

MATEMÁTICAS

Nivel 2º E.S.O.

**Tema 3º NÚMEROS RACIONALES**

Conocimientos que puedes adquirir:

- 1º Fracciones de números enteros
- 2º Fracciones equivalentes:
  - a) Por amplificación.
  - b) Por simplificación.
  - c) Fracciones irreducibles.
- 3º El número racional:
  - a) Representación gráfica.
  - b) Ordenación de números racionales.
  - c) Reducción de fracciones a común denominador.
- 4º Suma y restas de números racionales.
- 5º Multiplicación y división de números racionales.
- 6º Operaciones combinadas.
- 7º Potencias de números racionales.
  - a) Potencias de exponente natural
  - b) Potencias de exponente entero.
- 8º Raíz cuadrada de un número racional.

**1. Fracciones de números enteros:**a) Fracciones de números naturales:

Una misma fracción de números naturales puede tener diferentes significados:

a) Puede hacer referencia a una **parte de la unidad:**

Ejemplo:  $\frac{2}{3}$

b) Puede ser un **operador:**

Ejemplo:  $\frac{2}{3} \text{ de } 15 = \frac{2}{3} \cdot 15 = \frac{2 \cdot 15}{3} = \frac{30}{3} = 10$

c) Puede representar una **división:**

Ejemplo:  $\frac{2}{3} = 2 : 3 = 0'6666\dots$

b) Fracciones con números enteros

Observa:

$$\frac{+12}{+6} = (+12) : (+6) = +2 \quad \rightarrow \quad \frac{+12}{+6} = \frac{12}{6}$$

$$\frac{-12}{-6} = (-12) : (-6) = +2 \quad \rightarrow \quad \frac{-12}{-6} = \frac{12}{6}$$

$$\frac{-12}{+6} = (-12) : (+6) = -2 \quad \rightarrow \quad \frac{-12}{+6} = -\frac{12}{6}$$

$$\frac{+12}{-6} = (+12) : (-6) = -2 \quad \rightarrow \quad \frac{+12}{-6} = -\frac{12}{6}$$

Toda fracción de **números enteros** se puede escribir como una fracción de **números naturales** que será **positiva** si el numerador y el denominador son iguales y **negativa** si tienen distinto signo.

**Ejercicio 1º**

Escribe las siguientes fracciones de números enteros en forma de: fracciones positivas, fracciones negativas, números enteros y naturales:

a)  $\frac{-21}{-7}$     b)  $\frac{+25}{-5}$     c)  $\frac{-1}{+3}$     d)  $\frac{+25}{-7}$     e)  $\frac{-2}{-5}$     f)  $\frac{0}{+5}$     g)  $\frac{+12}{0}$

**2º Fracciones equivalentes**

Dos fracciones son **equivalentes** si tienen el mismo valor numérico.

Más rápido: Dos fracciones son **equivalentes** si al multiplicar en “**cruz**” da el mismo resultado.

Ejemplo:  $\frac{-45}{+9} = -5$ ;  $\frac{+15}{-3} = -5$

$$\frac{-45}{+9}; \frac{+15}{-3} \rightarrow (-45) \cdot (-3) = +135$$

$$(+9) \cdot (+15) = +135$$

Podemos conseguir fracciones equivalentes de dos formas:

**Por amplificación:** Se multiplican el numerador y el denominador por el mismo número.

$$\frac{-2}{3} \rightarrow \frac{-2 \cdot 5}{3 \cdot 5} = \frac{-10}{15} \rightarrow \frac{-2}{3} = \frac{-10}{15} \quad (-2) \cdot 15 = -30$$

$$3 \cdot (-10) = -30$$

**Por simplificación:** Se dividen el numerador y el denominador por el mismo número:

$$\frac{-30}{45} = \frac{-30 : 3}{45 : 3} = \frac{-10}{15} = \frac{-10 : 5}{15 : 5} = \frac{-2}{3}$$

Cuando una fracción ya no se puede reducir más se llama **fracción irreducible**.

