MATEMÁTICAS Nivel 2º E.S.O.

Tema 5º EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Conocimientos que puedes adquirir:

1º El lenguaje algebraico.
- a) Expresiones numéricas.
- b) Expresiones algebraicas.
- c) Valor numérico de una expresión algebraica.

2º Monomios.

3º Operaciones con monomios.

4º Polinomios.

5º Operaciones con polinomios.

6º Potencia de monomios y polinomios.

1. El lenguaje algebraico

Para comprender el lenguaje algebraico, responde a las siguientes preguntas:

(1º)
- · ¿Cuál es el doble de 5?
- · ¿Cuál es el doble de 7?
- · ¿Cuál es el doble de 11?
- ¿Cómo has hecho para encontrar el doble de estos números?
- ¿Qué tienes que hacer para encontrar el doble de cualquier número?
Contesta:

Imagina que nombras a un número cualquiera por una letra, por ejemplo **n,** entonces **2n** sería el doble de ese número.

(2º)
- · ¿Cuál es la mitad de 8?
- · ¿Cuál es la mitad de 10?
- ¿Cómo has hecho para encontrar la mitad de estos números?
- ¿Qué tienes que hacer para encontrar la mitad de cualquier número?
Contesta:

Imagina que llamas a un número cualquiera **b**, entonces **b:2** es la mitad de **b**.

(3º)
- · ¿Qué número obtienes si añades 5 unidades a 6?
- · ¿Qué número obtienes si añades 5 unidades a 10?
- · ¿Qué número obtienes si añades 5 unidades a 12?
- ¿Cómo has encontrado el número que se obtiene cuando se añaden 5 unidades a otro?
- ¿Qué expresión utilizarías si quieres añadir 5 unidades a un número cualquiera? **Contesta:**

Observa que si llamas a un número cualquiera **x**, entonces **x + 5**, representa el número que se obtiene cuando añades 5 unidades a cualquier número.

Ejercicio 1º

Traduce del lenguaje ordinario al algebraico las siguientes frases.

a) El doble de c.
b) La mitad de 12.
c) El triple de 7.
d) El triple de a
e) La mitad de m.
f) La mitad de z.
g) Un tercio de p.
h) La suma de 7 y 10 es...
i) La suma de 5 y m es...
j) La suma de m y n es...
k) La mitad de 9 y 5 es...
l) La mitad de x y b es...
m) El cuadrado de 8.
n) El cuadrado de z es...

Como ves el lenguaje algebraico utiliza números, letras y operaciones entre sí, (sumar, restar, multiplicar, dividir, cuadrados, raíces cuadradas...)

Ejercicio 2º (Ampliación)

Traduce del lenguaje ordinario a lenguaje algebraico:

a) El doble de un número cualquiera
b) El triple de un número más 5 unidades.
c) Un número cualquiera.
d) Un número más 3 unidades.
e) La quinta parte de un número.
f) La mitad de la suma de dos números distintos.
g) El doble de un número más el triple de otro.
h) La suma de dos números consecutivos.
i) El cuadrado de la suma de dos números distintos.
j) El cuadrado de la diferencia de dos números diferentes.
k) La diferencia de los cuadrados de dos números distintos.
l) La diferencia entre un número y su mitad.
m) El área de un cuadrado de lado "a" cm.
n) El área de un rectángulo de lados "a" y "b".
o) El número de horas que hay en "m" días.

a) Expresiones numéricas

Una expresión numérica está formada por números relacionados mediante operaciones.

Ejemplo: a) $25 \cdot 3 =$ b) $\dfrac{15+3}{2} =$ c) $\sqrt{12+13} =$

Ejercicio 3º

En el ejercicio 1º, señala la letra de las expresiones numéricas

b) Expresiones algebraicas

Una expresión algebraica está formada por números y letras relacionados mediante operaciones. Las letras reciben el nombre de **indeterminadas**. Los **términos** de una expresión algebraica son los sumandos.

Ejemplo: $2x^2 + 15xy - 3(z - 7) + 10.$

Las **indeterminadas** son x, y, z.
Los **términos** son: $2x^2$; $15xy$; $3(z - 7)$; 10.

