelo algoritmo ADAMS com e sem limitação de tamanho de passo máximo.

5. CONCLUSÕES

Uma das principais dificuldades ainda encontradas na simulação numérica de sistemas de multicorpos é a necessidade de escolher entre integrar equações diferenciais ordinárias complexas e não-lineares, as quais podem ser de difícil formulação, e integrar equações algébrico-diferenciais, para as quais ainda não existem métodos suficientemente confiáveis.

Neste capítulo, apresentamos o tratamento numérico das equações do movimento na forma de equações diferenciais ordinárias, dividindo as equações em rígidas (stiff) e não-rígidas (non-stiff). Vários algoritmos de integração, explícitos e implícitos, foram utilizados e comparados por meio da simulação do pião pesado com ponto fixo. A integração das equações foi realizada no ambiente do MATLAB, utilizando os cinco integradores do MATLAB OdeSuite (Shampine e Reichlet 1995) e dois integradores do SIMULINK (The MathWorks, Inc. 1994). Foram realizadas quatro simulações do pião pesado com diferentes condições iniciais, atentando para a questão da singularidade dos ângulos de Euler, mencionada no capítulo 2. Todos os integradores, com exceção dos dois do SIMULINK, apresentaram resultados satisfatoriamente precisos e com a resolução adequada. Porém, os algoritmos ODE23 e ODE23s demonstraram ser muito caros, para este caso. O algoritmo ODE15s mostrou ser a melhor opção para sistemas rígidos. Os algoritmos ADAMS e GEAR mostraram ser algoritmos rápidos pois são métodos de passo variável e, podem utilizar passos de integração arbitrariamente grandes; porém, esta característica prejudica a resolução da saída e uma limitação do tamanho de passo máximo, como apresentado na seção anterior, é necessária. O método mais regular foi o ODE45, demonstrando ser pouco sensível a mudanças bruscas nas constantes de tempo. Além disso, foi o método que apresentou melhores precisão e resolução de saída, o que nos permite concluir que, salvo casos especiais, o ODE45 é o método de escolha.

Controle Linear de Multicorpos

1. INTRODUÇÃO

1. 1. Controle de sistemas no espaço de estados

Na teoria de controle clássica, a análise e o projeto de controladores são realizados no domínio de Laplace, utilizando funções de transferência assim como gráficos de lugar das raízes e diagramas de Bode. Porém, a teoria clássica é, geralmente, aplicável somente a sistemas lineares invariantes no tempo tendo uma única entrada e uma única saída, não sendo portanto aplicável para sistemas variantes no tempo, não-lineares e de múltiplas entradas e múltiplas saídas. Portanto, as técnicas convencionais da teoria de controle clássico não se aplicam ao projeto de controle ótimo e adaptativos.

A teoria de controle pelo método de espaço de estados, por outro lado, permite o projeto através da imposição de pólos de malha fechada ou o projeto de controle ótimo através da imposição de índices de desempenho desejados. Do ponto de vista computacional, o projeto de controle pelo método de espaço de estados possui grandes vantagens por realizar todos os cálculos através da álgebra matricial e por ser realizado no domínio do tempo. Além disso, a ligação entre a modelagem de sistemas dinâmicos de multicorpos realizada anteriormente e o projeto de controle pelo método de espaço de estados é automática, pois a forma final das equações encontradas na modelagem depois de linearizadas é a forma requerida para o projeto do controle.

Nesta seção abordaremos a metodologia para representar sistemas dinâmicos de multicorpos no espaço de estados, a análise de estabilidade de sistemas dinâmicos, a definição de propriedades do sistema importantes para o projeto do controle como controlabilidade e observabilidade. Nas seções subsequentes, apresentaremos o projeto de controle através da imposição de pólos com e sem observadores de estado e o projeto de controle ótimo.

1. 2. Linearização das equações do movimento

Os sistemas dinâmicos de multicorpos cujo controle é tratado neste trabalho são, geralmente, sistemas não-lineares. Portanto, para realizar o projeto do controle linear devemos

linearizar estes sistemas em torno de um ponto de operação. No controle de estruturas, isto é perfeitamente aceitável, já que as características de não-linearidade geométrica devidas a grandes deslocamentos e/ou grandes deformações são pequenas. Isto porque estas, normalmente, são as características do sistema que devem ser minimizadas pelo controle. Mesmo se tratando de estruturas que devem apresentar grandes deslocamentos, normalmente o sistema pode ser linearizado em torno de cada ponto da trajetória de operação da estrutura. Ambos os casos serão apresentados nesta seção.

Para introduzirmos a linearização de um sistema devemos primeiro definir o que são pontos de equilíbrio. Um ponto x_0 é um ponto de equilíbrio de um sistema

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \quad (6.1.1)$$

se $f(x_0) = 0$, isto é, o campo de vetores $f(x)$ se anula no ponto x_0 .

Consideremos, agora, a expansão em série de Taylor da função não-linear $f(x)$

$$f(x) = A(x - x_0) + R_2(x), \text{ onde } A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_0}, R_2 = O(x^2) \quad (6.1.2)$$

onde o operador linear A está associado à matriz a_{ij}

$$(Ax)_i = \sum_j a_{ij}x_j, \quad a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \quad (6.1.3)$$

Desta maneira, podemos introduzir a linearização de um sistema. A linearização de um sistema na forma da Eq. (6.1.1) é a passagem deste sistema para um sistema na forma

$$\frac{dy}{dt} = Ay \quad (6.1.4)$$

1. 3. Representação de sistemas dinâmicos por espaço de estados

O método de espaço de estados é bastante apropriado para a representação de sistemas dinâmicos. Usando-se notação matricial podemos reduzir uma equação de ordem n a n equações diferenciais de primeira ordem. Será demonstrado que esta notação é bastante conveniente tanto para o projeto do controle quanto para a simulação do sistema.

Seja um sistema de ordem n , representado na Figura 6.1

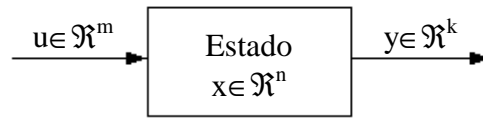


Figura 6.1 - Sistema de múltiplas entradas e saídas

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} \dot{y} + a_n y = u \quad (6.1.5)$$

neste caso, podemos considerar $y(t), \dot{y}(t), \dots, y^{(n-1)}(t)$ como um conjunto de n variáveis de estado. Renomeando estas variáveis de estado

$$\begin{aligned} x_1 &= y \\ x_2 &= \dot{y} \\ &\vdots \\ x_n &= y^{(n-1)} \end{aligned} \quad (6.1.6)$$

Desta maneira, podemos escrever a Eq. (6.1.5) da seguinte forma

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1} &= x_n \\ \dot{x}_n &= -a_n x_1 - \dots - a_1 x_n + u \end{aligned} \quad (6.1.7)$$

ou, escrevendo em notação matricial

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \quad (6.1.8)$$

onde

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (6.1.9)$$

A saída pode ser dada por

$$y = Cx + Du \quad (6.1.10)$$

onde $C = [1 \ 0 \ \cdots \ 0]$ e $D = 0$ para ter como saída a variável de primeira ordem do estado.

Reunindo as equações (6.1.8) e (6.1.10), temos a forma final da equação do movimento no espaço de estados referente a um sistema como representado na Figura 6.1

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned} \quad (6.1.11)$$

onde $x \in \mathcal{R}^n$, $y \in \mathcal{R}^k$, $u \in \mathcal{R}^m$, $A \in \mathcal{R}^{n \times n}$, $B \in \mathcal{R}^{n \times m}$, $C \in \mathcal{R}^{k \times n}$, $D \in \mathcal{R}^{k \times m}$.

1. 4. Análise de estabilidade de sistemas dinâmicos

A estabilidade de um sistema dinâmico que se deseja controlar é, normalmente, o fator mais importante a ser analisado. O controle é utilizado para estabilizar um sistema instável ou para alterar o comportamento de um sistema estável. Nesta seção apresentaremos o segundo método de Liapunov (método direto de Liapunov) pelo fato de ele ser o mais geral dentre os existentes para determinação da estabilidade de sistemas não-lineares e/ou lineares variantes no tempo.

Consideremos um sistema definido pela seguinte equação

$$\dot{x} = f(t, x) \quad (6.1.12)$$

Supomos que o sistema representado pela equação acima tem uma única solução começando em uma dada condição inicial. Denotaremos esta solução como $\varphi(t; t_0, x_0)$, portanto

$$\varphi(t; t_0, x_0) = x_0 \quad (6.1.13)$$

Consideremos, agora, um estado de equilíbrio x_e , ou seja, um estado x_e tal que

$$f(t, x_e) = 0 \quad (6.1.14)$$

Se o sistema é linear invariante no tempo, ou seja, $f(t, x) = Ax$, então há apenas um estado de equilíbrio, se A for não-singular. Para sistemas não-lineares, pode haver um ou mais estados de equilíbrio. A determinação dos estados de equilíbrio envolve apenas a solução da equação (6.1.14).

A seguir, denotaremos uma região esférica de raio κ ao redor de um estado de equilíbrio x_e como

$$\|x - x_e\| \leq \kappa \quad (6.1.15)$$

onde $\|x - x_e\|$ é chamada de norma euclidiana, definida por

$$\|x - x_e\| = \left[(x_1 - x_{1e})^2 + (x_2 - x_{2e})^2 + \dots + (x_n - x_{ne})^2 \right]^{1/2} \quad (6.1.16)$$

Seja $S(\delta)$ um conjunto de todos os pontos tais que

$$\|x_0 - x_e\| \leq \delta \quad (6.1.17)$$

e seja $S(\epsilon)$ um conjunto de todos os pontos tais que

$$\|\phi(t; t_0, x_0) - x_e\| \leq \epsilon \quad \forall t \geq t_0 \quad (6.1.18)$$

Um estado de equilíbrio x_e do sistema representado pela Eq. (6.1.12) é dito estável no sentido de Liapunov se, para cada $S(\epsilon)$, houver um $S(\delta)$ tal que as trajetórias partindo de $S(\delta)$ não saem de $S(\epsilon)$ quando t tende ao infinito. Ainda, se, além de satisfazer a condição anterior, a trajetória tender a x_e quando t tende ao infinito, o estado é dito assintoticamente estável.

Para um sistema linear invariante do tipo $\dot{x} = Ax$, a condição necessária e suficiente para a estabilidade assintótica da origem do sistema é que todos os autovalores de A tenham partes reais negativas, porém a determinação dos autovalores se torna difícil ou, às vezes, até

impossível no caso de sistemas de ordem alta. Uma alternativa é utilizar os critérios de estabilidade de Routh ou de Hurwitz para verificação do sinal da parte real dos autovalores de A . Outra alternativa é utilizar o segundo método de Liapunov para determinar a estabilidade do sistema. Neste trabalho, vamos utilizar esta última. Para isso, vamos apresentar a abordagem de Liapunov na análise da estabilidade de sistemas lineares invariantes no tempo.

Da teoria clássica de mecânica, um sistema é estável se sua energia total é continuamente decrescente no tempo até que um estado de equilíbrio seja alcançado. O segundo método de Liapunov é baseado na generalização deste fato. Se o sistema tem um estado de equilíbrio assintoticamente estável, então a energia armazenada do sistema deslocado dentro do domínio de atração decresce até que um ponto de mínimo seja atingido no estado de equilíbrio. Entretanto, o método de Liapunov não utiliza necessariamente a energia do sistema, e sim uma energia fictícia chamada função de Liapunov. Uma função de Liapunov consiste em qualquer função escalar que satisfaça as hipóteses de estabilidade de Liapunov, que neste trabalho chamaremos de $V(t,x)$.

No segundo método de Liapunov, o comportamento do sinal de $V(t,x)$ e o de sua derivada temporal $\dot{V}(t,x)$ fornece informações acerca da estabilidade, estabilidade assintótica ou instabilidade de um estado de equilíbrio sem que haja a necessidade de se resolver diretamente as equações.

Se a função escalar $V(t,x)$ for positiva definida então os estados que satisfazem

$$V(t,x) = C \quad (6.1.19)$$

onde C é uma constante positiva, estão contidos em uma hipersuperfície fechada no espaço de estados n -dimensional, pelo menos próximo da origem. Se $V(t,x) \rightarrow \infty$ quando $\|x\| \rightarrow \infty$, então estas superfícies fechadas se estendem por todo o espaço de estados.

Para um dado sistema, caso se possa achar um função escalar positiva definida cuja derivada temporal ao longo de uma trajetória seja sempre negativa, então, quando o tempo aumenta, esta função assume valores cada vez menores que C . Isso implica que o estado é assintoticamente estável.

Portanto, para um sistema representado pela Eq. (6.1.12) se houver uma função escalar $V(t,x)$ tendo primeiras derivadas parciais contínuas e satisfazendo as seguintes condições,

1. $V(t,x)$ é positiva definida
2. $\dot{V}(t,x)$ é negativa definida

então o estado de equilíbrio é assintoticamente estável uniformemente.

Introduziremos, agora, a abordagem de Liapunov para sistemas lineares invariantes no tempo do tipo

$$\dot{x} = Ax \quad (6.1.20)$$

onde A é não-singular. Desta maneira, o sistema só tem um estado de equilíbrio que é a origem $x = 0$.

Para este sistema, vamos escolher a seguinte possível função de Liapunov

$$V(x) = x^* P x \quad (6.1.21)$$

onde P é uma matriz positiva definida hermitiana. A derivada de $V(x)$ em relação ao tempo ao longo de qualquer trajetória é

$$\dot{V}(x) = x^* (A^* P + P A) x \quad (6.1.22)$$

Como $V(x)$ foi escolhida como positiva definida, é necessário, para a estabilidade assintótica, que $\dot{V}(x)$ seja negativa definida. Portanto, requeremos que

$$\dot{V}(x) = -x^* Q x \quad (6.1.23)$$

onde $Q = -(A^* P + P A)$ é positiva definida. Portanto, para que o sistema seja assintoticamente estável, é necessário que exista uma matriz positiva definida P que origine uma matriz Q positiva definida. Para efeito de cálculo de P , é conveniente utilizar $Q = I$.

1. 5. Controlabilidade e observabilidade

Um sistema é dito controlável no instante t_0 se for possível, sem restrições, por meio de um sinal de controle u , transferir o sistema de qualquer estado inicial $x(t_0)$ para qualquer outro estado em um intervalo finito de tempo.

Um sistema é dito observável no instante t_0 se, com o sistema no estado $x(t_0)$, for possível determinar este estado a partir da observação da saída durante um intervalo de tempo finito.

Os conceitos de controlabilidade e observabilidade foram introduzidos por Kalman. Eles têm papel muito importante no projeto de sistemas de controle no espaço de estados. Na verdade, as condições de controlabilidade e observabilidade podem governar a existência ou não de solução completa para o problema de projeto de sistemas de controle. Embora, a maioria dos sistemas físicos sejam controláveis e observáveis, seus modelos matemáticos nem sempre o são. Por isso, nesta seção, discutiremos os conceitos de controlabilidade e observabilidade.

1. 5. 1. Controlabilidade

Seja o sistema dinâmico definido pela seguinte equação

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (6.1.24)$$

onde u é um sinal de controle escalar.

O sistema descrito pela Eq. (6.1.24) é considerado de estado controlável em $t = t_0$ se for possível, através de um sinal de controle não-limitado, transferir um estado inicial para qualquer estado final em um intervalo de tempo finito $t_0 \leq t \leq t_1$. Se todo estado for controlável, então o sistema é considerado de estado completamente controlável.

Para deduzirmos, agora, a condição para controlabilidade completa de estado, vamos supor que o estado final que se deseja atingir é a origem do espaço de estados e que o tempo inicial é zero ($t_0 = 0$).

A solução da Eq. (6.1.24) pode ser escrita como

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \quad (6.1.25)$$

Substituindo as condições desejadas na equação acima temos

$$x(t_1) = 0 = e^{At_1}x(0) + \int_0^{t_1} e^{A(t_1-\tau)}Bu(\tau)d\tau \quad (6.1.26)$$

ou, simplificando a expressão acima

$$x(0) = -\int_0^{t_1} e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau \quad (6.1.27)$$

Lembrando que $e^{-A\tau}$ pode ser escrita como

$$e^{-A\tau} = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(\tau)A^k \quad (6.1.28)$$

Substituindo a Eq. (6.1.28) na Eq. (6.1.27), obtemos

$$x(0) = -\sum_{k=0}^{n-1} A^k B \int_0^{t_1} \alpha_k(\tau)u(\tau)d\tau \quad (6.1.29)$$

Vamos fazer

$$\int_0^{t_1} \alpha_k(\tau) u(\tau) d\tau = \beta_k \quad (6.1.30)$$

Desta maneira, a Eq. (6.1.29) pode ser reescrita

$$\begin{aligned} x(0) &= - \sum_{k=0}^{n-1} A^k B \beta_k \\ &= \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.1.31)$$

Para que o sistema seja de estado completamente controlável, a equação deve ser satisfeita, dado qualquer estado inicial $x(0)$. Isto requer que o posto da matriz $n \times n$

$$\begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \quad (6.1.32)$$

seja n .