**Ejercicio 2º**

Comprueba si son equivalentes los siguientes pares de fracciones:

a)  $\frac{2}{-5}; \frac{12}{-30}$     b)  $\frac{-3}{4}; \frac{9}{-12}$     c)  $\frac{-5}{+7}; \frac{+20}{-28}$     d)  $\frac{-2}{3}; \frac{-4}{9}$     e)  $\frac{20}{-40}; \frac{-1}{2}$

**Ejercicio 3º**

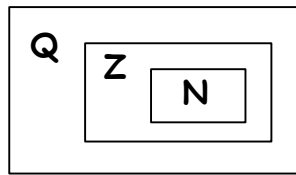
- a) Escribe 5 fracciones equivalentes por amplificación de  $-3/5$ .
- b) Simplifica hasta encontrar la fracción irreducible:  
 $-20/30$ ;  $15/75$ ;  $27/-36$ ;  $-7/21$ ;  $-32/-40$ ;  $-15/20$ ;  $-27/45$ .

**3º El número racional**

Cada número racional está formado por la fracción irreducible y todas sus equivalentes.

Ejemplo:  $\frac{1}{5} = \frac{2}{10} = \frac{-3}{-15} = \frac{4}{20} = \dots$   
 $\frac{-3}{4} = \frac{-6}{8} = \frac{-30}{40} = \frac{15}{-20} = \dots$

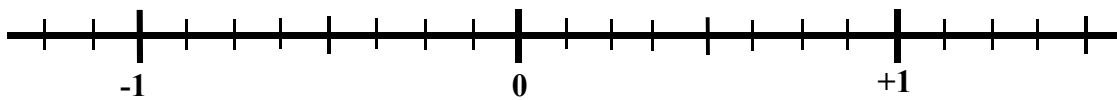
El conjunto de números racionales se representa por la letra **Q**.



a) Representación gráfica:

(Recordar la representación gráfica de los números naturales y enteros)-

Representa gráficamente:  $\frac{1}{2}$ ;  $\frac{-1}{4}$ ;  $\frac{3}{4}$ ;  $\frac{6}{8}$ ;



Puedes constatar que  $\frac{3}{4}$  y  $\frac{6}{8}$  ocupan el mismo punto. ¿Por qué?

Cada número racional ocupa un lugar ( un punto) en la recta numérica.

**Ejercicio 4º**

Dadas las fracciones:  $\frac{-6}{24}$ ;  $\frac{-3}{-6}$ ;  $\frac{+24}{-36}$ ;  $\frac{-4}{+2}$ ;  $\frac{8}{-4}$ ;  $\frac{-12}{16}$ ;  $\frac{-18}{-9}$

- Convertirlas en fracciones irreducibles de números naturales con signo.
- Situarlas, una vez convertidas en fracción irreducible, en la recta numérica.
- ¿Cuáles representan números naturales? ¿Y números enteros?
- ¿Cuántos números racionales distintos representan? ¿Cuáles son?

b) Ordenación de los números racionales

**Caso 1º** Si tienen el mismo denominador:

**Es mayor el que tengan el numerador mayor.**

Ejemplo:  $\frac{2}{6}; \frac{5}{6}; \frac{4}{6} \rightarrow \frac{5}{6} > \frac{4}{6} > \frac{2}{6}$

**Caso 2º** Si tienen el mismo numerador:

**Es mayor el que tenga el denominador menor.**

Ejemplo:  $\frac{1}{6}; \frac{1}{10}; \frac{1}{3} \rightarrow \frac{1}{3} > \frac{1}{6} > \frac{1}{10}$

**Caso 3º** Si tienen distintos numerador y distintos denominadores:

**Se cambian dichas fracciones por otras que sean equivalentes y que tengan el mismo denominador. (Estaremos en el caso 1º)**

Ejemplo 1º:  $\frac{2}{3}; \frac{4}{5} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 5}; \frac{4 \cdot 3}{5 \cdot 3} = \frac{10}{15}; \frac{12}{15} \rightarrow$  Ahora ya podemos comparar.