Ejercicios 4º

Identifica las **indeterminadas** y cuenta los **términos** que forman estas expresiones algebraicas:

a) $2x + 3x^2 + 5xy$
b) $-12a - 7b^2$
c) $4 \cdot (5 - x) \cdot (3x - z)$
d) $(x + y)^2$
e) $(mn - n)^3 - 1$
f) $3rs$
g) $(3x + 7zp - 12)^2$
h) $4a - 5b + 7c + 8df$
i) $\sqrt{3a + 5b}$
j) $\frac{4z + 2y}{5} - \frac{3z}{7} + 12z$

c) Valor numérico de una expresión algebraica

Observa este ejemplo:

Andrés tiene 5 años más que Julia. Cuando Julia tenga 12 años, ¿cuántos tendrá Andrés? Y cuando Julia tenga 15 años, ¿cuántos tendrá Andrés? Y cuando Julia tenga 20 años, ¿cuántos tendrá Andrés? Vamos a crear una expresión algebraica que resuma este ejemplo:

Julia tiene "x" años.
Luego Andrés tendrá " x + 5 " años
Observa que cada vez que cambie la edad de Julia, cambiará la de Andrés.

Calcula: $x + 5$; para $x = 12$. → $12 + 5 = 17$
Para $x = 15$ → $15 + 5 = 20$
Para $x = 20$ → $20 + 5 = 25$

Ejercicio 5º

Halla el valor numérico de las siguientes expresiones algebraicas:

a) $\mathbf{3x + 1}$; para $x = 2$; → $3 \cdot \mathbf{2} + 1 = 6 + 1 = 7$
Para $x = 5$
Para $x = 10$

b) $\mathbf{x^2 - 1}$;
Para $x = 0$
" $x = 1$
" $x = 9$

c) $\mathbf{2x + x^2}$
Para $x = 5$
" $x = 2$
" $x = -2$

d) $\mathbf{x^2 + 5y - 1}$;
Para $x = 1$; $y = 3$
Para $x = -4$; $y = 4$
Para $x = -5$; $y = -5$

e) $\frac{x+1}{2} + x =$
Para $x = 5$
" $x = 3$
" $x = -7$

2. Monomios. Elementos. Monomios semejantes.

Monomio es una expresión algebraica que resulta de **multiplicar** un número por indeterminadas (letras) elevadas a exponentes naturales.
El número es el **coeficiente.**
Las **indeterminadas** son la **parte literal** del monomio.
El **grado** es la suma de todos los exponentes de la parte literal (de las letras).

Ejemplo: $-12x^3z$

Coeficiente: -12; **Indeterminada**: x, z. **Grado**: $3 + 1 = 4$

Dos monomios son semejantes cuando sus partes literales son iguales y están elevadas al mismo exponente.

Ejemplo: $3x^2z$; $-14x^2z$; $3/4x^2z$; x^2z.

Ejercicio 6º

a) Identifica los coeficientes, partes literales y grados de los siguientes monomios:

$-5x^2$; $2x^3y^2z$; $1/5xy^2$; $20x^2$; $15y^2x$; $3x^2$; $-xy^2$; $6x^2y^2$

b) De entre los monomios que hay arriba separa y escribe los que sean **semejantes.**

3. Operaciones con monomios

NOTA: Para operar con monomios hay que tener en cuenta: los signos, los coeficientes y los grados.

Sumas y restas de monomios

Para sumar o restar monomios semejantes, **se suman o se restan los coeficientes**.

Ejemplo:
$3c^2 + 12c^2 = 15c^2$
$27x - 17x = 10x$
$35xy^3 + 2xy^3 - 10xy^3 - xy^3 = 26xy^3$
$\frac{2a}{7} + \frac{3a}{7} - \frac{a}{7} = \frac{4a}{7}$

Ejercicio 7º

Calcula las siguientes **sumas** y **restas** de monomios:

a) $5x^3 - 4x^3 =$

b) $5pq + 4pq - 9pq =$

c) $4y^2 - 6y^2 + 3y^2 =$

d) $12x - 10x + 5y =$

e) $(2x + 3y) - (2x - 3y) =$

f) $4x^5 - x^5 + 12x^5 - 10x^5 =$

g) $4c + 3b - 2c + 5b =$

h) $5 + 3x - 2 + 2x =$

i) $7m^3 - 2m^3 + 6m^3 =$

j) $2y + 3z - 2 + 5y + 5z - 3 =$

k) $x^5 + 7x^5 - 4x^5 - 5x^5 =$

l) $5x^2 - 3x + 3x^2 + 6x - 7 =$

m) $0'1mn^2 + 0'9mn^2 =$

n) $9y^2 - (4y^2 - 3y^2) =$

ñ) $5c + 2r - 8c + 6r + n =$

o) $3p - 5c + p - 6c =$

p) $4c^2 + 5c - 7c + 2c^2 =$

q) $b^3 + 3b^2 + 5b - 2b^2 + 3b^3 =$

Multiplicación de monomios

Para multiplicar dos monomios se multiplican los coeficientes y se suman los grados de la misma indeterminada. ¡Cuidados con los signos de los coeficientes!

