MATEMÁTICAS Nivel 2º E.S.O.

Tema 9º SEMEJANZA

Conocimientos que puedes adquirir:

1º Figuras semejantes. Ampliación y reducción.

2º Polígonos semejantes.
- a) Razón de semejanza.
- b) Criterios de semejanza entre polígonos.

3º Aplicaciones gráficas de la semejanza:
- a) División de un segmento en partes iguales.
- b) Construcción de polígonos semejantes.
- c) Cuarto proporcional de tres segmentos.
- d) Tercero proporcional de dos segmentos.

4º Teorema de Tales

5º Triángulos semejantes.
- a) Criterios de semejanza entre triángulos.
- b) Criterios de semejanza de triángulos rectángulos.

6º Semejanza y áreas.

7º Escalas.
- a) Escalas numéricas.
- b) Escalas gráficas.

1º Figuras semejantes. Ampliación y reducción.

(Pensar en las fotocopias, cuando las ampliamos o reducimos).

Las figuras **semejantes** son las que tienen la misma forma pero distinto tamaño.

2º Polígonos semejantes

Observa los dos polígonos siguientes:

→ $75\% = \frac{75}{100} = 0'75$ →

Arriba tenemos a la izquierda un polígono. A la derecha hay una copia reducida al 75%.

Los puntos, segmentos y ángulos que se corresponden entre el original y la copia se llaman **homólogos.**

Por ejemplo: Son homólogos: los vértices A y A', los ángulos $\hat{B} = \hat{B}'$, y los segmentos AB y A'B'.

Lo que ha ocurrido con la fotocopia ha sido lo siguiente:

Las distancias originales se multiplican por 0'75:

Compruébalo: AB · 0'75 = A'B' →
BC · 0'75 = B'C' →

Si te das cuenta "original" · 0'75 = "copia" → → → $0'75 = \frac{"copia"}{"original"}$

a) Razón de semejanza:

La **razón de semejanza** es el cociente entre la copia y el original. La **razón de semejanza** es el cociente entre los lados homólogos.

Naturalmente, si queremos ampliar, tendremos que marcar un % mayor que 100.
Los ángulos homólogos se conservan iguales.

b) Criterios de semejanza:

Dos polígonos son semejantes cuando sus lados homólogos son proporcionales y sus ángulos homólogos son iguales.

Ejercicio 1º

De las "tortugas" que ves a continuación señala las que son semejantes al original:

Ejercicio 2º

Comprueba de las parejas de rectángulos que hay a continuación las que son semejanes.

Ejercicio 3º

De las "tortugas" que sean semejantes, calcula la razón de semejanza.

3º Aplicaciones gráficas de la semejanza

a) División de un segmento en partes iguales:

Vamos a dividir el segmento MN en 5 partes iguales.

1º Dibuja el segmento MN de 5 cm. Desde el extremo M traza una semirrecta. (No importa la inclinación).

2º Con el compás "pincha" en el extremo M y traza en la semirrecta 5 puntos (A, B, C, D, E), todos a la misma distancia.

3º Se dibuja una recta desde el extremo N al punto E. Se trazan rectas paralelas a ésta que pasen por los otros puntos, dividiendo así, el segmento MN en 5 partes iguales.

b) Construcción de polígonos semejantes.

Vamos a construir un pentágono (5 lados) semejante a otro dado, con una razón de semejanza de 3/2.

1º Dibuja un pentágono cualquiera.
Desde un punto cualquiera en su interior, dibuja semirrectas que pasen por sus vértices (A, B, C, D, E).

2º Se divide el segmento OA en 2 partes iguales y se toman 3 para dibujar el punto A’ en la misma semirrecta.

3º A continuación se trazan paralelas a los lados del pentágono para encontrar los puntos B’, C’, D’, E’.

c) Cuarto proporcional a otro segmento.

Tenemos tres segmentos. Sus medidas son de 2, 3 y 4 cm. respectivamente. Queremos hallar el cuarto segmento proporcional a ellos, de forma que satisfaga la proporción:

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{x}$$

1º Traza el segmento que mide 2 cm., y formando un ángulo cualquiera traza el segmento 2º que mide 3 cm.

2º En prolongación con el 1er segmento, traza el segmento 3º que mide 4 cm.