Este resultado pode ser estendido para o caso em que o vetor u de controle é r -dimensional.

1. 5. 2. Observabilidade

Seja o sistema dinâmico descrito pelas seguintes equações

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned} \quad (6.1.33)$$

Este sistema é considerado observável se todo estado inicial $x(t_0)$ puder ser determinado a partir da observação de $y(t)$ durante um intervalo de tempo finito $t_0 \leq t \leq t_1$. O sistema

portanto é completamente observável se toda alteração no estado puder ser observado através do vetor de saída y .

O conceito de observabilidade é muito importante porque, na prática, o controle de realimentação de estado é dificultado pela necessidade de se medir todas as variáveis de estado, sendo que nem sempre todas são mensuráveis. Desta maneira, é necessário estimar as variáveis de estado não mensuráveis a partir das mensuráveis no mínimo espaço de tempo possível.

A solução para o sistema descrito pelas Eq. (6.1.33) pode ser escrito como

$$\mathbf{x}(t) = e^{At}\mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau \quad (6.1.34)$$

e a saída $y(t)$ pode ser escrita como

$$y(t) = \mathbf{C}e^{At}\mathbf{x}(0) + \mathbf{C}\int_0^t e^{A(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau + \mathbf{D}\mathbf{u} \quad (6.1.35)$$

Como as matrizes A , B , C e D e o vetor $u(t)$ são conhecidos, os dois últimos termos da Eq. (6.1.35) são conhecidos e, portanto, podem ser subtraídos do valor observado $y(t)$. Desta forma, para investigar uma condição necessária e suficiente para observabilidade completa, é suficiente considerar apenas o seguinte sistema

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} \\ y &= \mathbf{C}\mathbf{x} \end{aligned} \quad (6.1.36)$$

O vetor de saída $y(t)$ pode ser reescrito da seguinte forma

$$y(t) = \mathbf{C}e^{At}\mathbf{x}(0) \quad (6.1.37)$$

relembrando que

$$e^{A\tau} = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(\tau)A^k \quad (6.1.38)$$

Desta forma, obtemos o seguinte resultado

$$y(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(\tau) C A^k x(0) \quad (6.1.39)$$

Para que o sistema seja completamente observável, é necessário que dada uma saída $y(t)$ durante um intervalo de tempo, $x(0)$ é unicamente determinado a partir da Eq. (6.1.39). Isto requer que a matriz

$$\begin{bmatrix} C^* & | & A^* C^* & | & \dots & | & (A^*)^{n-1} C^* \end{bmatrix} \quad (6.1.40)$$

tenha posto n . Esta matriz é chamada de matriz de observabilidade.

2. PROJETO DE CONTROLADORES VIA IMPOSIÇÃO DE PÓLOS

Nesta seção apresentaremos uma técnica para projeto de controladores que consiste na imposição de pólos. É suposto que todas as variáveis de estado são mensuráveis e estão disponíveis para realimentação. Se o sistema for completamente controlável, os pólos de malha fechada do sistema podem ser colocados em quaisquer lugares desejados por meio da realimentação de estado utilizando uma matriz de ganho de realimentação de estado apropriada. O projeto de controladores via imposição de pólos consiste em calcular a matriz de ganho de realimentação de estado que coloca os pólos de malha fechada no lugar desejado.

Os pólos de malha fechada, normalmente, são determinados de acordo com a resposta desejada para o sistema em termos de características como tempo de assentamento e sobrevalor (Ogata 1990). Estas características facilmente determináveis em sistemas de 2ª ordem com uma entrada e uma saída, não são tão simples de se calcular para sistemas multi-variáveis e/ou de ordem elevada. Portanto, o que normalmente se faz é determinar dois pólos dominantes em função das características desejadas para o sistema e colocar os outros pólos distantes da origem. Desta forma, o efeito dos pólos de malha fechada não-dominantes sobre a resposta do sistema se torna desprezível.

Consideremos o sistema descrito pela equação

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (6.2.1)$$

onde o sinal de controle u é escalar e definido pela seguinte relação

$$u = -Kx \quad (6.2.2)$$

Desta forma, o sinal de controle é proporcional ao estado. A matriz K é denominada matriz de ganho de realimentação de estado.

Substituindo a Eq. (6.2.2) na Eq. (6.2.1) , obtemos

$$\dot{x} = (A - BK)x \quad (6.2.3)$$

A solução desta equação é dada por

$$x(t) = e^{(A-BK)t} x(0) \quad (6.2.4)$$

onde $x(0)$ é o estado inicial do sistema. As características de resposta transitória e de estabilidade do sistema são, agora, determinadas pelos autovalores da matriz $A-BK$. Escolhendo a matriz K adequadamente, podemos tornar a matriz $A-BK$ assintoticamente estável.

Vamos definir um operador T tal que

$$T = MW \quad (6.2.5)$$

onde M é a matriz de controlabilidade

$$M = [B \mid AB \mid \cdots \mid A^{n-1}B] \quad (6.2.6)$$

e

$$W = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & 1 \\ a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.2.7)$$

onde os coeficientes a_i são coeficientes do polinômio característico de A

$$|sI - A| = s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n \quad (6.2.8)$$

Vamos definir um novo vetor de estado \hat{x} dado por

$$x = T\hat{x} \quad (6.2.9)$$

Se o sistema é completamente controlável, a matriz M é inversível e, portanto, a matriz T é, também, inversível e a Eq. (6.2.1) pode ser reescrita como

$$\dot{\hat{x}} = T^{-1}AT\hat{x} + T^{-1}Bu \quad (6.2.10)$$

onde

$$T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \quad (6.2.11)$$

$$T^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (6.2.12)$$

Desta forma, a Eq. (6.2.10) está na forma canônica controlável. Uma equação de estado pode ser transformada na forma canônica controlável sempre o sistema for completamente controlável.

Vamos definir, agora, os autovalores desejados como $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$. A equação característica desejada pode ser escrita como

$$(s - \mu_1)(s - \mu_2) \dots (s - \mu_n) = s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} s + \alpha_n = 0 \quad (6.2.13)$$

Vamos escrever

$$\hat{K} = KT = [\delta_n \quad \delta_{n-1} \quad \cdots \quad \delta_1] \quad (6.2.14)$$

O sinal de controle utilizado para controlar esta sistema é $u = -\hat{K}\hat{x} = -KT\hat{x}$, desta forma, a equação de estado pode ser reescrita como

$$\dot{\hat{x}} = T^{-1}AT\hat{x} - T^{-1}BKT\hat{x} \quad (6.2.15)$$

A equação característica para este sistema é

$$\left| sI - T^{-1}AT + T^{-1}BKT \right| = 0 \quad (6.2.16)$$

Desenvolvendo esta equação característica obtemos

$$s^n + (a_1 + \delta_1)s^{n-1} + \cdots + (a_{n-1} + \delta_{n-1})s + (a_n + \delta_n) = 0 \quad (6.2.17)$$

Como é desejado que esta equação característica seja igual a equação característica desejada, podemos igualar os coeficientes das potências semelhantes, portanto, obtemos

$$\begin{aligned} a_1 + \delta_1 &= \alpha_1 \\ a_2 + \delta_2 &= \alpha_2 \\ &\vdots \\ a_n + \delta_n &= \alpha_n \end{aligned} \quad (6.2.18)$$

Resolvendo as equações acima em relação a δ_i e substituindo na Eq. (6.2.14), obtemos

$$K = \hat{K}T^{-1} = [\alpha_n - a_n \mid \alpha_{n-1} - a_{n-1} \mid \cdots \mid \alpha_2 - a_2 \mid \alpha_1 - a_1]T^{-1} \quad (6.2.19)$$

Desta maneira, se o sistema for completamente controlável pelo estado, todos os autovalores podem ser arbitrariamente localizados definindo a matriz de ganho de realimentação de estado K de acordo com a equação acima.

Há outras formas de calcular a matriz de ganho K , como a bem conhecida fórmula de Ackermann, que apresentaremos em seguida.

$$K = [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1] [B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B]^{-1} \phi(A) \quad (6.2.20)$$

onde

$$\phi(A) = A^n + \alpha_1 A^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} A + \alpha_n I \quad (6.2.21)$$

2. 1. Exemplo numérico do projeto de controladores via imposição de pólos

Nesta seção, apresentaremos um exemplo ilustrativo do projeto de controladores no espaço de estados via imposição de pólos.

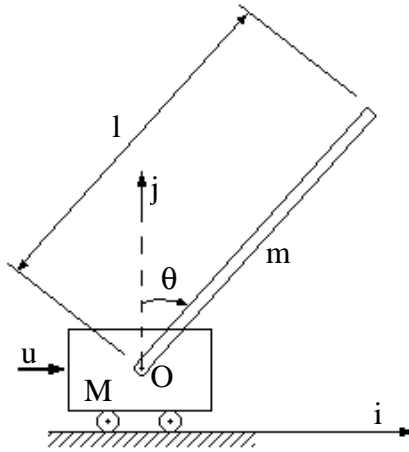


Figura 6.2 - Pêndulo invertido

Este sistema é composto por um carro de massa M e um pêndulo de massa m e comprimento l . O carro pode se mover apenas na horizontal, i.e., sobre o eixo i e o pêndulo pode girar em torno do ponto O . Este sistema possui dois graus de liberdade. Consideremos a posição x_c do carro e o ângulo de rotação θ do pêndulo como coordenadas generalizadas. A equação do movimento deste sistema pode ser facilmente determinada. Se linearizarmos as equações em torno de $\theta = 0$, obtemos

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

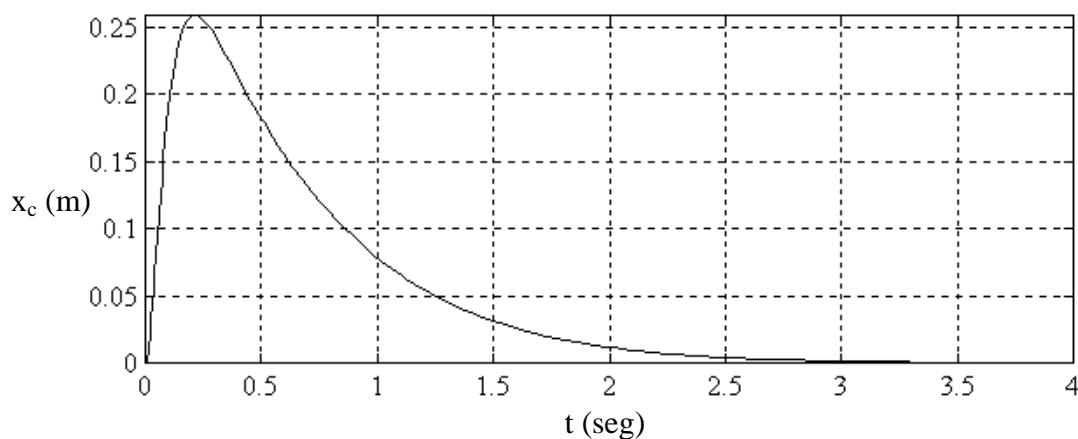
onde

$$x = \begin{bmatrix} x_c \\ \theta \\ \dot{x}_c \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \quad A = \frac{1}{(4M+m)l} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3mgl & 0 & 0 \\ 0 & 6(M+m)g & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \frac{1}{(4M+m)l} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4l \\ -6 \end{bmatrix}$$

Podemos observar facilmente que este sistema é instável, pois a matriz A tem dois autovalores nulos e outro positivo. Porém, este sistema é completamente controlável, já que a matriz de controlabilidade M é inversível e possui a inversa M^{-1}

$$M^{-1} = (4M + m)^2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{(M+m)}{(4M+m)^2} & \frac{ml}{2(4M+m)^2} \\ \frac{(M+m)l}{(4M+m)} & \frac{ml^2}{2(4M+m)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{l^2}{6g} & -\frac{l^3}{9g} \\ -\frac{(4M+m)l^3}{6g} & -\frac{(4M+m)l^4}{9g} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Consideremos, agora, os seguintes parâmetros: $M=2\text{kg}$; $m=0,1\text{kg}$; $l=0,5\text{m}$. Vamos projetar o controle através da imposição de pólos. O cálculo da matriz de realimentação foi realizado no MATLAB, utilizando seu toolbox de controle que contém duas funções *place* e *acker*. As duas funções calculam a matriz K a partir das matrizes A e B e de um vetor P que determina os pólos desejados. A primeira utiliza a Eq. (6.2.19) e a outra utiliza a fórmula de Ackermann (6.2.20). Os pólos ou autovalores desejados foram ajustados de modo a fornecer um tempo de assentamento $t_s = 2\text{seg}$. Para efeito de teste do sistema de controle, colocamos o pêndulo inicialmente em uma posição instável com um ângulo inicial de $\theta_0 = 0,5\text{ rad}$. A força de controle u deve mover o carro para equilibrar o pêndulo na posição vertical superior $\theta = 0$. Em seguida, na Figura 6.3, apresentamos os resultados da simulação do sistema. Podemos observar que o pêndulo é estabilizado na posição vertical superior através da movimentação do carro como esperado.



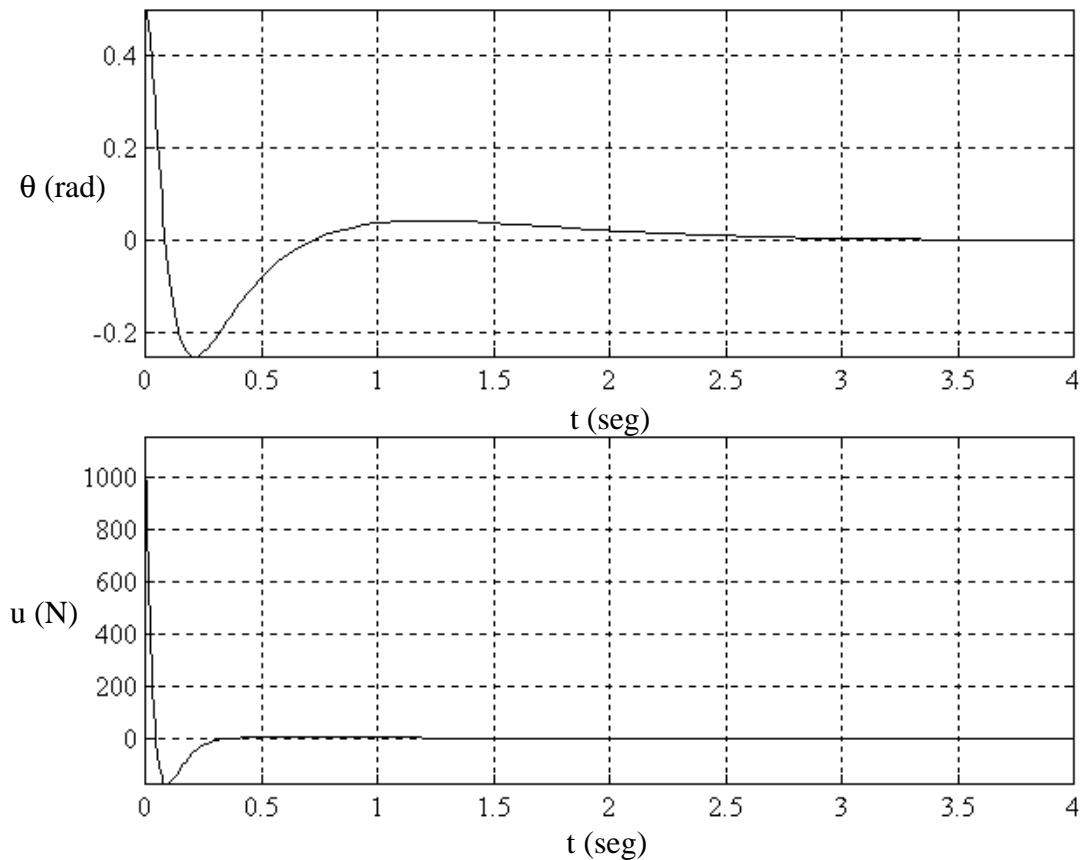


Figura 6.3 - Resultados da simulação do pêndulo invertido com controle proporcional.