Ejemplo 2º (utilizando el **m.c.m. de los denominadores**):

$$\frac{2}{6}; \frac{3}{10}$$

**Paso 1º:** Se calcula el m.c.m. de los denominadores:

$$\begin{aligned} 6 &= 2 \cdot 3 \\ 10 &= 2 \cdot 5 \end{aligned} \quad \text{m.c.m. (6, 10)} = 2 \cdot 3 \cdot 5 = \mathbf{30}$$

**Paso 2º:** Se divide el m.c.m. (30) por cada uno de los denominadores:

$$\begin{aligned} 30 : 6 &= \mathbf{5} \\ 30 : 10 &= \mathbf{3} \end{aligned}$$

**Paso 3º:** Cada número obtenido se multiplica (para amplificar) por la fracción de donde proviene:

$$\frac{2 \cdot 5}{6 \cdot 5}; \frac{3 \cdot 3}{10 \cdot 3} = \frac{10}{30}; \frac{9}{30} \rightarrow \text{Ya podremos comparar}$$

**Ejercicio 5º**

Ordena las siguientes fracciones de menor a mayor:

$$a) \frac{2}{7}; \frac{5}{7}; \frac{4}{7} = \quad b) \quad \frac{4}{3}; \frac{4}{5}; \frac{4}{7} = \quad c) \quad \frac{2}{3}; \frac{3}{6}; \frac{4}{9} =$$

**4º Sumas y restas de números racionales**

a) Con el mismo denominador:

Para sumar o restar fracciones con el **mismo denominador**, se suman o se restan los numeradores, dejando el mismo denominador.

$$\text{Ejemplo: } \frac{3}{12} + \frac{7}{12} = \frac{3+7}{12} = \frac{10}{12} = \frac{10:2}{12:2} = \frac{5}{6}$$

$$\frac{12}{15} - \frac{10}{15} = \frac{12-10}{15} = \frac{2}{15}$$

b) Con distinto denominador:

Se reducen a común denominador y después se suman o se restan los numeradores dejando el nuevo denominador.

$$\text{Ejemplo: } \frac{7}{10} + \frac{5}{12} = \frac{7 \cdot 6}{10 \cdot 6} + \frac{5 \cdot 5}{12 \cdot 5} = \frac{42}{60} + \frac{25}{60} = \frac{67}{60}$$

$$\text{m.c.m. } (10, 12) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$$

$$60 : 10 = 6$$

$$60 : 12 = 5$$

**Ejercicio 6º**

Calcula las siguientes expresiones, simplificando sus resultados:

$$a) \frac{3}{4} + \frac{7}{4} + \frac{2}{4} = \quad b) \quad \frac{8}{7} - \frac{5}{7} = \quad c) \quad 3 - \frac{2}{5} =$$

$$d) \frac{2}{5} + \frac{3}{10} + \frac{8}{15} = \quad e) \quad \frac{4}{9} + \frac{2}{3} + 2 = \quad f) \quad \frac{7}{12} + 3 + \frac{9}{20} =$$

$$g) \frac{3}{4} + \frac{5}{8} - \frac{1}{12} = \quad h) \quad \frac{2}{5} + \frac{8}{10} - \frac{10}{12} = \quad i) \quad 3 - \frac{2}{7} - \frac{12}{21} =$$

**5º Multiplicación y división de números racionales**a) Multiplicación de números racionales:

Para multiplicar varios números racionales se **multiplican los numeradores entre sí** y el resultado se pone como **numerador**.

Después se **multiplican los denominadores entre sí** y se pone el resultado como **denominador**.

Ejemplo: He tomado los  $\frac{3}{4}$  de  $\frac{1}{2}$  litro de zumo que me quedaba. ¿cuánto habré tomado?

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3 \cdot 1}{4 \cdot 2} = \frac{3}{8} \quad \rightarrow \text{ Habré tomado los } \frac{3}{8} \text{ de litro.}$$

b) Fracción inversa, (propiedad del elemento inverso):

Dos fracciones son inversas entre sí, si al multiplicarlas resulta la unidad.

Ejemplo:

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{6}{6} = 1$$

$$\frac{1}{5} \cdot \frac{5}{1} = \frac{5}{5} = 1$$

c) División de números racionales:

La división de dos fracciones es igual al producto de la primera por la inversa de la segunda.