Ejemplo: $3x^2 \cdot 5x^3yz^2 = 15x^5yz^2$

$-6d^3m \cdot 2dm^4 = -12d^4m^5$

Ejercicio 8º

Calcula los siguientes **productos** de monomios:

a) $3x^2 \cdot 5x^3 =$

b) $6x \cdot (-3x) =$

c) $4xy^2 \cdot 0'1xy^2 =$

d) $3 \cdot 2bc \cdot 5 =$

e) $-7 \cdot (-4x^2) \cdot x^3 =$

f) $xy \cdot 10yz =$

g) $15y^3z \cdot (-2)yz =$

h) $-3y^4 \cdot (-5)yz^2 =$

i) $\frac{2x}{3} \cdot \frac{5x^3}{4} =$

j) $12a^7 \cdot \frac{5a}{6} =$

División de monomios

> Para dividir dos monomios se dividen los coeficientes y se restan los grados de la misma parte literal. ¡Cuidado con los signos de los coeficientes!

Ejemplo: $-12x^6 : 4x^2 = -3x^4$

Ejercicio 9º

Calcula los cocientes de las siguientes divisiones de monomios:

a)	$50x^3 : 2x =$	b)	$12z^5 : 6z =$	c)	$30x^4z^3 : 2xz =$
d)	$-15m^6n^3 : -5m^4n$	e)	$-21t^8 : 7t^5 =$	f)	$20b^3c^2 : (-4)bc =$
g)	$16x : 2 =$	h)	$18x^5 : 3 =$	i)	$-20d^4 : (-5d) =$
j)	$22y^5 : (-2y^4) =$	k)	$-26x^6 : 2x^2 =$	l)	$15p^9 : (-3)p^6 =$

Potencias de monomios

> La potencia de un monomio se calcula multiplicando el coeficiente por sí mismo tantas veces como lo indique el grado (exponente) y multiplicando el grado de la indeterminada por el exponente.

Ejemplo: $\left(3x^2\right)^4 = 3^4\,x^8 = 81x^8$

Ejercicio 10º

Calcula las siguientes **potencias** de monomios:

a)	$(3x^2)^3 =$	b)	$(5x^3)^2 =$
c)	$(-12x^2y^3)^2 =$	d)	$(-2x)^4 =$
e)	$(-3x^2)^3 \cdot (2x^2)^4 =$	f)	$(5y^3)^3 : (5y^2)^2 =$
g)	$\left[\left(2x^3\right)^2\right]^3 =$	h)	$2x^3 \cdot 3x^4 \cdot x^2 =$
i)	$26y^7 : 2y^5 =$	j)	$15x^4y^5 : 3xy^4 =$
k)	$3xy^2 \cdot 2x \cdot 5y =$	l)	$-20m^4 : 5m =$

4. Polinomios

Un **polinomio** es la suma o la resta de dos o más monomios no semejantes. Los monomios que componen un polinomio se llaman **términos.** El **grado** de un polinomio es el de su término de mayor grado. El término de grado cero se llama **término independiente.**

Ejemplo: $2x^3z + 5x^2 - 7x + 9$

Los términos son: $2x^3z$; $5x^2$; $7x$; 9
El grado es 4. → $(3 + 1 = 4)$.
El término independiente es el 9.

Ejercicio 11º

En los siguientes polinomios, identifica las indeterminadas, los términos y los grados:

a) $5mn^2 - 4mn + 5$
b) $8x^4 - 5x^3 + 6x^2 - x + 8$
c) $-7xy^2 - 3x^2y^4 - 5x^5y^4$
d) $3x^4 - 12x + 5x^2 - 7x^3 + 10$

Un polinomio está **ordenado** cuando sus términos van de mayor a menor grado. Un polinomio está **completo** cuando tiene todos sus grados, desde el menor, grado 0, hasta el grado mayor.

Ejemplo: $\mathbf{5x^3 - 9x^2 + 12x - 7}$ → Este polinomio **está ordenado** y **es completo**.

$\mathbf{2x^4 - 5x}$ → Este polinomio **está ordenado** pero **es incompleto**.

NOTA: En general un polinomio se completa añadiéndole tantos términos de coeficiente cero como sea necesario.

Ejercicio 12º

Ordena y completa los siguientes polinomios:

a) $5y^3 - y$ b) $3z - 6z^2 + 7z^4 - 2z^3$ c) $3b - b^2 + 15$

d) $7m^5 - 17 + 12m$ e) $8 - x^3 + 2x$ f) $x^5 + 10 - 3x^2$

5. Operaciones con polinomios

SUMAS Y RESTAS: (Recordar brevemente sumas y restas de monomios **semejantes**).

> Para **sumar** o **restar** dos o más polinomios se colocan uno debajo de los otros de forma que los términos semejantes queden debajo de sus semejantes.
> Si uno de ellos es incompleto se dejan los correspondientes huecos en los términos que falten.