3. PROJETO DE OBSERVADORES DE ESTADO

Na seção anterior, o projeto dos controladores foi realizado considerando que todas as variáveis de estado são mensuráveis. No entanto, esta hipótese é pouco realista, já que, na prática, nem todas as variáveis estão disponíveis para realimentação. Portanto, no caso real, é necessário estimar as variáveis não-mensuráveis. O dispositivo que estima estas variáveis é chamado um observador de estado.

O observador de estado é um sistema dinâmico cuja saída se aproxima, à medida que o tempo aumenta, do estado que precisa ser reconstruído. Um observador de estado pode ser de ordem plena ou de ordem mínima. Um observador de ordem plena estima todas as variáveis de estado independente de elas serem ou não diretamente mensuráveis. Porém, nem sempre é necessário se estimar todas as variáveis, mas somente aquelas não diretamente mensuráveis. O observador que estima apenas a quantidade mínima necessária de variáveis de estado é chamado de observador de ordem mínima.

Um observador de estado estima as variáveis de estado baseado nas medidas das variáveis de saída e de controle. Consideremos um sistema descrito pelas equações

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x}\end{aligned}\tag{6.3.1}$$

Vamos admitir que o estado x deve ser aproximado pelo estado \tilde{x} do modelo dinâmico

$$\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + Bu + K_e(y - C\tilde{x}) \quad (6.3.2)$$

que representa o observador de estado. O último termo da equação acima representa um termo de correção que envolve a diferença entre a saída medida y e a saída estimada $C\tilde{x}$.

Subtraindo a primeira das Eqs. (6.3.1) da Eq. (6.3.2), obtemos

$$\dot{x} - \dot{\tilde{x}} = (A - K_e C)(x - \tilde{x}) \quad (6.3.3)$$

onde definimos a diferença entre o estado x e o estado estimado \tilde{x} como o vetor de erro e

$$e = x - \tilde{x} \quad (6.3.4)$$

Desta maneira, a Eq. (6.3.3) se torna

$$\dot{e} = (A - K_e C)e \quad (6.3.5)$$

Esta equação define o comportamento dinâmico do erro do observador, ou da diferença entre o estado e e o estado estimado. Desta equação, podemos observar que o comportamento dinâmico do observador (estável ou instável) é determinado pelos autovalores da matriz $A - K_e C$. Se a matriz $A - K_e C$ for uma matriz estável o vetor de erro convergirá para zero qualquer que seja o erro inicial $e(0)$, ou seja, o estado estimado \tilde{x} convergirá para o estado x em um intervalo de tempo finito.

Da mesma maneira que fizemos, na seção anterior, podemos definir o comportamento dinâmico do erro através do ajuste apropriado da matriz de ganho K_e , por exemplo, podemos ajustar a matriz de ganho K_e de forma que o vetor de erro seja assintoticamente estável e adequadamente rápido.

Para projetar o observador de estado ordem plena, é conveniente transformarmos as equações de estado na forma canônica observável. Para isso, vamos definir uma matriz de transformação Q por

$$Q = (WN^*)^{-1} \quad (6.3.6)$$

onde N é a matriz de observabilidade

$$N = \begin{bmatrix} C^* & | & A^* C^* & | & \dots & | & (A^*)^{n-1} C^* \end{bmatrix} \quad (6.3.7)$$

e W é definida na seção anterior pela Eq. (6.2.7)

$$W = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 & 1 \\ a_{n-2} & a_{n-3} & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.3.8)$$

Vamos definir um novo vetor de estado ε por

$$x = Q\varepsilon \quad (6.3.9)$$

De forma que podemos reescrever as Eqs. (6.3.1)

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon} &= Q^{-1}AQ\varepsilon + Q^{-1}Bu \\ y &= CQ\varepsilon \end{aligned} \quad (6.3.10)$$

onde

$$Q^{-1}AQ = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_{n-1} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_1 \end{bmatrix} \quad (6.3.11)$$

$$Q^{-1}B = \begin{bmatrix} b_n - a_n b_o \\ b_{n-1} - a_{n-1} b_o \\ \vdots \\ b_1 - a_1 b_o \end{bmatrix} \quad (6.3.12)$$

$$CQ = [0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 1] \quad (6.3.13)$$

Reescrevendo a Eq. (6.3.3) obtemos

$$\dot{\varepsilon} - \dot{\tilde{\varepsilon}} = Q^{-1}(A - K_e C)Q(\varepsilon - \tilde{\varepsilon}) \quad (6.3.14)$$

Definindo

$$\eta = \varepsilon - \tilde{\varepsilon} \quad (6.3.15)$$

A Eq. (6.3.14) se torna

$$\dot{\eta} = Q^{-1}(A - K_e C)Q\eta \quad (6.3.16)$$

É requerido que a dinâmica de erro seja assintoticamente estável e que η alcance zero com velocidade adequada, portanto devemos determinar a matriz K_e que faz com que isso aconteça.

Podemos escrever a seguinte relação

$$Q^{-1}K_e = \begin{bmatrix} \delta_n \\ \delta_{n-1} \\ \vdots \\ \delta_1 \end{bmatrix} \quad (6.3.17)$$

Utilizando as relações anteriores podemos escrever a matriz $Q^{-1}(A - K_e C)Q$ como

$$Q^{-1}(A - K_e C)Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_n - \delta_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-1} - \delta_{n-1} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_{n-2} - \delta_{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_1 - \delta_1 \end{bmatrix} \quad (6.3.18)$$

Desta forma, podemos escrever a equação característica da matriz acima

$$s^n + (a_1 + \delta_1)s^{n-1} + \cdots + (a_{n-1} + \delta_{n-1})s + (a_n + \delta_n) = 0 \quad (6.3.19)$$

Supomos que a equação característica desejada para a dinâmica de erro seja

$$(s - \mu_1)(s - \mu_2) \dots (s - \mu_n) = s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1} s + \alpha_n = 0 \quad (6.3.20)$$

Como é desejado que esta equação característica seja igual a equação característica desejada, podemos igualar os coeficientes das potências semelhantes, portanto, obtemos

$$\begin{aligned} a_1 + \delta_1 &= \alpha_1 \\ a_2 + \delta_2 &= \alpha_2 \\ &\vdots \\ a_n + \delta_n &= \alpha_n \end{aligned} \quad (6.3.21)$$

Desta maneira, determinamos os elementos δ_i e, conseqüentemente, através da Eq. (6.3.17), podemos determinar a matriz de ganho K_e

$$K_e = (WN^*)^{-1} \begin{bmatrix} \alpha_n - a_n \\ \alpha_{n-1} - a_{n-1} \\ \vdots \\ \alpha_1 - a_1 \end{bmatrix} \quad (6.3.22)$$

Da mesma maneira que no projeto de controladores, podemos utilizar a fórmula de Ackermann para calcular a matriz de ganho K_e

$$K_e = \phi(A) \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (6.3.23)$$

onde

$$\phi(A) = A^n + \alpha_1 A^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} A + \alpha_n I \quad (6.3.24)$$

3. 1. Exemplo numérico do projeto de observadores de estado

Nesta seção, apresentaremos um exemplo ilustrativo do projeto de observadores de estado.

Consideremos o problema do pêndulo invertido (Figura 6.2) apresentado anteriormente. Em adição a equação do movimento do sistema, vamos escrever a equação da saída y em termos do estado x . De modo, que o sistema é representado por

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned}$$

onde as matrizes A e B foram definidas anteriormente na seção 2.1 e a matriz C é

$$C = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

Na seção 2.1 foi demonstrado que este sistema é controlável. Podemos demonstrar que ele é completamente observável também, já que a matriz de observabilidade N é inversível e possui a seguinte inversa

$$N^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (4M+m)l & 0 \\ 0 & -\frac{(4M+m)^2 l}{3mg} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{(4M+m)^3 l^2}{3mg} \end{bmatrix}$$

O cálculo da matriz de ganho do observador foi realizado no MATLAB. Os pólos do observador foram ajustados multiplicando por 20 os pólos desejados do controle. Para efeito de teste do sistema de controle com observadores de estado, colocamos o pêndulo inicialmente em uma posição instável com um ângulo inicial de $\theta_0 = 0,5$ rad e consideramos

um erro inicial na medição do ângulo de $\theta_0 - \tilde{\theta}_0 = 0,05$ rad . A força de controle u deve mover o carro para equilibrar o pêndulo na posição vertical superior $\theta = 0$. Em seguida, na Figura 6.4, apresentamos os resultados da simulação do sistema.

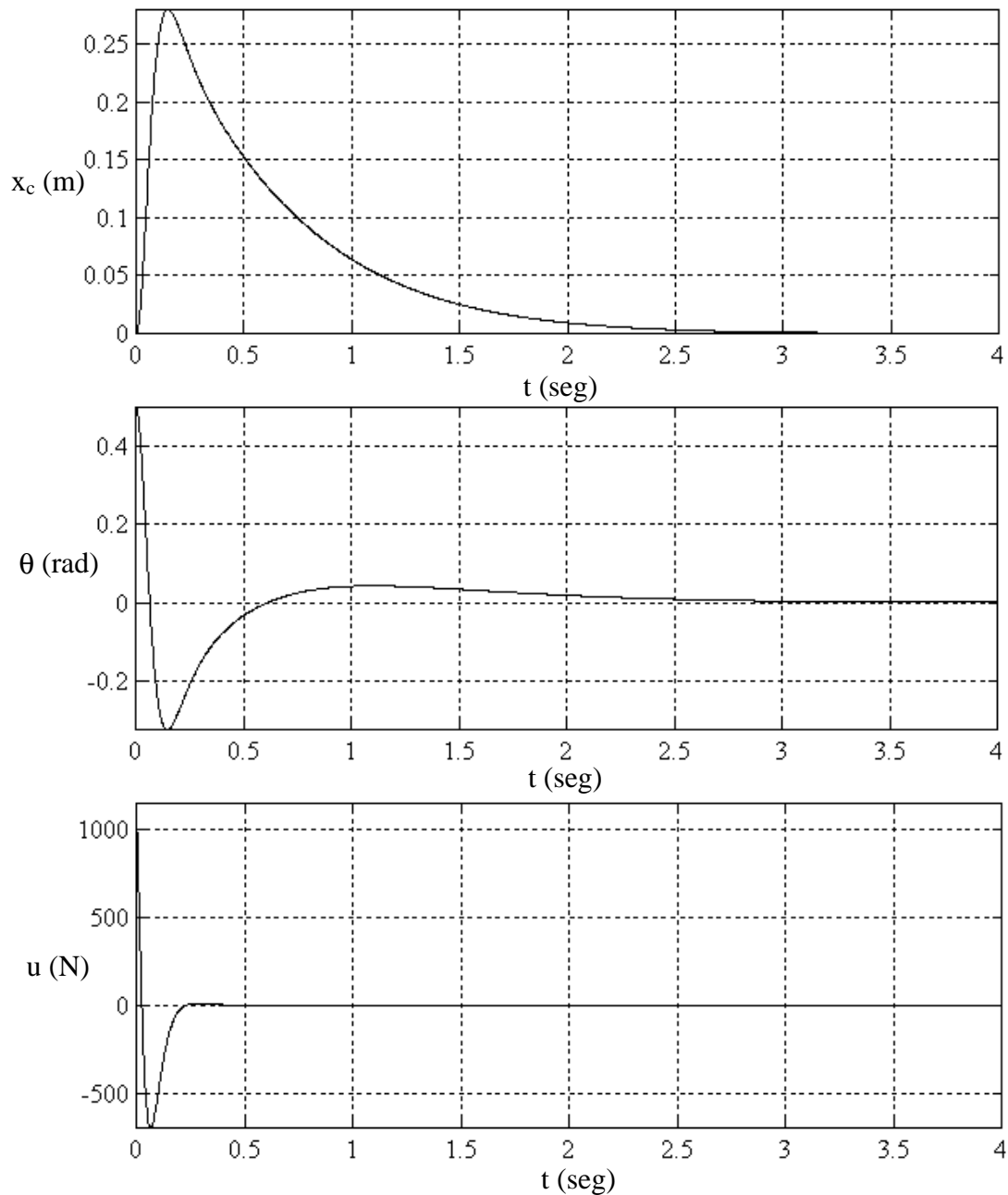


Figura 6.4 - Resultados da simulação do pêndulo invertido com controle proporcional e observador de estado de ordem plena.

4. PROJETO DE CONTROLE ÓTIMO

Nas seções anteriores, foi discutido o projeto de controladores que estabilizam um sistema instável num intervalo de tempo finito através de um controle proporcional ao estado.

De fato, como os pólos de malha fechada podem ser localizados em qualquer lugar do semi-plano esquerdo, a convergência do sistema ao estado desejado pode ser feito tão rápido quanto se queira. Porém, para fazer com que o sistema estabilize rapidamente, são necessários sinais de controle de valor elevado e, na prática, os sinais de controle devem ser limitados. Isto significa que a localização dos pólos é limitada. Este fato, nos leva ao importante problema de otimização, onde se deseja levar em consideração tanto a velocidade de convergência do sistema ao estado desejado quanto os sinais de controle necessários para que isso ocorra.

Para introduzir o problema de otimização, consideremos o sistema descrito pelas equações

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (6.4.1)$$

Deseja-se que este sistema se mova de um estado inicial arbitrário para a origem $x = 0$ o mais rápido possível. Existem diversos critérios para expressar quão rápido um estado inicial é levado a origem, um deles que é o critério da integração quadrática

$$\int_{t_0}^{t_1} x(t)^T Q x(t) dt \quad (6.4.2)$$

onde a matriz Q é uma matriz simétrica positiva definida (ou positiva semidefinida). A quantidade $x^T Q x$ é uma medida de quanto o estado se desvia da origem, a matriz Q determina o peso de cada componente do estado. A integral representa o erro acumulado do estado durante o intervalo de tempo $[t_0, t_1]$.

Se tentarmos encontrar o sinal de controle ótimo minimizando a integral acima, podemos encontrar valores indefinidamente grandes para o sinal de controle. Para evitar este tipo de problema, incluímos no critério um termo relativo ao sinal de controle. De forma que obtemos o seguinte critério

$$\int_{t_0}^{t_1} [x(t)^T Q x(t) + u(t)^T R u(t)] dt \quad (6.4.3)$$

onde a matriz R é uma matriz simétrica positiva definida. A inclusão deste segundo termo no critério reduz a amplitude do sinal de controle e, conseqüentemente, o gasto de energia, já que minimizamos a última integral. A importância relativa dos dois termos é definida pelas matrizes Q e R .

Em alguns casos, é muito importante que o estado final $x(t_1)$ esteja o mais próximo possível da origem, por isso, podemos incluir um terceiro termo referente ao erro final do estado

$$\int_{t_0}^{t_1} [x(t)^T Q x(t) + u(t)^T R u(t)] dt + x(t_1)^T P_1 x(t_1) \quad (6.4.4)$$

onde P_1 é uma matriz simétrica positiva definida (ou positiva semidefinida). Esta expressão é chamada de índice de desempenho.

O problema de otimização envolvido neste caso é a minimização da expressão (6.4.4). Porém, podemos listar outros tipos de problemas que podem ocorrer, tais como:

1. Minimizar o erro acumulado do estado com o sinal de controle acumulado e o erro final do estado restringidos a certos valores máximos;
2. Minimizar o sinal de controle acumulado do estado com o erro acumulado e o erro final do estado restringidos a certos valores máximos;
3. Minimizar o erro final do estado do estado com o sinal de controle acumulado e o erro acumulado restringidos a certos valores máximos.

Estes problemas podem ser escritos através de uma generalização da expressão (6.4.4), escrita da seguinte forma

$$\rho_1 \int_{t_0}^{t_1} x(t)^T Q x(t) dt + \rho_2 \int_{t_0}^{t_1} u(t)^T R u(t) dt + \rho_3 x(t_1)^T P_1 x(t_1) \quad (6.4.5)$$

onde ρ_1 , ρ_2 , ρ_3 são constantes arbitrariamente escolhidas de acordo com o problema em estudo. Por exemplo, se o erro final do estado não for importante e é desejado minimizar o erro do estado acumulado com o sinal de controle acumulado restrito a um certo valor máximo. Como o erro final do estado não é importante, podemos fazer com que $\rho_3 = 0$ e como estamos minimizando o erro do estado acumulado, podemos fazer $\rho_1 = 1$. Neste caso, devemos considerar a minimização da quantidade

$$\int_{t_0}^{t_1} [x(t)^T Q x(t) + \rho_2 u(t)^T R u(t)] dt \quad (6.4.6)$$

onde a constante ρ_2 faz o papel de um multiplicador de Lagrange. Para determinar o valor ideal de ρ_2 , resolvemos o problema para diferentes valores de ρ_2 . A medida que diminuimos ρ_2 , o erro do estado acumulado diminui, porém o sinal de controle acumulado aumenta. Desta maneira, podemos escolher um valor de ρ_2 que fornece um valor suficientemente pequeno de erro do estado acumulado sem provocar valores muito grandes para o sinal de controle.