**Ejercicio 7º**

Calcula las siguientes expresiones, simplificando los resultados:

a)  $\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} =$

b)  $\frac{-3}{2} \cdot \frac{4}{-9} =$

c)  $\frac{2}{3} \cdot 3 \cdot \frac{5}{6} =$

d)  $6 : \frac{5}{2} =$

e)  $\frac{3}{2} : \frac{-3}{4} =$

f)  $\frac{15}{7} : (-5) =$

g)  $\left(\frac{7}{10} \cdot \frac{5}{14}\right) : \frac{35}{38} =$

h)  $\left(6 : \frac{2}{3}\right) \cdot \frac{1}{2} =$

i)  $\frac{2}{3} \cdot \left(\frac{15}{12} : \frac{5}{4}\right) =$

¿Cuál es el inverso de  $\frac{4}{7}$ ? ¿Cuál es el inverso de 10? ¿Y de -10?

**6º Operaciones combinadas**

Recuerda las reglas de prioridad:

- 1º Se calcula el interior de los paréntesis, (si hay un paréntesis dentro de otro se resuelve desde dentro hacia fuera).  
 2º Se resuelve las multiplicaciones y divisiones.  
 3º Se resuelven las sumas y las restas.

Resuelve el ejemplo siguiente:  $2 - \frac{2}{3} \cdot \left(1 - \frac{3}{8}\right) =$

**Ejercicio 8º**

Calcula y simplifica las siguientes operaciones combinadas:

$$a) 2 \cdot \frac{7}{10} + \frac{5}{2} \cdot 3 =$$

$$b) 3 \cdot \frac{5}{6} - 4 : \frac{8}{3} + 7 =$$

$$c) \left(\frac{2}{5} + \frac{8}{10}\right) \cdot \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{9}\right) =$$

$$d) \frac{5}{2} - \frac{3}{4} + 4 \cdot \left(5 - \frac{1}{2}\right) =$$

**7º Potencias de números racionales con exponente natural**

$$\left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{8}{125}$$

$$\text{Base} \rightarrow \frac{2}{5}; \quad \text{Exponente} \rightarrow 3$$

Observa:

$$\left(-\frac{4}{5}\right)^2 = \left(-\frac{4}{5}\right) \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{16}{25}$$

$$\left(-\frac{4}{5}\right)^3 = \left(-\frac{4}{5}\right) \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{64}{125}$$

Operaciones con potencias:a) Producto de potencias de la misma base:**Se suman los exponentes y se deja la misma base.**

Ejemplo: 
$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^5 = \left(\frac{2}{3}\right)^{2+5} = \left(\frac{2}{3}\right)^7$$

b) Cociente de potencias de la misma base:**Se restan los exponentes y se deja la misma base.**

Ejemplo: 
$$\left(\frac{4}{7}\right)^8 : \left(\frac{4}{7}\right)^5 = \left(\frac{4}{7}\right)^{8-5} = \left(\frac{4}{7}\right)^3$$

c) Potencia de otra potencia:**Se multiplican los exponentes y se deja la misma base.**

Ejemplo: 
$$\left[\left(\frac{1}{3}\right)^2\right]^4 = \left(\frac{1}{3}\right)^{2 \cdot 4} = \left(\frac{1}{3}\right)^8$$

**Ejercicio 9º**

Calcula:

a) $\left(\frac{4}{5}\right)^2 =$	b) $\left(\frac{2}{3}\right)^4 =$	c) $\left(-\frac{2}{5}\right)^2 =$
d) $\left(-\frac{3}{2}\right)^3 =$	e) $\left(\frac{7}{12}\right)^0 =$	f) $\left(\frac{5}{7}\right)^1 =$
g) $\left(-\frac{1}{4}\right)^3 =$	h) $\left(-\frac{1}{4}\right)^4 =$	i) $-\left(\frac{3}{5}\right)^2 =$