3º Traza una recta que pase por los extremos separados del 1er y 2º segmento. A continuación traza una paralela a la anterior que pase por el extremo del 3er segmento. Aparecerá el 4º segmento proporcional a los anteriores.
¿Cuánto mide? Resuelve la proporción que hay arriba. ¿Qué resultado tiene x?

d) Tercero proporcional a dos segmentos

Tenemos dos segmentos cuyas medidas son de 2 y 3 cm., respectivamente. Y queremos conocer el tercer segmento proporcional a los anteriores, para ello:

1º Dibuja el 1 er segmento que mide 2 cm., a continuación y formando ángulo dibuja el 2º segmento que mide 3 cm.

2º En prolongación con el segmento 1º, dibuja de nuevo el segmento 2º de 3 cm.

3º Sigue los mismos pasos que en el apartado anterior y encontrará el tercer proporcional que cumple la proporción: $\frac{2}{3} = \frac{3}{x}$ ¡¡Compruébalo!!

4º Teorema de Tales

Dibuja dos rectas secantes cortadas por 6 rectas que sean paralelas entre sí.
Las rectas paralelas las dibujas todas a la misma distancia. Por ello dejan en cada recta secante segmentos iguales:
u = u = u = u = u = u.
u' = u' = u' = u' = u' = u'

1º Diferenciamos con otro color la segunda y la quinta recta paralela.
Las nombramos como en el ejemplo que hay arriba. Observaremos que:

OA = 2u;	AB = 3u;	OB = 5u.
OA' = 2u';	A'B' = 3u';	OB' = 5u'

De las igualdades anteriores podemos deducir:

$$\frac{OA}{AB} = \frac{2u}{3u} \quad \rightarrow \quad y\ \ también \quad \rightarrow \quad \frac{OA'}{A'B'} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OA'}{OB'} = \frac{2}{5}$$

Si intercambiamos sus términos medios se deduce:

$$\frac{OA}{OA'} = \frac{AB}{A'B'} \quad y \quad \frac{OA}{OA'} = \frac{OB}{OB'}$$

y por lo tanto:

$$\frac{OA}{OA'} = \frac{AB}{A'B'} = \frac{OB}{OB'}$$

Teorema de Tales

Los **segmentos** determinados por **rectas paralelas** sobre dos rectas secantes son **proporcionales**.

5º Triángulos semejantes

Dos rectas secantes cortadas por dos rectas paralelas determinan dos triángulos. Observa que el vértice O de dichos triángulos es común y que los lados opuestos, AA' y BB', son paralelos. Se dice entonces que los dos triángulos están en posición de Tales.

Dos triángulos están en posición de Tales cuando tienen un ángulo común y los lados opuestos al mismo paralelos.

Comprueba con un transportados que los ángulos homólogos de los dos triángulos son iguales. Al tener en cuenta el teorema de Tales podemos decir que los lados homólogos son proporcionales. Compruébalo. Encuentra la razón de semejanza.

Dos triángulos que están en posición de Tales son semejantes.

a) Criterios de semejanza

Para saber si dos triángulos son semejantes, no es necesario comprobar que se puedan colocar en posición de Tales. Basta con que cumplan alguno de estos tres criterios:

Criterio 1º

Dos triángulos son semejantes si tienen dos pares de ángulos homólogos iguales.

Criterio 2º

Dos triángulos son semejantes si tienen dos pares de lados homólogos proporcionales y los dos ángulos homólogos iguales.

Criterio 3º

Dos triángulos son semejantes si tienen los tres pares de lados homólogos proporcionales.

Ejercicio 4º

Los lados de un triángulo miden 4 cm, 5 cm y 6 cm; y los de otro miden 7 cm, 8 cm y 9 cm. ¿Son semejantes? ¿Qué criterio has utilizado para responder?

Ejercicio 5º

Dos triángulos tienen un ángulo de 55º, y los lados que lo forman miden, en un caso 4 cm. y 7 cm., y en el otro triángulo 8 cm. y 14 cm. ¿Son semejantes? ¿Qué criterio de semejanza has utilizado para responder?

b) Criterios de semejanza de triángulos rectángulos.

(Recordar los que son triángulos rectángulos, ángulo recto, catetos e hipotenusa)

Como todos los triángulos rectángulos tienen un ángulo de 90º, los dos primeros criterios de semejanza que ya conoces para triángulos cualesquiera, se reducen a estos.

Criterio 1º

Dos triángulos rectángulos son semejantes si tienen un mismo ángulo agudo.

Criterio 2º

Dos triángulos rectángulos son semejantes si tienen dos pares de lados homólogos que sean proporcionales.