Consideremos o sistema descrito pela Eq. (6.4.1) sendo controlado através de um controle proporcional ao estado, da forma $u = -Kx$.

Desta forma, a equação do sistema se torna

$$\dot{x} = (A - BK)x \quad (6.4.7)$$

Para o desenvolvimento do projeto de controle ótimo que segue, vamos supor que a matriz $A - BK$ é uma matriz estável.

Vamos considerar no índice de desempenho somente o erro do estado acumulado e o sinal de controle acumulado, fazendo $\rho_3 = 0$ e $\rho_1 = \rho_2 = 1$. Desta maneira, o índice de desempenho pode ser escrito como

$$J = \int_{t_0}^{t_1} [x(t)^T Q x(t) + u(t)^T R u(t)] dt \quad (6.4.8)$$

Substituindo a lei de controle na expressão acima, obtemos

$$\begin{aligned} J &= \int_{t_0}^{t_1} [x(t)^T Q x(t) + x(t)^T K^T R K x(t)] dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} x(t)^T (Q + K^T R K) x(t) dt \end{aligned} \quad (6.4.9)$$

Vamos supor, agora, que

$$x(t)^T (Q + K^T R K) x(t) = -\frac{d}{dt} [x(t)^T P x(t)] \quad (6.4.10)$$

Desenvolvendo a derivada temporal do segundo termo, obtemos

$$\begin{aligned} x(t)^T (Q + K^T R K) x(t) &= -\dot{x}(t)^T P x(t) - x(t)^T P \dot{x}(t) \\ &= -x(t)^T [(A - BK)^T P + P(A - BK)] x(t) \end{aligned} \quad (6.4.11)$$

Como a equação acima deve ser válida para quaisquer valores de $x(t)$, podemos escrever a seguinte relação

$$(A - BK)^T P + P(A - BK) = -(Q + K^T R K) \quad (6.4.12)$$

Pelo segundo método de Liapunov, se $A - BK$ é uma matriz estável, existe uma matriz positiva definida P que satisfaz a Eq. (6.4.9). Então, substituindo a Eq. (6.4.10) na Eq. (6.4.9) e notando $x(t_1)$ é muito pequeno se o sistema é estável, obtemos

$$J = x^T(t_0)Px(t_0) \quad (6.4.13)$$

Para obter a solução do problema de controle ótimo, procedemos definindo a matriz não-singular T tal que

$$R = T^T T \quad (6.4.14)$$

já que a matriz R é uma matriz simétrica positiva definida. Desta maneira, podemos escrever a Eq. (6.4.12) da seguinte forma

$$(A^T - K^T B^T)P + P(A - BK) + Q + K^T T^T T K = 0 \quad (6.4.15)$$

que pode ser reescrita como

$$A^T P + PA + [TK - (T^T)^{-1} B^T P]^T [TK - (T^T)^{-1} B^T P] - PBR^{-1} B^T P + Q = 0 \quad (6.4.16)$$

A minimização de J com a relação a K é equivalente a minimização de

$$x^T [TK - (T^T)^{-1} B^T P]^T [TK - (T^T)^{-1} B^T P] x \quad (6.4.17)$$

com relação a K . Como esta expressão é não-negativa, ocorre quando ela é nula, ou

$$TK = (T^T)^{-1} B^T P \quad (6.4.18)$$

De onde podemos calcular a matriz de ganho K

$$K = T^{-1} (T^T)^{-1} B^T P = R^{-1} B^T P \quad (6.4.19)$$

Portanto, a lei de controle ótimo para este problema de controle com o índice de desempenho desejado é dada por

$$u(t) = -Kx(t) = -R^{-1}B^T Px(t) \quad (6.4.20)$$

A matriz P deve satisfazer a seguinte equação

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0 \quad (6.4.21)$$

obtida substituindo a Eq. (6.4.19) na Eq. (6.4.15) . Esta equação é denominada equação de Riccati de matriz reduzida.

Desta forma, para resolver o problema de controle ótimo, devemos primeiramente resolver a equação de Riccati (6.4.21) e, em seguida, substituir a matriz P encontrada, na Eq. (6.4.19) para obter a matriz de ganho ótima. O toolbox de controle do MATLAB possui diversas funções para cálculo de matrizes de ganho de realimentação (LQR, LQR2, LQRD e LQRY) e de observadores (LQE, LQE2, LQED e LQEW).

Implementação Computacional

1. INTRODUÇÃO

O objetivo principal deste trabalho foi realizar a modelagem, o controle e a simulação de sistemas de multicorpos utilizando o programa MATLAB. Neste capítulo, apresentaremos a metodologia utilizada e as dificuldades encontradas na implementação computacional da modelagem, controle e simulação no ambiente do MATLAB, através de alguns exemplos.

2. CONTROLE DO PÊNDULO INVERTIDO FLEXÍVEL

Nesta seção, apresentaremos a metodologia utilizada para implementar o controle e a simulação do pêndulo invertido flexível. O sistema do pêndulo invertido flexível, mostrado na Figura 7.1, consiste de um pêndulo B pinado, no ponto O, ao centro de massa do carro A que pode se mover na direção x de um plano horizontal C. O pêndulo B pode se deformar no plano xy e será modelado como sendo uma viga de seção retangular uniforme de base b e altura h. O pêndulo possui massa m_2 , comprimento l, módulo de elasticidade E e momento de inércia da seção transversal I. O carro A possui massa m_1 . O movimento do pêndulo B pode ser representado pela superposição de uma rotação rígida de ângulo $\phi(t)$ em torno de O e de uma deformação pura $w(t,s)$ em relação à configuração indeformada. Onde s é a distância de um ponto da viga ao ponto O quando a viga está indeformada.

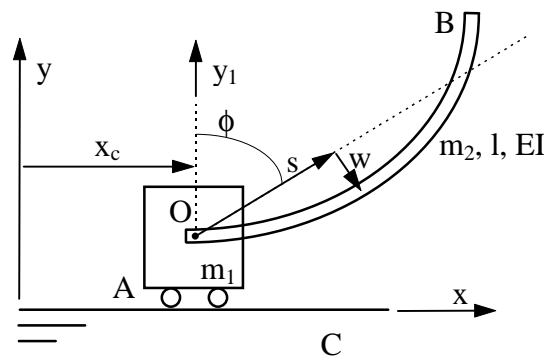


Figura 7.1 - Pêndulo invertido flexível.

Para derivar as equações do movimento, utilizaremos as equações de Lagrange.

Considerando que a altura h da seção transversal é muito pequena, podemos considerar apenas a deformação da sua linha neutra, portanto a posição de um ponto da viga pode ser escrito da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} x_b \\ y_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_c + s \cdot \sin \phi + w \cdot \cos \phi \\ s \cdot \cos \phi - w \cdot \sin \phi \end{bmatrix}$$

A velocidade de um ponto da viga pode ser obtida derivando a equação acima

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_b \\ \dot{y}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}_c + (s\dot{\phi} + \dot{w}) \cdot \cos \phi - w\dot{\phi} \cdot \sin \phi \\ (s\dot{\phi} + \dot{w}) \cdot \sin \phi - w\dot{\phi} \cdot \cos \phi \end{bmatrix}$$

Se utilizarmos o método de modos supostos, apresentado no capítulo 4, para discretizar a deformação da viga w , podemos escrever a sua deformação como uma combinação linear dos primeiros modos naturais de vibração

$$w(s,t) = \sum_{j=1}^m \phi_j(s) \alpha_j(t)$$

Desta forma, podemos ver que as coordenadas generalizadas são a posição do centro de massa do carro x_c , o ângulo ϕ e os coeficientes dos modos naturais de vibração α_j .

A energia cinética do sistema pode ser representada por duas parcelas, energias cinéticas do carro e da viga. A energia cinética do carro é, simplesmente, a energia de translação do centro de massa. Na energia cinética da viga, não foi considerada a influência da inércia rotacional das seções transversais, admitindo que qualquer seção transversal permanece plana e perpendicular a linha neutra. Considerando a hipótese de pequenas deformações para a viga, podemos considerar que $dm \cong \frac{m_2}{l} ds$. De maneira que, podemos escrever a expressão da energia cinética total da seguinte forma:

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_c^2 + \frac{1}{2} \frac{m_2}{l} \int_0^l (\dot{x}_b^2 + \dot{y}_b^2) ds$$

A energia potencial do sistema pode também ser representada por duas parcelas. Como a variação da energia potencial do carro é zero, fixamos uma referência de energia potencial gravitacional na posição $y = 0$. A energia potencial da viga é a soma da energia potencial gravitacional e a energia de deformação devido à flexão. Foi desprezada a contribuição da deformação de cisalhamento, hipótese que é satisfatória para vigas esbeltas.

$$V = \int_0^l \frac{mg}{l} (s \cdot \cos \phi - w \cdot \sin \phi) ds + \int_0^l EI \cdot w''^2 ds$$

A manipulação simbólica para produzir as equações do movimento, utilizando as equações de Lagrange, foi realizada através de um algoritmo desenvolvido com auxílio do toolbox de manipulação simbólica do MATLAB. Em seguida, apresentamos a subrotina realizada no MATLAB para a derivação das equações de Lagrange.

[Subrotina de Derivação das Equações de Lagrange]

```
clear
global H Q

%Energia Cinética
n=4;
T1='1/2*m1*x5^2';
T2aux='x5^2+s^2*x6^2+2*s*x6*x5*cos(x2)';
T2=symmul('1/2*m2/l',int(T2aux,'s',0,'l'));
T3=0;
for j=3:n,
    w=['x' num2str(j) *(a' num2str(j-2) *(1/2*exp(b' num2str(j-2) '*s/l)-1/2/exp(b' num2str(j-2) '*s/l))+sin(b'
num2str(j-2) '*s/l))'];
    wp=['x' num2str(j+n) *(a' num2str(j-2) *(1/2*exp(b' num2str(j-2) '*s/l)-1/2/exp(b' num2str(j-2)
'*s/l))+sin(b' num2str(j-2) '*s/l))'];
    T31aux=symmul('2*(s*x6+x5*cos(x2))',wp);
    T31=int(T31aux,'s',0,'l');
    T32aux=sympow(wp,2);
    T32=int(T32aux,'s',0,'l');
    T33aux='-2*x1*x6*sin(x2)';
    T33=symmul(T33aux,int(w,'s',0,'l'));
    T3=symop(T3,'+',1/2*m2*l,'*',symop(T31,'+',T32,'+',T33));
end
T=symop(T1,'+',T2,'+',T3);
T=simplify(T);
clear T1 T2 T2aux T3 T31 T31aux T32 T32aux T33 T33aux

%Energia Potencial
V1=0;
for j=3:n,
    w=['x' num2str(j) *(a' num2str(j-2) *(1/2*exp(b' num2str(j-2) '*s/l)-1/2/exp(b' num2str(j-2) '*s/l))+sin(b'
num2str(j-2) '*s/l))'];
    V11aux=sympow(diff(w,'s',2),2);
    V11=symmul('EI',int(V11aux,'s',0,'l'));
    V12aux='-m2*g/l*sin(x2)';
    V12=symmul(V12aux,int(w,'s',0,'l'));
```

```

V1=symadd(V1,symadd(V11,V12));
end
V2='1/2*m2*g*l*cos(x2)';
V=symadd(V1,V2);
V=simplify(V);
clear V1 V2 V11 V11aux V12 V12aux

%Lagrangeano
L=symsub(T,V);
clear T V
%
%-----  $H.\dot{q} = Q$  -----
H=[];
Q=[];
for k=1:n,
    xk=['x',num2str(k)];
    xkn=['x',num2str(k+n)];
    dLdxp=diff(L,xkn);
    for i=1:n*2,
        xi=['x',num2str(i)];
        H=[H,' ',diff(dLdxp,xi)];
    end
    Q=[Q,' ',diff(L,xk)];
end
H=['I',H,'J'];
Q=['I',Q,'J'];
clear L dLdxp i j k n w wp xi xk xkn
[Fim da subrotina]

```

As equações encontradas nesta subrotina são não-lineares do tipo $H(q)\dot{q} = W(q)$, onde $q^T = [x_c \ \phi \ \alpha_1 \ \alpha_2 \ \dot{x}_c \ \dot{\phi} \ \dot{\alpha}_1 \ \dot{\alpha}_2]$, pois foram considerados na modelagem da deformação do pêndulo os dois primeiros modos de vibração. Estas equações foram utilizadas como entrada para uma segunda subrotina que executa a linearização em torno da posição instável superior ($x_c = \phi = \alpha_j = 0$), calcula a matriz de ganho de realimentação e, se desejado, a matriz de ganho do observador e, por fim, realiza a simulação do sistema controlado. Em seguida, apresentamos a segunda subrotina.

[Equação s/ observador]

```

function xp=contr_1(t,x)
% Equacao p/ controle proporcional (A,B,K devem ser calculados anteriormente)
global A B K

```

```

xp=(A-B*K)*x;

```

[Equação c/ observador]

```

function xp=contr_2(t,x)
% Equacao p/ controle proporcional c/ observador de estado (A,B,C,K,Ke devem ser calculados anteriormente)
global A B C K Ke

```

```

xp=[ A-B*K      B*K;
     zeros(size(A)) A-Ke*C]*x;

```

[Subrotina para linearização, controle e simulação das equações do movimento]

```
global E EI m1 m2 l mu H Q xo n A B C K Ke
n=4;
l=4.17e-13;
E=200e9;
EI=E*I;
l=0.5;m1=2;m2=0.1;
xo=[0;0;0;0;0;0;0;0];
p=20;
% Linearização
[A,B,C,D]=linmod('eqpend');
C=[1 0 0 0 0 0 0 0];

% Cálculo das matrizes de ganho (de realimentação K e do observador Ke)
L=poly(A);
Ac=[-2-0.5i -2+0.5i -p*ones(1,2*n-2)];
Ace=Ac^47;
Lc=poly(Ac);
Lce=poly(Ace);
Mi=[B A*B A^2*B A^3*B A^4*B A^5*B A^6*B A^7*B]; %Matriz de controlabilidade
N=[C' A'*C' A'^2*C' A'^3*C' A'^4*C' A'^5*C' A'^6*C' A'^7*C']; %Matriz de observabilidade
W=[L(8) L(7) L(6) L(5) L(4) L(3) L(2) 1;
    L(7) L(6) L(5) L(4) L(3) L(2) 1 0;
    L(6) L(5) L(4) L(3) L(2) 1 0 0;
    L(5) L(4) L(3) L(2) 1 0 0 0;
    L(4) L(3) L(2) 1 0 0 0 0;
    L(3) L(2) 1 0 0 0 0 0;
    L(2) 1 0 0 0 0 0 0 0;
    1 0 0 0 0 0 0 0];
T=Mi*W;
Qi=inv(W*N');
disp('GANHO REQUERIDO:')
K=[Lc(9)-L(9) Lc(8)-L(8) Lc(7)-L(7) Lc(6)-L(6) Lc(5)-L(5) Lc(4)-L(4) Lc(3)-L(3) Lc(2)-L(2)]*inv(T)
Ke=Qi*[Lce(9)-L(9) Lce(8)-L(8) Lce(7)-L(7) Lce(6)-L(6) Lce(5)-L(5) Lce(4)-L(4) Lce(3)-L(3) Lce(2)-L(2)]'

% Simulação das equações
to=0;
tf=4;
xoo=[0;0.5;0;0;0;0;0;0; 0;0.05;0;0;0;0;0];
[t,x]=ode45('contr_1',[to tf],xoo(1:8)); %Equação s/ observador
[t1,x1]=ode45('contr_2',[to tf],xoo); %Equação c/ observador
[Fim da subrotina]
```

Para a simulação, vamos considerar os mesmos valores numéricos dos parâmetros considerados no caso rígido, apresentado no capítulo anterior. Sejam a massa do carro $m_1=2\text{kg}$, a massa do pêndulo $m_2=0,1\text{kg}$ e o comprimento do pêndulo $l=0,5\text{m}$. Para efeito de teste do sistema de controle, colocamos o pêndulo inicialmente em uma posição instável com um ângulo $\phi_0=0,5\text{rad}$. Apresentamos, na Figura 7.2, os resultados da simulação do problema do pêndulo invertido flexível com realimentação de todo o estado, i.e., sem a inclusão de observadores.