**Ejercicio 10º**

Escribe estas expresiones en forma de una sola potencia:

$$\begin{array}{lll}
 a) \left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^5 = & b) \left(-\frac{1}{5}\right)^7 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) \cdot \left(-\frac{1}{5}\right)^3 = & c) \left(\frac{4}{7}\right)^8 : \left(\frac{4}{7}\right)^5 = \\
 d) \left(\frac{10}{12}\right)^{10} : \left(\frac{10}{12}\right)^7 = & e) \left[\left(\frac{1}{5}\right)^3\right]^4 = & f) \left[\left(\frac{2}{3}\right)^2\right]^5 =
 \end{array}$$

g) Escríbelo en forma de una sola potencia y CALCULA:

$$\left[\left(\frac{2}{7}\right)^5 \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^3\right] : \left(\frac{2}{7}\right)^6 =$$

**8º Raíz cuadrada de un número racional**

La raíz cuadrada de una fracción es otra fracción que tiene por numerador y denominador las raíces cuadradas de la primera.

$$\text{Ejemplo: } \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{25}} = \frac{4}{5}$$

Habrán situaciones en que sea conveniente encontrar la fracción irreducible por ejemplo:

$$\sqrt{\frac{24}{54}} = \sqrt{\frac{12}{27}} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3}$$

**Ejercicio 11º**

Calcula:

$$\begin{array}{llll}
 a) \sqrt{\frac{9}{49}} = & b) \sqrt{\frac{25}{64}} = & c) \sqrt{\frac{144}{121}} = & d) \sqrt{\frac{3^2}{5^2}} = \\
 e) \sqrt{\frac{18}{20}} = & f) \sqrt{\frac{27}{75}} = & g) \sqrt{\frac{2^4}{5^2}} = & h) \sqrt{3} \cdot \sqrt{\frac{4}{3}} =
 \end{array}$$

**Ejercicio 12º****PROBLEMAS**

1º Antonio tiene que pintar las paredes del taller y lo hace en 5 días de la manera siguiente: el lunes pinta  $\frac{1}{5}$  del taller; el martes  $\frac{1}{10}$ ; el miércoles  $\frac{3}{20}$ ; el jueves  $\frac{2}{15}$ ; el viernes  $\frac{4}{12}$ .

- ¿Ha terminado de pintarlo?
- En caso negativo, ¿cuánto le falta?

2º Juan tiene ahorrados 750 euros. ¿Cuánto dinero le queda después de gastarse  $\frac{2}{3}$  de sus ahorros y prestarle a su amigo Pedro la mitad de lo que le sobró?

3º En el frigorífico hay una botella de leche de 1 litro. Mi hermana Lucía toma  $\frac{1}{4}$  mi hermano Enrique  $\frac{1}{2}$ . ¿Qué cantidad en forma de fracción me quedará a mí?

4º Tengo un tetrabric de 2 litros de zumo de naranja. Mi hermano ha tomado los  $\frac{3}{4}$  del total.

- ¿Qué fracción quedará para mí?
- ¿Qué cantidad expresada en litros ha tomado mi hermano?
- ¿Qué cantidad en litros quedará para mí?

5º Daniel gasta en fotocopias  $\frac{1}{5}$  del dinero con el que salió de casa esta mañana. Después emplea en almorzar  $\frac{1}{8}$  de lo que le queda. Si regresa a casa con 14 €. ¿Cuánto dinero tenía al salir?

6º El miércoles pasado acudieron a clase  $\frac{4}{5}$  de los 25 alumnos de 2º. ¿Cuántos faltaron a clase?

7º Félix reparte entre sus cuatro compañeros 48 rotuladores para colorear un mural de Ciencias Naturales. Su amigo Jesús recibe la tercera parte; Carlos la sexta parte; Pedro la octava parte y Maite 2 rotuladores menos que Jesús.

- ¿Cuántos rotuladores le tocan a cada uno?
- ¿Se queda Félix con alguno?

8º Un campesino quiere plantar 200 árboles en trozo de terrero y lo hace de la siguiente forma:  $\frac{2}{5}$  son naranjos,  $\frac{1}{10}$  son almendros,  $\frac{1}{4}$  son limoneros y el resto son higueras.

- Calcula que número de árboles de cada clase.
- Calcula la fracción que le corresponde a las higueras.

9º Tengo 50 euros y le dejo a Emilio  $\frac{4}{5}$ . ¿Cuántos euros me quedarán?