Ejemplo: Dados los polinomios $P = 5y^3 - 8y^2 + 10y - 7$; $Q = -3y^3 + 15y - 5$, vamos a realizar la suma P + Q, y la resta P – Q.

P + Q **P – Q**

$$\begin{array}{rrrrr} & 5y^3 & -8y^2 & +10y & -7 \\ + & -3y^3 & & +15y & -5 \\ \hline & 2y^3 & -8y^2 & +25y & -12 \end{array} \qquad \begin{array}{rrrrr} & 5y^3 & -8y^2 & +10y & -7 \\ + & 3y^3 & & -15y & +5 \\ \hline & 8y^3 & -8y^2 & -5y & -2 \end{array}$$

→ ¡OJO los signos!

> También se pueden sumar o restar sin necesidad de ponerlos unos debajo de los otros. Para calcular iremos cogiendo los términos semejantes de cada polinomio y los **sumaremos** si tienen los **signos iguales** y los **restaremos** si tienen los **signos distintos**.

Ejemplo: $P + Q = (5y^3 - 8y^2 + 10y - 7) + (-3y^3 + 15y - 5) =$

$= 5y^3 - 8y^2 + 10y - 7 - 3y^3 + 15y - 5 = 2y^3 - 8y^2 + 25y - 12.$

Trata de hacer tu la resta: P – Q =

MULTIPLICACIÓN

> Para multiplicar dos polinomios, se multiplica cada término del polinomio de abajo por todos lo términos del de arriba y se colocan los resultados de forma que los términos semejantes queden unos debajo de otros. Después se suman los polinomios semejantes.

Ejemplo: Realiza la multiplicación de $M = 5x^2 - 7x + 8$ por $N = 3x^2 - 5$.

$$\begin{array}{rrrrrr} & & & 5x^2 & -7x & +8 \\ & & \mathbf{x} & 3x^2 & & -5 \\ \hline & & & 15x^2 & +35x & -40 \\ 15x^4 & -21x^3 & +24x^2 & & & \\ \hline 15x^4 & -21x^3 & +39x^2 & & +35x & -40 \end{array}$$

También podemos multiplicar polinomios sin tener que colocarlos uno encima del otro

Ejercicio 13º

Dados los siguientes polinomios :

A = $12x^2 – 6x + 2$; B = $10x^2 – 2$; C = $6x^2 + 3x – 1$; D = $-8x^2 + 10x – 5$-

Realiza las siguientes operaciones:

a) A + B. b) B + C + D. c) A - B. d) C – D.

e) 3 · A. f) A · B. g) B · D h) C – B.

6. Potencias de monomios y polinomios.

Las siguientes igualdades se llaman **identidades notables**, se utilizan con frecuencia en las operaciones con polinomios.

CUADRADO DE UNA SUMA:

El **cuadrado de una suma** de dos monomios es igual al cuadrado del primero más el cuadrado del segundo más el doble del primero por el segundo.

$$\mathbf{(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2 \cdot a \cdot b}$$

Ejemplo: $(y^2 + 3y)^2 = (y^2)^2 + (3y)^2 + 2 \cdot y^2 \cdot 3y = y^4 + 9y^2 + 6y^3$

CUADRADO DE UNA DIFERENCIA:

El **cuadrado de una diferencia** de dos monomios es igual al cuadrado del primero más el cuadrado del segundo menos el doble del primero por el segundo.

$$\mathbf{(a – b)^2 = a^2 + b^2 – 2 \cdot a \cdot b}$$

Ejemplo: $(3x - 5)^2 = (3x)^2 + 5^2 - 2 \cdot 3x \cdot 5 = 9x^2 + 25 - 30x$

PRODUCTO DE UNA SUMA POR UNA DIFERENCIA:

El **producto de la suma de dos monomios por su diferencia** es igual a la diferencia de los cuadrados de ambos monomios.

$$\mathbf{(a + b) \cdot (a – b) = a^2 – b^2}$$

Ejemplo: $(4x^3 + x) \cdot (4x^3 - x) = (4x^3)^2 - (x)^2 = 16x^6 - x^2$

Ejercicio 14º

Utiliza las identidades notables para desarrollar estas expresiones:

a) $(x + y)^2$ b) $(m – n)^2$ c) $(3x + 2)^2$ d) $(3c – d)^2$
e) $(x^2 + y^2)^2$ f) $(m + 5) \cdot (m – 5)$ g) $(2x^2 + 1) \cdot (2x^2 – 1)$
h) $(1 – 3x) \cdot (1 + 3x)$ i) $(z^3 + z^2) \cdot (z^3 – z^2)$ j) $(4x^3 – 3x^2)^2$