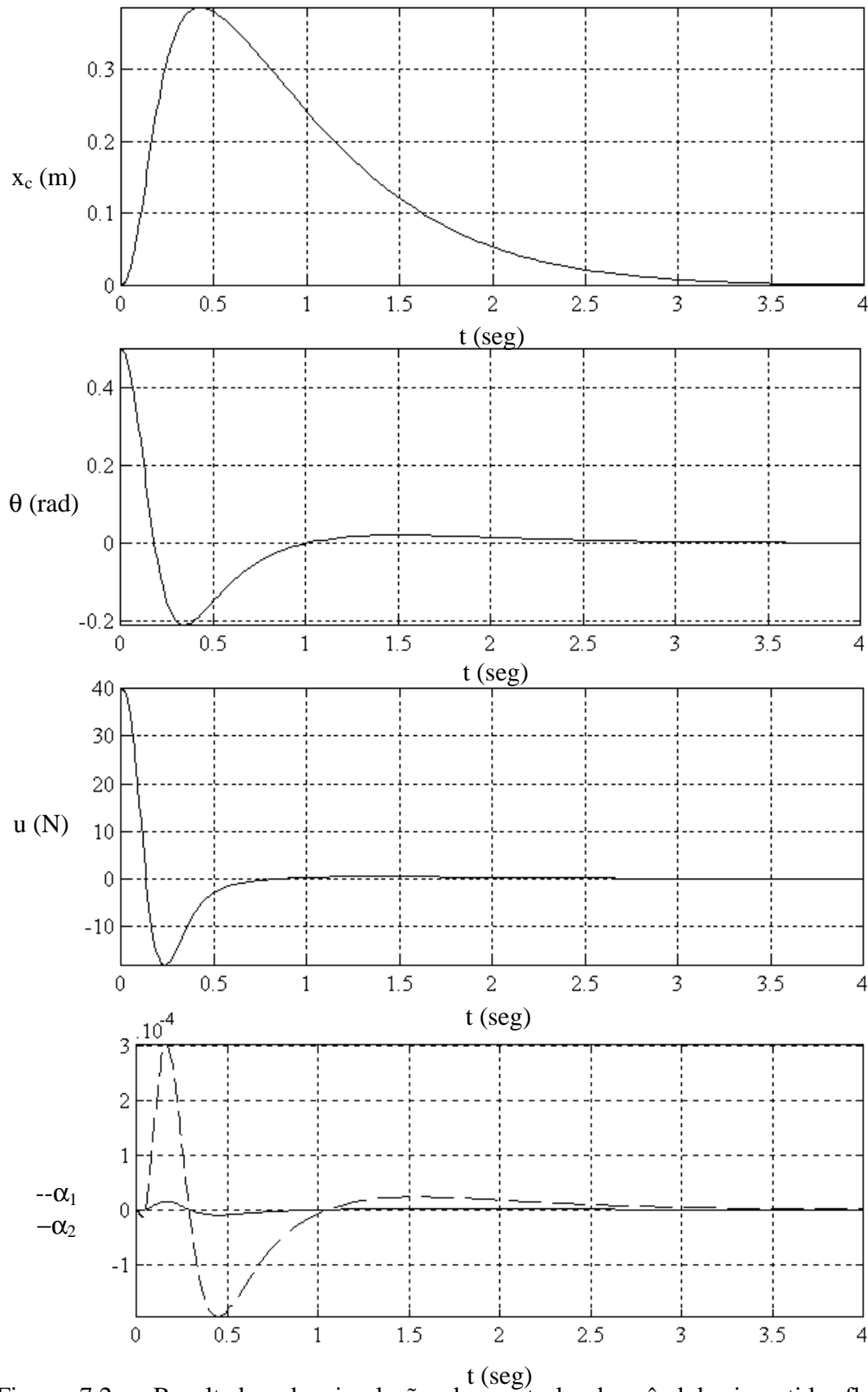
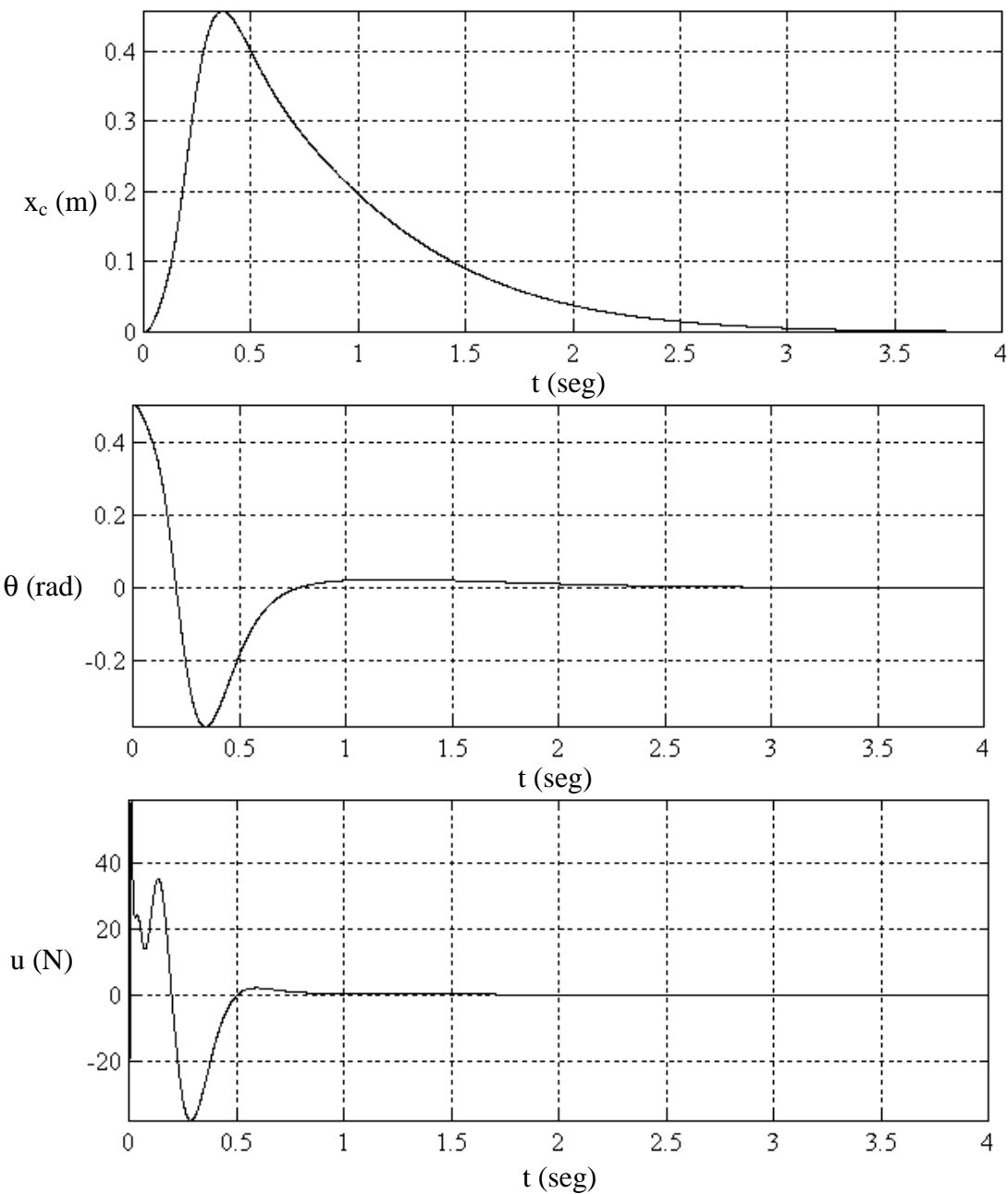


Figura 7.2 - Resultados da simulação do controle do pêndulo invertido flexível sem observador

Podemos notar que α_1 é muito maior que α_2 . Este fato significa que, como esperado, o primeiro modo tem menor energia de deformação e, portanto, é mais fácil o pêndulo deformar no primeiro modo.

É importante ressaltar que esta metodologia de projeto de controle é ineficiente quando a rigidez EI aumenta muito. Isto pode ser explicado pelo fato de que, quando a rigidez é muito alta, a deformação da viga passa a ser muito pequena e o ganho de realimentação para esta variável passa a ser muito grande. Por isso a matriz M passa a ser mal-condicionada e, conseqüentemente, a sua inversão se torna imprecisa. O mal-condicionamento pode ser notado pelos elementos do vetor K que variam da ordem de 10^{-4} , para x_c , a 10^6 , para α_2 .



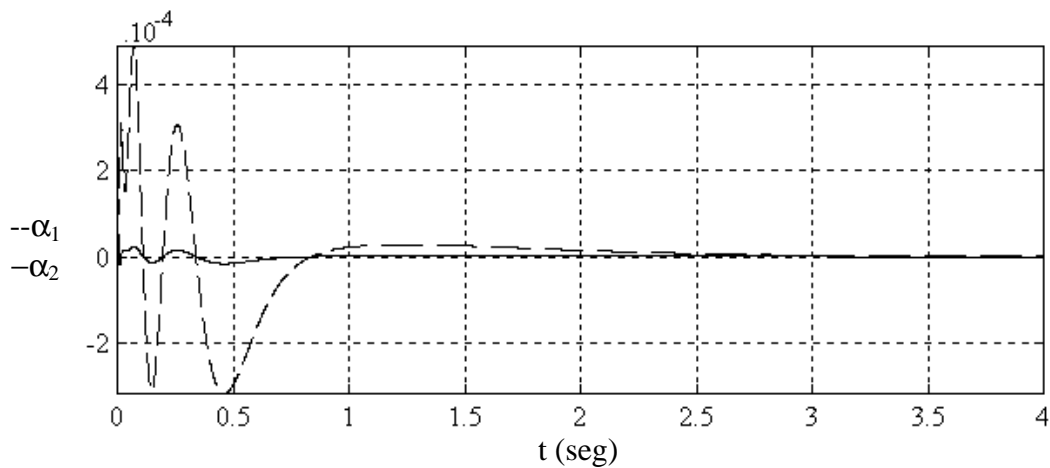


Figura 7.3 - Resultados da simulação do controle do pêndulo invertido flexível com observador de ordem plena.

Agora, consideremos a inclusão de um observador de estado de ordem plena. Vamos considerar os mesmos parâmetros da simulação anterior, sendo que, neste caso, é considerado que o observador possui um erro inicial do ângulo ϕ de $\phi_0 - \tilde{\phi}_0 = 0,05\text{rad}$. Os resultados da simulação são mostrados na Figura 7.3.

Podemos observar que o deslocamento do carro, o ângulo ϕ , a deformação da viga e o sinal de controle aumentaram devido a inclusão de um erro de observação. Isto acontece porque o observador demora um tempo para estimar o estado e a partir daí o controle passa a estabilizar o sistema.

3. SIMULAÇÃO DE UM MANIPULADOR ROBÓTICO FLEXÍVEL

Nesta seção, apresentaremos a modelagem e simulação de um manipulador robótico flexível. O sistema a ser analisado, representado na Figura 7.4, consiste de um manipulador robótico composto por dois braços. O braço A é um tubo rígido que pode girar de um ângulo θ em torno de O na direção z. O braço B é um cilindro flexível que desliza sem atrito dentro do braço A. A parte, de comprimento $l_B - r$, do braço B que desliza dentro do braço A é considerada rígida e a outra, de comprimento r , é flexível e pode ser modelada a cada instante de tempo como uma viga engastada.

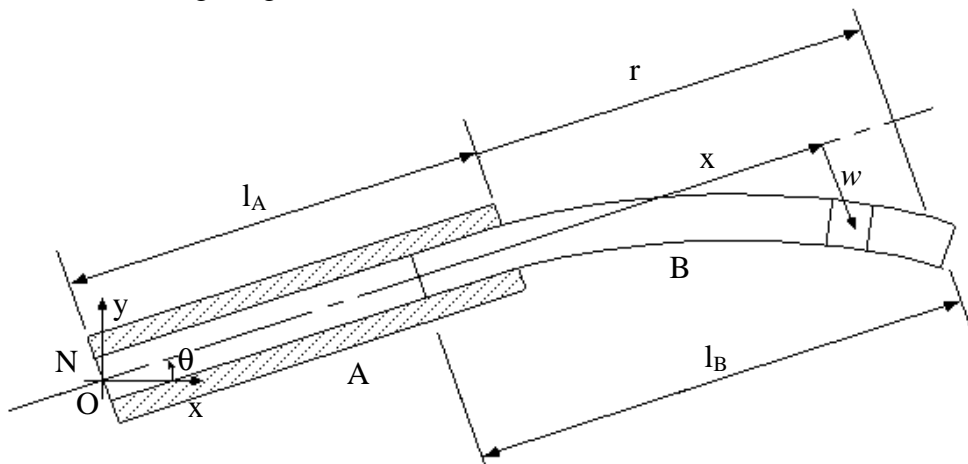


Figura 7.4 - Manipulador robótico com braço flexível de comprimento variável.

Consideramos que o diâmetro do cilindro flexível é pequeno de modo que o efeito da inércia de rotação da seção transversal é desprezível. Portanto, representamos o movimento da viga pelo movimento da sua linha neutra.

O braço A é caracterizado por um comprimento l_A , uma massa m_A e um momento de inércia I_A . O braço B é caracterizado por um comprimento indeformado l_B , uma massa m_B uniformemente distribuída pelo seu comprimento, um momento de inércia da seção transversal I e um módulo de elasticidade E .

Para formular as equações do movimento utilizaremos as equações de Lagrange.

Para utilizar as equações de Lagrange, devemos calcular as energias cinética e potencial dos corpos. Vamos considerar, primeiramente, o braço A. A sua energia cinética pode ser escrita como

$$T_A = \frac{1}{2} I_A \dot{\theta}^2$$

e a energia potencial gravitacional

$$V_A = \frac{1}{2} m_A g l_A \sin \theta$$

Agora vamos considerar o braço B. Primeiramente, devemos escrever a posição de um ponto P do corpo. A posição de P em N pode ser caracterizada pelas suas duas componentes x_c e y_c

$$\begin{cases} x_c = (l_A - l_B + r + x) \cos \theta \\ y_c = (l_A - l_B + r + x) \sin \theta \end{cases}, \text{ if } 0 \leq x < (l_B - r)$$

$$\begin{cases} x_c = (l_A - l_B + r + x) \cos \theta + w \sin \theta \\ y_c = (l_A - l_B + r + x) \sin \theta - w \cos \theta \end{cases}, \text{ if } (l_B - r) \leq x \leq l_B$$

Portanto, a energia cinética do braço B é

$$T_B = \frac{1}{2} \int (\dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2) dm$$

onde $dm = \frac{m_B}{l_B} dx$, e portanto

$$T_B = \frac{m_B}{2l_B} \int_0^{l_B} (\dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2) dx$$

Podemos, agora, escrever a energia potencial que é composta em uma parte gravitacional e outra de deformação

$$V_B = \frac{m_B g}{l_B} \int_0^{l_B} y_c dx + EI \int_{l_B-r}^{l_B} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 dx$$

já que apenas a parte do braço B que está livre contém energia de deformação.