Ejercicio 6º

Un triángulo rectángulo tiene un ángulo agudo de 40º, y otro, un ángulo agudo de 50º. ¿Son semejantes? ¿Por qué?

Ejercicio 7º

Los catetos de un triángulo rectángulo miden 10 cm y 14 cm.; y los de otro, 15 cm y 21 cm, respectivamente. ¿Son semejantes?

Ejercicio 8º

Tenemos dos triángulos, ABC y A'B'C', e indica si son semejantes según los datos que hay a continuación. ¿En qué criterio te basas para responder?

1º) a = 10 cm; b = 12 cm; c = 14 cm
a' = 15 cm; b' = 18 cm; c' = 21 cm.

2º) $\hat{A} = 30^\circ; \quad \hat{B} = 25^\circ$
$\hat{A}' = 60^\circ; \quad \hat{B}' = 50^\circ$

3º) $\hat{A} = 45^\circ; \quad b = 8m; \quad c = 12\,m.$
$\hat{A}' = 45^\circ; \quad b' = 20\,m; \quad c' = 25\,m.$

6º Semejanza y áreas

Dibuja dos cuadrados de 5 y 3 cm de lado respectivamente.

Encuentra la razón de semejanza de los **lados** del grande respecto al pequeño. $\frac{5}{3}$

Halla el perímetro de cada uno de los cuadrados.

¿Cuál es la razón de los **perímetros**? → → $\frac{20}{12}$.

Observa que coincide la **razón de los perímetros** con la **razón de semejanza**.

$$\frac{20}{12} = \frac{5}{3}$$

> La **razón de los perímetros** de dos polígonos semejantes es igual a la razón de semejanza.

Halla el **área** de los dos cuadrados.
¿Cuál es la razón de las áreas de los cuadrados anteriores? (El grande con respecto el pequeño).
Área (grande) = lado^2 = 5^2 = 25 cm^2
Área (pequeño) = lado^2 = 3^2 = 9 cm^2

¿Cuál es la razón de las **áreas**? → $\frac{25}{9} = \left(\frac{5}{3}\right)^2$.

> La **razón de las áreas** de dos polígonos semejantes es el cuadrado de la razón de semejanza.

Ejercicio 9º

Dos cuadrados tienen un perímetro de 24 cm y 28 cm, respectivamente. ¿Son semejantes? En caso afirmativo, ¿cuál es la razón de semejanza, (la de los lados), del mayor respecto al menor? ¿Cuál es la razón de sus áreas?

Ejercicio 10º

La razón de las áreas de dos pentágonos semejantes es de $\frac{25}{64}$. ¿Cuál es la razón de sus perímetros? ¿Y la razón de semejanza (lados)?

Ejercicio 11º

El área de dos triángulos equiláteros es de 32 cm^2 y 50 cm^2, respectivamente. ¿Son semejantes? ¿Cuál es la razón de las áreas, del mayor con respecto al menor? ¿Cuál es la razón de semejanza, del mayor con respecto al menor?

7º Escalas

Las escalas representan el cociente o la relación que existe entre un plano o un mapa con respecto a la realidad.

a) Escalas numéricas:

La **escala numérica** de un plano representa la razón de semejanza entre las longitudes del plano y sus homólogas distancias en la realidad. $\dfrac{"plano"}{"realidad"} =$

b) Escalas gráficas:

La **escala gráfica** de un plano asigna a segmentos del plano los valores correspondientes a la realidad.

Ejercicio 12º

Del mapa de Alicante, a escala $\dfrac{1}{400.000} = 1 : 400.000 =$, halla las siguientes distancias, (en línea recta).

a) Trayecto 1º: De Villajoyosa a Denia.
b) Trayecto 2º: De Gandia a Callosa de Ensarriá.
c) Trayecto 3º: De San Juan a Muchamiel.

Ejercicio 13º

Del plano de San Juan, a escala 1 : 10.000 = $\dfrac{1}{10.000} = \dfrac{1\ cm\ en\ el\ plano}{10.000\ cm\ realidad}$, halla los siguientes recorridos:

a) Recorrido 1º: Hallar la distancia de la Avenida del Instituto,
b) Recorrido 2º: Hallar la distancia que hay desde la Rotonda de la Avenida de Muchamiel hasta la Plaza de España.
c) Recorrido 3º: Hallar la distancia que tiene la Avenida de la Rambla, (desde la Plaza de España hasta la Plaza de San José (“Hierros”).