A deformação w da viga será modelada utilizando o método de modos supostos

$$w(t, x) = \sum_{j=1}^v \Phi_j(x) \alpha_j(t)$$

As equações de Lagrange deste problema podem ser escritas como

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_A}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial T_B}{\partial \dot{q}_i} \right) - \left(\frac{\partial T_A}{\partial q_i} + \frac{\partial T_B}{\partial q_i} - \frac{\partial V_A}{\partial q_i} - \frac{\partial V_B}{\partial q_i} \right) = Q_i$$

O resultado de qualquer operação efetuada pelo toolbox de cálculo simbólico que foi utilizado neste trabalho é expresso em uma cadeia de caracteres. Por este motivo, qualquer cálculo simbólico é limitado pela capacidade de apresentação do resultado, i.e., pelo tamanho máximo de uma cadeia de caracteres na configuração do MATLAB utilizada. Porém, como as expressões de energia cinética e potencial do corpo B são muito complexas, devido ao fato de o comprimento do braço ser variável, este limite foi alcançado, inclusive, para o caso mais simples considerando apenas um modo de vibração. Esta dificuldade foi parcialmente ultrapassada desenvolvendo os termos relacionados ao corpo B

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_B}{\partial \dot{q}_i} &= \frac{m_B}{l_B} \int_0^{l_B} (\dot{x}_c \frac{\partial \dot{x}_c}{\partial \dot{q}_i} + \dot{y}_c \frac{\partial \dot{y}_c}{\partial \dot{q}_i}) dx \\ \frac{\partial T_B}{\partial q_i} &= \frac{m_B}{l_B} \int_0^{l_B} (\dot{x}_c \frac{\partial \dot{x}_c}{\partial q_i} + \dot{y}_c \frac{\partial \dot{y}_c}{\partial q_i}) dx \end{aligned}$$

$$\frac{\partial V_B}{\partial q_i} = \frac{m_B g}{l_B} \int_0^{l_B} \frac{\partial y_c}{\partial q_i} dx + EI \int_{l_B-r}^{l_B} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) dx$$

De modo que, apenas as seguintes derivadas simbólicas devem ser realizadas pelo MATLAB

$$\frac{\partial \dot{x}_c}{\partial \dot{q}_i}, \frac{\partial \dot{y}_c}{\partial \dot{q}_i}, \frac{\partial \dot{x}_c}{\partial q_i}, \frac{\partial \dot{y}_c}{\partial q_i}, \frac{\partial y_c}{\partial q_i}, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)$$

Este procedimento reduz consideravelmente a complexidade das expressões que devem ser manipuladas pelo MATLAB. Além disso, no estágio final, quando se deve recompor os termos para obter a forma final equação do movimento, vários termos já foram simplificados anteriormente. Na verdade, o conhecimento prévio dos termos que se cancelam durante a derivação das equações é bastante útil na implementação do cálculo simbólico. Infelizmente,

para um sistema dinâmico genérico, esta informação não é conhecida.

Para demonstrar a dificuldade encontrada para otimizar a derivação das equações do movimento utilizando manipulação simbólica, apresentamos agora a duas versões da subrotina desenvolvida para o problema em questão. A primeira subrotina desenvolvida é baseada naquela desenvolvida para a derivação das equações do movimento do pêndulo invertido, onde toda a derivação parte diretamente do lagrangeano. A segunda é baseada no desenvolvimento dos termos relativos ao corpo B, como apresentado anteriormente.

[Subrotina 1 para derivação das equações do movimento]

```
clear
global Hx Qx
n=3;

% Modos de vibração
f='sin(d*(x-lb+r))-(exp(d*(x-lb+r))-exp(-d*(x-lb+r)))/2+da*(cos(d*(x-lb+r))-(exp(d*(x-lb+r))+exp(-d*(x-lb+r)))/2)';
w=f*x3';
w=subs(w,f,'f');
xc='(la-lb+x2+x)*cos(x1)+w*sin(x1)';
yc='(la-lb+x2+x)*sin(x1)-w*cos(x1)';
xc=subs(xc,w,'w');
yc=subs(yc,w,'w');

disp('-- ENERGIA CINETICA --')
% -- A --
Ta='1/2*la*x1p^2';
% B - Parte rígida
xcr=subs(xc,0,'x3');
ycr=subs(yc,0,'x3');
Tbr1=int(symop(dt(xcr,n),'^',2),'x',0,'lb-x2');
Tbr2=int(symop(dt(ycr,n),'^',2),'x',0,'lb-x2');
Tbr=simple(symop('1/2*mb/lb','*',symop(Tbr1,'+',Tbr2)));
% B - Parte flexível
Tbf1=int(symop(dt(xc,n),'^',2),'x','lb-x2','lb');
Tbf2=int(symop(dt(yc,n),'^',2),'x','lb-x2','lb');
Tbf=simple(symop('1/2*mb/lb','*',symop(Tbf1,'+',Tbf2)));
% -- B --
Tb=simple(symop(Tbr,'+',Tbf));
% -- A+B --
T=simple(symop(Ta,'+',Tb)); %-----!!

disp('-- ENERGIA POTENCIAL --')
% -- A --
Va='1/2*ma*g*la*sin(x1)';
% B - Parte rígida
Vbr=simple(symop('mb*g/lb','*',int(ycr,'x',0,'lb-x2')));
% B - Parte flexível
Vbf1=simple(symop('mb*g/lb','*',int(yc,'x','lb-x2','lb')));
Vbf2=simple(symop('E*I','*',int(simple(symop(diff(diff(w,'x'),'x'),'^',2)),'x','lb-x2','lb')));
Vbf=symop(Vbf1,'+',Vbf2);
% -- B --
Vb=simple(symop(Vbr,'+',Vbf));
% -- A+B --
V=simple(symop(Va,'+',Vb)); %-----!!

disp('-- LAGRANGEANO --');
```

```

L=simple(symop(T,'-',V));

disp('-- EQUACAO DO MOVIMENTO --');
Eq=sym(zeros(1,n));
for k=1:n,
    xk=['x' num2str(k)];
    xkp=['x' num2str(k) 'p'];
    dLdxp=diff(L,xkp);
    dLdxdpdt=dt(dLdxp,n);
    dLdx=diff(L,xk);
    Eq=sym(Eq,1,k,simple(symop(dLdxdpdt,'-',dLdx)));
end
Fk=sym('Ma, Fb, 0');
Eq=symop(Eq,'-',Fk);
disp(' ');
disp('-- H.q = W --');
H=sym(zeros(n,2*n));
Q=sym(zeros(n,2*n));
qp=sym(zeros(2*n,1));
for k=1:n,
    xkpp=['x' num2str(k) 'pp'];
    for j=1:n,
        dxpp=diff(sym(Eq,1,j),xkpp);
        H=sym(H,j,k+n,dxpp);
    end
    qp=sym(qp,k+n,1,xkpp);
end
Eqnew=simplify(symop(Eq,'-',transpose(symop(H,'*',qp))));
for k=1:n,
    xkp=['x' num2str(k) 'p'];
    Eqaux=subs(Eqnew,0,xkp);
    Hxp=symop(Eqnew,'-',Eqaux);
    for j=1:n,
        H=sym(H,j,k,symop(sym(Hxp,1,j),'',xkp));
    end
    qp=sym(qp,k,1,xkp);
    Eqnew=Eqaux;
end
H=simplify(H);
Eqnew=simplify(symop(Eq,'-',transpose(symop(H,'*',qp))));
Q=transpose(Eqnew);

disp('-- FORMATACAO --');
Hx=H;
Qx=Q;
for i=1:n,
    Hx=subs(Hx,['x(' num2str(i) ')'],['x' num2str(i)]);
    Hx=subs(Hx,['x(' num2str(i+n) ')'],['x' num2str(i) 'p']);
    Qx=subs(Qx,['x(' num2str(i) ')'],['x' num2str(i)]);
end
[Fim da subrotina 1]

```

Esta subrotina fornece duas matrizes H e Q tal que a equação do movimento pode ser escrita da seguinte forma

$$H(t, q, \dot{q})\dot{x} = Q(t, q)$$

onde x é o vetor de estado $x = [q_1 \quad q_2 \quad \cdots \quad q_n \quad \dot{q}_1 \quad \dot{q}_2 \quad \cdots \quad \dot{q}_n]^T$.

A principal evolução desta subrotina com relação àquela desenvolvida para a derivação das equações do pêndulo invertido é que seu resultado pode ser utilizado diretamente pela função, apresentada abaixo, que determina a equação do movimento para simulação numérica. Isto foi conseguido com o desenvolvimento de uma subrotina eficiente que calcula a matriz numérica correspondente a uma dada matriz simbólica. Neste procedimento, a cada passo de integração a subrotina calcula as matrizes H e Q . Esta evolução permitiu o desenvolvimento de uma subrotina geral de simulação.

[Equação do movimento]

```
function xp=apcom(t,x)
global Hx Qx
global la lb ma mb g E I Ma Fb x
n=3;
Hn=[eye(n) zeros(n);
    num(Hx)];
Qn=[x(n+1:2*n)';
    num(Qx)];
xp=inv(Hn)*Qn;
```

Agora, apresentaremos a segunda subrotina desenvolvida baseada no desenvolvimento dos termos das equações de Lagrange, como apresentado anteriormente. Pode-se notar que ele deixa de ser geral pelo fato de ter sido otimizada para este problema específico, com o objetivo de ultrapassar a dificuldade de manipular equações complexas. Esta foi a subrotina utilizada para obter as equações do movimento que serão simuladas. Porém, seu resultado, como no caso da subrotina anterior, são duas matrizes H e Q que podem ser utilizadas diretamente na função que determina as equações do movimento, apresentada acima.

[Subrotina 2 para derivação das equações do movimento]

```
clear
global Hx Qx
disp('-----');
disp('-- INICIALIZACAO --');
n=3;
% Modos de vibração
f='sin(d*x)-(exp(d*x2)-exp(-d*x))/2+(cos(d*x2)+(exp(d*x2)+exp(-d*x2))/2)/(sin(d*x2)-(exp(d*x2)-exp(-d*x2))/2)*(cos(d*x)-(exp(d*x)+exp(-d*x))/2)';
w='f*x3';
w=subs(w,f,'f');
xc='(la+x2-lb+x)*cos(x1)+w*sin(x1)';
yc='(la+x2-lb+x)*sin(x1)-w*cos(x1)';
xc=subs(xc,w,'w');
yc=subs(yc,w,'w');
xcp=dt(xc,n);
xcp1=symop(xcp,'-',subs(xcp,0,'x1p'));
xcp2=symop(xcp,'-',subs(xcp,0,'x2p'));
xcp3=symop(xcp,'-',subs(xcp,0,'x3p'));
ycp=dt(yc,n);
ycp1=symop(ycp,'-',subs(ycp,0,'x1p'));
ycp2=symop(ycp,'-',subs(ycp,0,'x2p'));
ycp3=symop(ycp,'-',subs(ycp,0,'x3p'));
xcr=subs(xc,0,'x3');
```

```

ycr=subs(yc,0,'x3');
xcrp=dt(xcr,n);
ycrp=dt(ycr,n);
Dw2Dx2=diff(diff(w,'x'),'x');

Ta='1/2*la*x1p^2';
Va='1/2*ma*g*la*sin(x1)';
La=simple(symop(Ta,'-',Va));
disp('-----');
disp('-- EQUACAO DO MOVIMENTO --');
Eq=sym(zeros(n,1));
for k=1:n,
    xk=['x' num2str(k)];
    xkp=['x' num2str(k) 'p'];
    disp([' -- DLDxpDt -- x' num2str(k)]);
    DLaDxp=diff(La,xkp); %xkp
    DxcpDxp=diff(xcp,xkp);
    DycpDxp=diff(ycp,xkp);
    DxcrpDxp=diff(xcrp,xkp);
    DycrpDxp=diff(ycrp,xkp);
    intauxr=symop(xcrp,'*',DxcrpDxp,'+',ycrp,'*',DycrpDxp);
    intauxfx1=symop(xcp1,'*',DxcpDxp);
    intauxfx2=symop(xcp2,'*',DxcpDxp);
    intauxfx3=symop(xcp3,'*',DxcpDxp);
    intauxfy1=symop(ycp1,'*',DycpDxp);
    intauxfy2=symop(ycp2,'*',DycpDxp);
    intauxfy3=symop(ycp3,'*',DycpDxp);
    clear DxcpDxp DycpDxp DxcrpDxp DycrpDxp
    disp(' -- INT --');
    DLbDxp1=simple(int(intauxr,'x',0,'lb-x2'));
    DLbDxp2=simple(int(intauxfx1,'x','lb-x2','lb'));
    DLbDxp3=simple(int(intauxfx2,'x','lb-x2','lb'));
    DLbDxp4=simple(int(intauxfx3,'x','lb-x2','lb'));
    DLbDxp5=simple(int(intauxfy1,'x','lb-x2','lb'));
    DLbDxp6=simple(int(intauxfy2,'x','lb-x2','lb'));
    DLbDxp7=simple(int(intauxfy3,'x','lb-x2','lb'));

    DLaDxpDt=simple(dt(DLaDxp,n));
    DLbDxpDt1=simple(dt(DLbDxp1,n));
    DLbDxpDt2=simple(dt(DLbDxp2,n));
    DLbDxpDt3=simple(dt(DLbDxp3,n));
    DLbDxpDt4=simple(dt(DLbDxp4,n));
    DLbDxpDt5=simple(dt(DLbDxp5,n));
    DLbDxpDt6=simple(dt(DLbDxp6,n));
    DLbDxpDt7=simple(dt(DLbDxp7,n));
    DLbDxpDt=symop('mb/lb','*',symop(DLbDxpDt1,'+',DLbDxpDt2,'+',DLbDxpDt3,'+',DLbDxpDt4,'+',
    DLbDxpDt5,'+',DLbDxpDt6,'+',DLbDxpDt7));
    clear DLaDxp DLbDxp1 DLbDxp2 DLbDxp3 DLbDxp4 DLbDxp5 DLbDxp6 DLbDxp7
    clear intauxr intauxfx1 intauxfx2 intauxfx3 intauxfy1 intauxfy2 intauxfy3

    DLDxpDt=simple(symop(DLaDxpDt,'+',DLbDxpDt));

    disp(' -- DLDx --');
    DLaDx=diff(La,xk); % xk
    DxcpDx=diff(xcp,xk);
    DycpDx=diff(ycp,xk);
    DxcrpDx=diff(xcrp,xk);
    DycrpDx=diff(ycrp,xk);

```

```

DycDx=diff(yc,xk);
DycrDx=diff(ycr,xk);
Dw2Dx2Dx=diff(Dw2Dx2,xk);
intauxf1=simple(symop(Dw2Dx2,'*',Dw2Dx2Dx));
intauxr2=simple(DycrDx);
intauxf2=simple(DycDx);
intauxr3=simple(symop(xcrp,'*',DxcrpDx,'+',ycrp,'*',DycrpDx));
intauxf31=simple(symop(xcp1,'*',DxcpDx));
intauxf32=simple(symop(xcp2,'*',DxcpDx));
intauxf33=simple(symop(xcp3,'*',DxcpDx));
intauxf41=simple(symop(ycp1,'*',DycpDx));
intauxf42=simple(symop(ycp2,'*',DycpDx));
intauxf43=simple(symop(ycp3,'*',DycpDx));
disp(' -- INT --');
DLbDx=symop('^-2*E*I','*',simple(int(intauxf1,'x','lb-x2','lb')));
DLbDx=symop(DLbDx,'+', '-mb*g/lb','*',simple(int(intauxf2,'x','lb-x2','lb')));
DLbDx=symop(DLbDx,'+', 'mb/lb','*',simple(int(intauxf31,'x','lb-x2','lb')));
DLbDx=symop(DLbDx,'+', 'mb/lb','*',simple(int(intauxf32,'x','lb-x2','lb')));
DLbDx=symop(DLbDx,'+', 'mb/lb','*',simple(int(intauxf33,'x','lb-x2','lb')));
DLbDx=symop(DLbDx,'+', 'mb/lb','*',simple(int(intauxf41,'x','lb-x2','lb')));
DLbDx=symop(DLbDx,'+', 'mb/lb','*',simple(int(intauxf42,'x','lb-x2','lb')));
DLbDx=symop(DLbDx,'+', 'mb/lb','*',simple(int(intauxf43,'x','lb-x2','lb')));
DLbDx=symop(DLbDx,'+', '-mb*g/lb','*',simple(int(intauxr2,'x',0,'lb-x2')));
DLbDx=symop(DLbDx,'+', 'mb/lb','*',simple(int(intauxr3,'x',0,'lb-x2')));

DLdDx=simple(symop(DLaDx,'+',DLbDx));
Eq=sym(Eq,k,1,simple(symop(DLDxpDt,'-',DLdDx)));
end
disp('-----');
disp(' . ');
disp('-- H.q = W --');
H=sym(zeros(n,2*n));
Q=sym(zeros(n,1));
qp=sym(zeros(2*n,1));
disp(' -- xpp --');
Eqnew=Eq;
for k=1:n,
    xkpp=['x' num2str(k) 'pp'];
    for j=1:n,
        dxpp=diff(sym(Eq,j,1),xkpp);
        H=sym(H,j,k+n,dxpp);
    end
    Eqnew=subs(Eqnew,0,xkpp);
end
disp(' -- xp --');
for k=1:n,
    xkp=['x' num2str(k) 'p'];
    Eqaux=subs(Eqnew,0,xkp);
    Eqnew=collect(Eqnew,xkp);
    Hxp=simplify(symop(Eqnew,'-',Eqaux,'-',sym('0;0;0')));
    for j=1:n,
        H=sym(H,j,k,symop(sym(Hxp,j,1), '/', xkp));
    end
    Eqnew=Eqaux;
end
H=simple(H);
Fk=sym('Ma; Fb; 0');
Q=simple(symop(Fk,'-',Eqnew));

```

save apcom H Q

clear

[Fim da subrotina 2]

Para ilustrar a complexidade das equações do movimento deste problema, apresentamos, a seguir as matrizes $H_{3 \times 6}$ e $Q_{3 \times 1}$ obtidas

[$H_{3 \times 6}$]

$H_{11} =$

$$\frac{1}{20160}mb*(206*x3p*d^8*x2^9*x3-11088*x2p*d^4*x2^4*x3^2-7392*x3p*d^4*x2^5*x3+72576*x3p*x3^2+40320*x2p*la*lb*d^2*x2^2+40320*x2p*x2^3*lb*d^2+721*x2p*d^8*x2^8*x3^2-36288*x2p*x3^2-20160*lb^2*x2p*d^2*x2^2)/lb/d^2/x2^2$$

$H_{12} =$

$$\frac{1}{48}mb*(24*x2^2*d^4*x3*x2p*la+18*x2^3*d^4*x3*x2p+24*x3p+13*x3p*d^4*x2^4+16*x3p*x2^3*d^4*la)/lb/d$$

$H_{13} =$

0

$H_{14} =$

$$la+mb*la^2+mb*x2^2+1/3*mb*lb^2+103/20160*mb/lb*d^6*x2^7*x3^2-mb*lb*x2-11/60*mb/lb*d^2*x2^3*x3^2+9/5*mb/lb/d^2/x2*x3^2+2*mb*la*x2-mb*lb*la$$

$H_{15} =$

$$5/4*mb/lb/d*x3+1/6*mb/lb*d^3*x2^3*x3*la+3/32*mb/lb*d^3*x2^4*x3$$

$H_{16} =$

$$17/480*mb/lb*x2^5*d^3-3/4*mb/lb*x2/d+1/24*mb/lb*x2^4*d^3*la-mb/lb/d*la$$

$H_{21} =$

$$-1/5760*mb*(5760*x1p*la*lb*d^2*x2^2-5184*x1p*x3^2-2880*x1p*lb^2*d^2*x2^2+103*x1p*x2^8*d^8*x3^2-1584*x1p*x2^4*d^4*x3^2+5760*x1p*x2^3*lb*d^2-11520*x3p*d^2*x2^2+480*x3p*d^5*x2^6)/lb/d^2/x2^2$$

$H_{22} =$

$$\frac{1}{960}mb*x3*(192*x3*x2p*d^4*x2^4+155*x3*x2p*x2^8*d^8-1728*x3*x2p+768*x3p*x2^5*d^4+124*x3p*x2^9*d^8+2304*x3p*x2)/lb/x2^4/d^2$$

$H_{23} =$

0

$H_{24} =$

$$5/4*mb/lb/d*x3+1/6*mb/lb*d^3*x2^3*x3*la+3/32*mb/lb*d^3*x2^4*x3$$

$H_{25} =$

$$mb+6/5*mb/lb/d^2/x2^3*x3^2+31/480*mb/lb*d^6*x2^5*x3^2+2/5*mb/lb*d^2*x2*x3^2$$

$H_{26} =$

$$103/5760*mb/lb*d^6*x2^6*x3-9/10*mb/lb/d^2/x2^2*x3-11/40*mb/lb*d^2*x2^2*x3$$

$H_{31} =$

$$-1/20160*mb/x2*(36288*x3*x1p-3696*x3*x1p*d^4*x2^4+103*x3*x1p*x2^8*d^8+40320*x2*d*x2p-1680*x2^5*d^5*x2p)/d^2/lb$$

$H_{32} =$

$$\frac{1}{2880}mb/x2^3*(123*x3*x2p*x2^8*d^8-2736*x3*x2p*d^4*x2^4+1728*x3*x2p-5184*x3p*x2-1584*x3p*x2^5*d^4+103*x3p*x2^9*d^8)/d^2/lb$$

$H_{33} =$

0

$H_{34} =$

$$\frac{1}{40320}(1680*mb*x2^9*d^5*la-40320*mb*x2^5*la*d+1428*mb*x2^10*d^5-30240*mb*x2^6*d)/d^2/x2^5/lb$$

$H_{35} =$

$$\frac{1}{40320}*(-36288*mb*x2^3*x3-11088*mb*x2^7*d^4*x3+721*mb*x2^11*d^8*x3)/d^2/x2^5/lb$$

$H_{36} =$

$$1/40320*(206*mb*x2^{12}*d^8+72576*mb*x2^4-7392*mb*x2^8*d^4)/d^2/x2^5/lb$$

[Q_{3x1}]

Q1 =

$$Ma-1/2*ma*g*la*cos(x1)+1/2*mb*g*lb*cos(x1)+1/24*mb*g/lb*d^3*x3*sin(x1)*x2^4-mb*g*cos(x1)*x2-mb*g*cos(x1)*la-mb*g/lb/d*x3*sin(x1)$$

Q2 =

$$Fb-mb*g*sin(x1)+216*E*I*x3^2/x2^6/d^2-21/8*E*I*x3^2*x2^2*d^6-6*E*I*x3^2/x2^2*d^2-1/6*mb*g/lb*x3*cos(x1)*d^3*x2^3$$

Q3 =

$$-72/d^2/x2^5*E*I*x3-43/24*d^6*x2^3*E*I*x3+18*d^2/x2*E*I*x3+1/d/lb*mb*g*cos(x1)-1/24*d^3*x2^4/lb*mb*g*cos(x1)$$

Para simular este sistema, consideremos os seguintes parâmetros: $m_A=2\text{kg}$, $l_A=4\text{m}$, $I_A=10,67\text{kg.m}^2$, $m_B=1\text{kg}$, $l_B=3\text{m}$, $I=5\times 10^9\text{m}^4$ e $E=200\times 10^9\text{N/m}^2$. Para a modelagem da deformação do braço B foi utilizado o método de modos supostos considerando o primeiro modo de vibração de uma viga engastada de comprimento $r(t)$.

Considerando o manipulador em repouso, aplicamos um momento M_1 para manter o manipulador na posição horizontal, i.e., $\theta = 0$. Então, aplicamos outro momento M_2 periódico com uma frequência $\omega = 10\text{ rad/s}$. O momento resultante pode ser escrito como $M_A = M_1 + M_2$

$$M_A = g \cos \theta \left[m_B \left(l_A + r - \frac{l_B}{2} \right) + m_A \frac{l_A}{2} \right] + \sin(10t)$$

Além do momento aplicado, o braço B possui uma velocidade radial inicial de \dot{r}_0 . As condições iniciais do problema são

$$\begin{cases} \theta_0 = 0 & \dot{\theta}_0 = 0 \\ r_0 = 1.5 & \dot{r}_0 = 1 \\ w_0 = 0 & \dot{w}_0 = 0 \end{cases}$$

Os resultados da simulação são mostrados na Figura 7.5, sendo que as linhas contínuas e tracejadas representam o movimento do manipulador rígido e flexível, respectivamente.

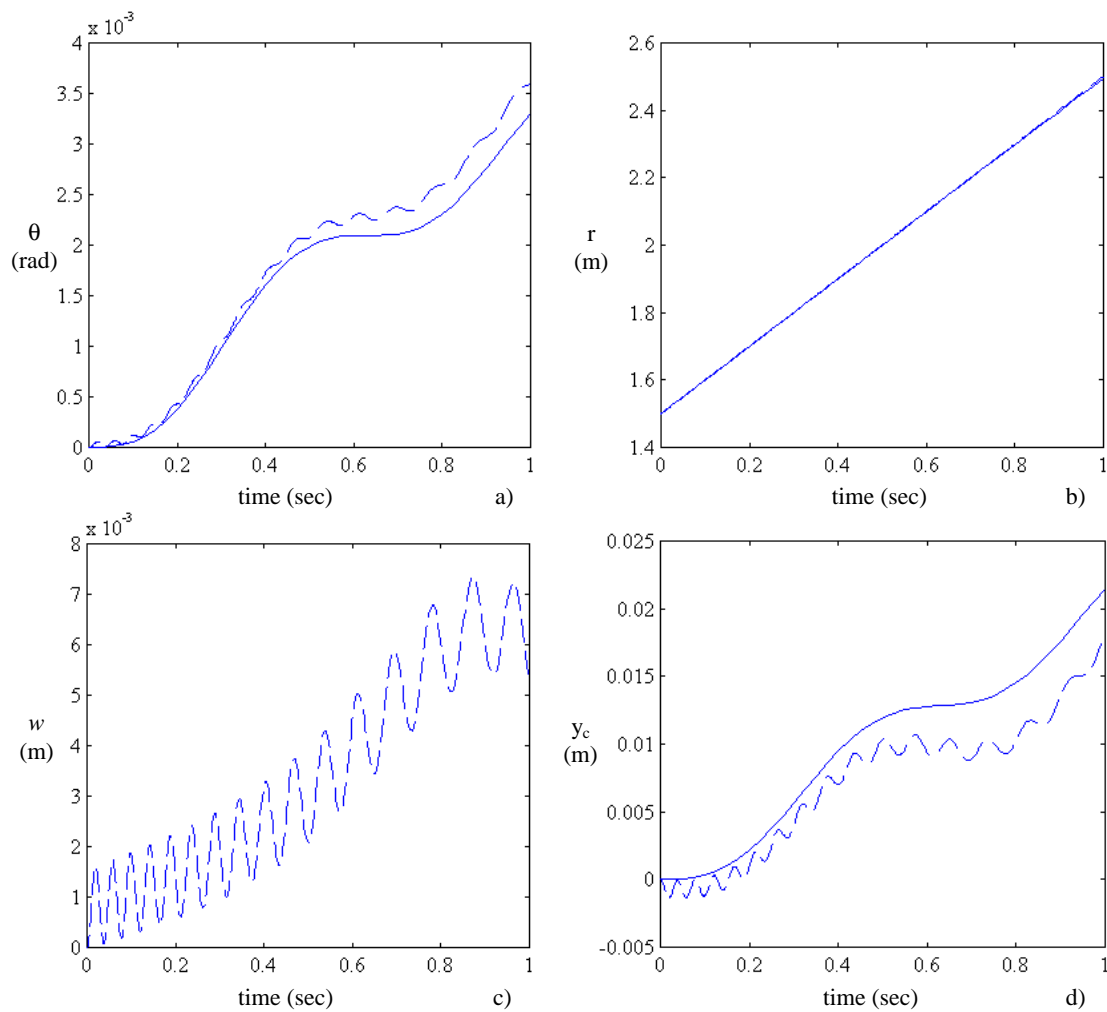


Figura 7.5 - Resultados da simulação do manipulador robótico (linha contínua -- braço B rígido; linha tracejada -- braço B flexível); a) Ângulo entre o braço A e a horizontal; b) Deslocamento longitudinal da configuração indeformada do braço B; c) Deslocamento transversal da extremidade livre do braço B em relação a configuração indeformada; d) Posição vertical da extremidade livre do braço B com respeito ao referencial N.

Conclusões

Neste trabalho, foram apresentados os conceitos básicos da Dinâmica de Sistemas de Multicorpos. Foi desenvolvida uma metodologia de análise de sistemas de multicorpos utilizando o ambiente MATLAB, com o objetivo de automatizar todas as etapas de modelagem, controle e simulação. Os principais tópicos deste trabalho foram:

- Parametrização de rotações finitas;
- Caracterização da flexibilidade dos corpos deformáveis;
- Derivação das equações do movimento;
- Controle linear de sistemas de multicorpos no espaço de estados;
- Algoritmos de integração numérica das equações do movimento;
- Implementação computacional utilizando o ambiente MATLAB.

A parametrização de rotações finitas foi apresentada, enfatizando a análise da existência de singularidades nos sistemas de parametrização. Os seguintes sistemas de parametrização foram apresentados:

1. Ângulos de Euler;
2. Ângulos de Bryant;
3. Parâmetros de Euler;
4. Parâmetros de Rodrigues;
5. Vetor Rotação;
6. Vetor Rotação Conforme (VRC) e
7. Quaternios.

O vetor rotação demonstrou ser opção mais adequada para a parametrização de rotações finitas no estudo de sistemas de multicorpos. Dentre suas vantagens, podemos citar:

- a) Não apresenta singularidade;
- b) Representa rotações finitas com um número mínimo de parâmetros, i.e., dá origem a equações diferenciais ordinárias e não a equações algébrico-diferenciais;
- c) Apresenta caracterização geométrica simples e

- d) As equações do movimento escritas em termos do vetor rotação apresentam boas propriedades de convergência na integração.

Para a caracterização da flexibilidade dos corpos deformáveis, foram apresentados dois métodos: o método de Rayleigh-Ritz e o método de modos supostos. Estes métodos permitiram a análise de sistema de multicorpos com partes flexíveis, aproximando a deformação destes corpos por uma combinação linear de seus primeiros modos de vibração.

As equações do movimento foram derivadas utilizando as equações de Lagrange e as equações de Maggi-Kane. As equações de Maggi-Kane demonstraram ser a melhor opção para a derivação das equações movimento de sistemas de multicorpos, dentre suas vantagens, podemos citar:

- a) Permite a escolha de velocidades generalizadas não necessariamente iguais às derivadas das coordenadas generalizadas;
- b) Possibilita a escolha entre calcular as forças de reação que não produzem trabalho ou eliminá-las na formulação, tanto para sistemas holônomos quanto para sistemas não-holônomos;
- c) Permite a linearização das equações do movimento durante a formulação;
- d) Em geral, dá origem a equações do movimento mais simples que as equações de Lagrange;

O controle linear no espaço de estados foi apresentado. Dois métodos de projeto de controladores foram apresentados: projeto de controladores via imposição de pólos e projeto de Controle Ótimo. Foi realizada uma análise da inclusão de observadores de estado, motivada pela dificuldade e, algumas vezes, impossibilidade de se medir os coeficientes dos modos supostos, quando alguns corpos são deformáveis.

Foram apresentados alguns algoritmos de integração baseados no MATLAB. Nas simulações realizadas, neste trabalho, foram utilizados os algoritmos do MATLAB OdeSuite e do SIMULINK. Uma ênfase foi dada ao problema da influência da singularidade das parametrizações na integração das equações do movimento.

Uma implementação computacional das etapas de modelagem, controle e simulação de sistemas de multicorpos, utilizando o MATLAB, foi realizada. O toolbox de manipulação simbólica do MATLAB (Symbolic Math Toolbox) foi utilizado para a derivação das equações do movimento, utilizando as formulações de Lagrange e de Maggi-Kane. Dentre as principais dificuldades encontradas, podemos citar:

- Desenvolvimento de um algoritmo geral utilizando as equações de Maggi-Kane;
- Derivação das equações de movimento de sistemas com um número grande de graus de liberdade e
- Integração das etapas de modelagem, controle e simulação.

O desenvolvimento de um algoritmo geral para a derivação das equações do movimento utilizando a formulação de Maggi-Kane é mais complexo que utilizando a formulação de Lagrange. Isto porque, nas equações de Lagrange o único dado de entrada é o lagrangeano e todo o cálculo é escalar. Já nas equações de Maggi-Kane existe a possibilidade de escolha das velocidades generalizadas e da base em que os cálculos vão ser efetuados para cada corpo. Estas características da formulação de Maggi-Kane tornam o desenvolvimento de um

algoritmo geral mais difícil. Porém, para sistemas com um número grande de graus de liberdade, este procedimento torna-se mais prático que aquele utilizando equações de Lagrange, pois escrever o lagrangeano para sistemas com número muito grande de graus de liberdade pode ser inviável.

A complexidade dos sistemas de multicorpos analisados neste trabalho foi limitada por uma característica do toolbox de manipulação simbólica do MATLAB. Qualquer cálculo simbólico realizado por este toolbox tem seu resultado representado por uma cadeia de caracteres no MATLAB, porém o comprimento máximo de uma cadeia de caracteres no MATLAB é de 10000 caracteres. Este fato limita a complexidade e/ou tamanho do cálculo a ser realizado. A metodologia utilizada para ultrapassar esta dificuldade foi dividir as expressões grandes em expressões menores, efetuar os cálculos com as expressões menores, simplificá-las e, por fim, adicioná-las. Este procedimento só é satisfatório quando os resultados dos cálculos com as expressões menores são simplificados. Porém, este procedimento aumenta em muito o custo de desenvolvimento do algoritmo.

Sugestões para pesquisas futuras

Neste trabalho, a análise se restringiu a sistemas de multicorpos cujas equações do movimento são equações diferenciais ordinárias. Porém, eliminando esta restrição algumas metodologias podem ser desenvolvidas, dentre elas:

- Utilização dos parâmetros de Euler para a parametrização de rotações;
- Superparametrização do sistemas de multicorpos;
- Cálculo automatizado de forças de reação que não produzem trabalho e
- Implementação de algoritmos de integração de equações algébrico-diferenciais no MATLAB.

Utilizando superparametrização, o desenvolvimento de um algoritmo geral torna-se mais simples. Além disso, as equações do movimento tendem a ser mais simples, aumentando o tamanho máximo do problema que pode ser tratado utilizando a versão atual do toolbox de cálculo simbólico do MATLAB.

Referências Bibliográficas

- **Amirouche, F.M.L.** [1992] *Computational Methods in Multibody Dynamics*, Prentice-Hall, Inc., New Jersey.
- **Andrzejewski, T.; Bock, H.G.; Eich, E. e von Schwerin, R.** [1993] Recent Advances in the Numerical Integration of Multibody Systems, *Advanced Multibody Systems Dynamics - Simulation and Software Tools* (W. Schiehlen, ed.), p.127-151, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, NL.
- **Andrzejewski, T.; Bock, H.G.; Eich, E. e von Schwerin, R.** [1995] Exploiting Sparsity in the Integration of Multibody Systems in Descriptor Form, *comunicação privada*, IWR University of Heidelberg, Heidelberg, Germany.
- **Angeles, J.** [1988] *Rational Kinematics*, Springer-Verlag, Berlin.
- **Argyris, J.H.** [1982] An excursion into large rotations, *Comp. Meth. in Appl. Mech. and Eng.*, vol.32, p.85-155.
- **Arnold, V.** [1976] *Les Méthodes Mathématiques de la Mécanique Classique*, Mir, Moscou.
- **Banach, S.** [1951] *Mechanics*, Monografia Matematyczne, Warszawa-Wroclaw.
- **Barrientos, G. e Sampaio, R.** [1995a] Análise de Choque y Flexibilidad en Sistemas de Multicuerpos, *Anais do International Meeting on Computational Mechanics and CAD/CAM*, novembro, Concépcion, Chile, p.111-118.
- **Barrientos, G. e Sampaio, R.** [1995b] Dinâmica de um Sistema de Multicuerpos con Choques: Influência de La Flexibilidad, *Anais do COBEM-CIDIM/95 - XIII Congresso Brasileiro e II Congresso Ibero Americano de Engenharia Mecânica*, dezembro, Belo Horizonte/MG, publicação em CD.
- **Barrientos, G. e Sampaio, R.** [1995c] Dinâmica de um Sistema de Multicuerpos: Influência de La Flexibilidad, *Anais do XVI CILAMCE/95 - Congresso Ibero Latino Americano sobre Métodos Computacionais para Engenharia*, Curitiba/PR, vol.2, p.1129-1138.
- **Bayo, E., Garcia de Jalon, J. e Serna, M.A.** [1988] A Modified Lagrangian Formulation for the Dynamic Analysis of Constrained Mechanical Systems, *Comp. Meth. Appl. Mech. and Eng.*, vol.71, p.183-195.

- **Book, W.J., Maizza-Neto, O. e Whitney, D.E.** [1975] Feedback Control of Two Beam, Two Joint Systems with Distributed Flexibility, *J. Dyn. Sys. Meas. Control*, december, p.424-431.
- **Bottema, O. e Roth, B.** [1979] *Theoretical Kinematics*, North-Holland Publishing Co., Amsterdam.
- **Brenan, K.E.; Campbell, S.L. e Petzold, L.R.** [1989] *Numerical Solution of Initial-Value Problems in Differential-Algebraic Equations*, North-Holland, U.S.A.
- **Campbell, S.L. e Meyer Jr., C.D.** [1979] *Generalized Inverses of Linear Transformations*, Pitman, London.
- **Cardona, A.** [1989] *An Integrated Approach to Mechanism Analysis*, Tese de D.Sc., Université de Liège.
- **Cardona, A. e Géradin, M.** [1989] Time Integration of the Equations of Motion in Mechanism Analysis, *Computers & Structures*, vol.33, no.3, p.801-820.
- **Clough, R.W. e Penzien, J.** [1975] *Dynamics of Structures*, McGraw-Hill, New York.
- **Damilano, J.G.** [1994] Finite Element Method and Time Integration Techniques for Nonlinear Elastic Constrained Multibody Systems, *Anais do CILAMCE/94*, p.1261-1270.
- **Dimaggio, S.J. and Bieniek, M.P.** [1995] Nonlinear Dynamics of Flexible Structures: A Finite Element Approach, *Int. J. Solids Structures*, vol. 32, no. 8/9, p.1179-1193.
- **Fertis, D.G.** [1973] *Dynamics and Vibration of Structures*, John Wiley & Sons, U.S.A.
- **Gear, C.W.** [1971] *Numerical Initial Value Problems in Ordinary Differential Equations*, Automatic Computation, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- **Gear, C.W. e Petzold, L.R.** [1984] ODE Methods for the Solution of Differential/Algebraic Systems, *SIAM J. Numer. Anal.*, vol.21, no.4, p.717-728.
- **Géradin, M.** [1994] Energy Conserving Time Integration for Multibody Dynamics - Application to Top Motion, *Mecanica Computacional*, vol.14, p.573-586.
- **Géradin, M. e Rixen, D.** [1995] Parametrization of finite rotations in computational dynamics: a review, *Revue Européenne des Éléments Finis*, vol.4, n° 5-6, p.497-553.
- **Goldstein, H.** [1980] *Classical Mechanics*, Addison-Wesley, Reading, MA.
- **Greenwood, D.T.** [1965] *Principles of Dynamics*, Prentice-Hall, New Jersey.
- **Hemani, H. e Weimer, F.C.** [1981] Modeling of Nonholonomic Dynamic Systems with Applications, *J. Appl. Mech.*, vol.48, p.177-182.
- **Hughes, T.J.R.** [1976] Stability, Convergence and Growth and Decay of Energy of the Average Acceleration Method in Nonlinear Structural Dynamics, *Computers & Structures*, vol.6, p.313-324.
- **Hurty, W.C. e Rubinstein, M.F.** [1964] *Dynamics of Structures*, Prentice-Hall, Inc., New Jersey.
- **Ider, S.K. and Amirouche, F.M.L.** [1989] Nonlinear Modeling of Flexible Multibody Systems Dynamics Subjected to Variable Constraints, *J. Appl. Mech.*, vol. 56, p.444-450.
- **Kamman, J.W. e Huston, R.L.** [1984] Dynamics of Constrained Multibody Systems, *J. Appl. Mech.*, vol.51, p.899-903.
- **Kane, T.R.** [1961] Dynamics of Nonholonomic Systems, *J. Appl. Mech.*, December, p.574-578.
- **Kane, T.R. e Levinson, D.A.** [1980] Formulation of Equations of Motion for Complex Spacecraft, *J. Guidance and Control*, vol.3, no.2, p.99-112.
- **Kane, T.R. e Levinson, D.A.** [1985] *Dynamics: Theory and Applications*, McGraw-Hill, New York.

- **Kane, T.R. e Wang, C.F.** [1965] On the Derivation of Equations of Motion, *J. Soc. Indust. Appl. Math.*, vol.13, no.2, p.487-492.
- **Kane, T.R.; Ryan, R.R. e Banerjee A.K.** [1987] Dynamics of a cantilever beam attached to a moving base, *J. Guidance*, vol.10, no.2, p.139-151.
- **Knorrenschild, M.** [1992] Differential/Algebraic Equations as Stiff Ordinary Differential Equations, *SIAM J. Numer. Anal.*, vol.29, no.6, p.1694-1715.
- **Kwakernaak, H. e Sivan, R.** [1972] *Linear Optimal Control Systems*, John Wiley & Sons, Inc.
- **Leipholtz, H.** [1970] *Stability Theory*, Academic Press, U.S.A.
- **Lord Rayleigh** [1945] *The Theory of Sound*, (1^a ed. - 1877), Republicado pela Dover Publications, New York.
- **Lur'ê, L.** [1968] *Mécanique Analytique*, Tome I, Masson & Cie, Paris.
- **Maggi, G.A.** [1896] *Princípi della Teoria Matematica del Movimento dei Corp: Corso di Meccanica Razionale*, Ed. Ulrico Hoepli, Milano.
- **Meirovitch, L.** [1967] *Analytical Methods in Vibration*, Macmillan, New York.
- **Meirovitch, L.** [1970] *Methods of Analytical Dynamics*, McGraw-Hill, U.S.A.
- **Meirovitch, L.** [1980] *Computational Methods in Structural Dynamics*, Sijthoff & Noordhoff, U.S.A.
- **Meirovitch, L.** [1986] *Elements of Vibration Analysis*, McGraw-Hill, New York.
- **Milenkovic, V.** [1982] Coordinates suitable for angular motion synthesis in robots, *Anais da conferência ROBOT 6*.
- **Moore, B.C.** [1976] On the Flexibility Offered by State Feedback in Multivariable Systems Beyond Closed Loop Eigenvalue Assignment, *IEEE Transactions on Automatic Control*, october, p.689-692.
- **Moreau, J.J.** [1971] *Mécanique Classique*, Tome II, Masson & Cie, Paris.
- **Ogata, K.** [1967] *State Space Analysis of Control Systems*, Prentice-Hall, Inc., New Jersey.
- **Ogata, K.** [1993] *Engenharia de Controle Moderno*, Prentice-Hall do Brasil, Rio de Janeiro.
- **Paul, R.P.** [1981] *Robot Manipulators: Mathematics, Programming and Control*, MIT Press.
- **Petzold, L.R.** [1982] Differential/Algebraic Equations are not ODE's, *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, vol.3, no.3, p.367-384.
- **Ritz, W.** [1911] *Gesammelte Werke*, Gauthier-Villars, Paris.
- **Rochinha, F.A.** [1990] *Modelagem e Simulação Numérica de Estruturas Unidimensionais*, Tese de Doutorado, DEM/PUC-Rio, Rio de Janeiro.
- **Rochinha, F.A. e Sampaio, R.** [1996] Dynamics of Multibody Systems: The Rigid Body Problem, *aceito para publicação nos anais do III APCOM/96 - Third Asian-Pacific Conference on Computational Mechanics*, Seoul, Corea.
- **Rochinha, F.A. e Sampaio, R.** [1996] Numerical Simulation of Multibody Systems: The Rigid Problem, *aceito para publicação nos anais do ECCOMAS/96 - European Community on Computational Methods in Applied Sciences*, setembro, Paris, França.
- **Sampaio, R.** [1995] Dynamics of Systems of Rigid Multibodies with Shocks, *Anais do DINAME/95*, Caxambú/MG, p.247.
- **Schiehlen, W.** [1990] *Multibody System Handbook*, Springer-Verlag.

- **Shabana, A.A.** [1989] *Dynamics of Multibody Systems*, John Wiley & Sons, U.S.A.
- **Shabana, A.A.** [1991] *Theory of Vibration - Volume II: Discrete and Continuous Systems*, Springer-Verlag, New York.
- **Shampine, L.F. e Reichelt, M.W.** [1995] *The MATLAB OdeSuite*, The MathWorks, Inc., <http://www.mathworks.com>.
- **Simo, J.C.** [1991] Unconditionally stable algorithms for rigid body dynamics that exactly preserve energy and momentum, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, vol.31, p.19-52.
- **Spurrer, R.A.** [1978] Comment on singularity-free extraction of a quaternion from a direction-cosine matrix, *J. Spacecraft*, vol.15, p.255.
- **Tavares Jr., H.M.** [1994] *Modelagem e Simulação Numérica de Sistemas Dissipativos com Número Finito de Graus de Liberdade*, Tese de Doutorado, DEM/PUC-Rio, Rio de Janeiro.
- **Tavares Jr., H.M. e Sampaio, R.** [1993a] Método de Maggi-Kane: Uma Sistemática de Construção de Bases para o Espaço dos Movimentos Virtuais, *Anais do XII COBEM/93 - Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica*, setembro, Brasília/DF.
- **Tavares Jr., H.M. e Sampaio, R.** [1993b] Método de Projeção e a Forma de Lagrange do Princípio de d'Alembert, *Anais do XII COBEM/93 - Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica*, setembro, Brasília/DF.
- **Tavares Jr., H.M. e Sampaio, R.** [1993c] Modelagem da Dinâmica dos Sistemas de Multicorpos Rígidos com Vinculação Unilateral, *apresentado no CNMAC*, setembro, Uberlândia/MG.
- **Tavares Jr., H.M. e Sampaio, R.** [1993d] Revisitando os Princípios de Gauss e de d'Alembert, *Anais do XII COBEM/93 - Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica*, dezembro, Brasília/DF.
- **Tavares Jr., H.M. e Sampaio, R.** [1995] Dinâmica de Sistemas de Multicorpos Rígidos com Impacto, *Anais do COBEM-CIDIM/95 - XIII Congresso Brasileiro e II Congresso Ibero Americano de Engenharia Mecânica*, dezembro, Belo Horizonte/MG, publicação em CD.
- **The MathWorks, Inc.** [1994] *MATLAB 4.2*, 24 Prime Park Way, Natick, MA.
- **The MathWorks, Inc.** [1994] *SIMULINK 1.3*, 24 Prime Park Way, Natick, MA.
- **Timoshenko, S., Young, D.H. e Weaver, W.** [1974] *Vibration Problems in Engineering*, Wiley, New York.
- **Tran, D.M.** [1991] Une Présentation de la Méthode de Kane pour la Formulation des Équations du Mouvement, *La Recherche Aéronautique*, no.3, p.1-21.
- **Trindade, M.A. e Sampaio, R.** [1995a] Análise da Influência da Flexibilidade na Dinâmica de Sistemas de Multicorpos, *Anais do International Meeting on Computational Mechanics and CAD/CAM*, novembro, Concepción, Chile, p.135-142.
- **Trindade, M.A. e Sampaio, R.** [1995b] Influência da Flexibilidade na Dinâmica e no Controle de um Pêndulo Invertido, *Anais do COBEM-CIDIM/95 - XIII Congresso Brasileiro e II Congresso Ibero Americano de Engenharia Mecânica*, dezembro, Belo Horizonte/MG, publicação em CD.
- **Trindade, M.A. e Sampaio, R.** [1995c] Modelagem e Simulação da Dinâmica Tridimensional de Multicorpos Rígidos, *Anais do XVI CILAMCE/95 - Congresso Ibero Latino Americano sobre Métodos Computacionais para Engenharia*, Curitiba/PR, vol.2, p.1149-1158.

- **Trindade, M.A. e Sampaio, R.** [1996a] Dinâmica Tridimensional de Sistemas de Multicorpos Rígidos, *aceito para publicação nos anais do IV CEM-NNE/96 - Congresso de Engenharia Mecânica Norte-Nordeste*, junho, Recife/PE.
- **Trindade, M.A. e Sampaio, R.** [1996b] Influence of the Flexibility in the Dynamics of Multibody Systems, *aceito para publicação nos anais do III APCOM/96 - Third Asian-Pacific Conference on Computational Mechanics*, setembro, Seoul, Coreia.
- **Wehage, R.A.** [1984] Quaternion and Euler parameters: a brief exposition, *Computer Aided Analysis and Optimization of Mechanical Systems Dynamics*, Springer-Verlag.
- **Whittaker, E.T.** [1944] *A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies*, Dover, New York.
- **Wylie, C.R. e Barrett, L.C.** [1985] *Advanced Engineering Mathematics*, McGraw-Hill, Singapore.

UMA INTRODUÇÃO À DINÂMICA DE SISTEMAS DE MULTI-CORPOS

MARCELO AREIAS TRINDADE

Dissertação apresentada ao Departamento de Engenharia Mecânica da PUC-Rio, no dia 24 de junho de 1996, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Ciências em Engenharia Mecânica, tendo sido aprovada pela Banca Examinadora, da qual participaram os seguintes professores:

Prof. Rubens Sampaio Filho, Ph.D. Orientador
PUC-Rio

Prof. Arthur Martins Barbosa Braga, Ph.D.
PUC-Rio

Prof. Fernando Alves Rochinha, D.Sc.
UFRJ

Prof. Hans Ingo Weber, D.Ing.
Prof. Pesquisador (sem vínculo empregatício)

Visto e permitida a impressão
Rio de Janeiro,

Profa. Maria Augusta Martins Davidovich
Coordenadora dos Programas de Pós-Graduação do
Centro Técnico Científico