

MATEMÁTICAS

Nivel 2º E.S.O.

Tema 2º NÚMEROS ENTEROS

Conocimientos que puedes adquirir:

1. El conjunto de números enteros:
 - a) Positivos, negativos y el cero.
 - b) Representación gráfica.
 - c) Valor absoluto.
 - d) Número opuesto.
 - e) Orden en los enteros.

2. Suma de números enteros:
 - a) Con el mismo signo.
 - b) Con distinto signo.
 - c) Propiedades de la suma.

3. Multiplicación de números enteros:
 - d) Con el mismo signo.
 - e) Con distinto signo.
 - f) Propiedades del producto.

4. Resta de números enteros.

5. División exacta de números enteros.

6. Operaciones combinadas. Regla de prioridades.

7. Potencia de números enteros con exponente natural.

8. Operaciones con potencias de base entera y exponente natural.

9. Raíz cuadrada de números enteros.

1. El conjunto de los números enterosa) Positivos, negativos y el cero.

Representa con números algunas de las situaciones siguientes:

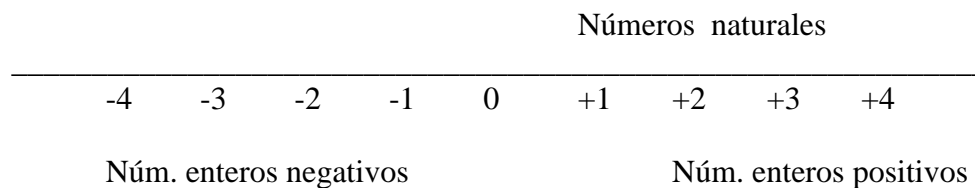
Arriba - Abajo.
 Adelanto - Atraso.
 Tengo - Debo.
 Antes - Después
 Sobre cero - Bajo cero

Subo 15 metros :
 Bajo 3 pisos :
 Adelanto 25 metros :
 Atraso 2 metros :
 Tengo 15 □ :
 Debo 5 □ :

El conjunto de números enteros está formado por **positivos, negativos y el cero.**

El conjunto de números enteros se representa por la letra **Z**.

$$Z = \{ \dots -5, -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, +5 \dots \}$$

b) Representación gráficac) Valor absoluto

El valor absoluto de un número entero corresponde al número entero sin el signo.

Ejemplo: $|-2| = 2$; $|+5| = 5$

Recuerda: El número indica la distancia que hay hasta el cero y el signo indica el sentido.

d) Números enteros opuestos

Observa el +5 y -5

- Están a la misma distancia del cero.
- Son simétricos respecto al cero.
- Tienen el mismo valor absoluto.

Ejemplo: Opuesto (-6) = +6; Op(+7) = -7

e) Orden en los números enteros:

- En la representación gráfica sobre una recta el mayor de dos números está siempre a la derecha.
- Cualquier número negativo es menor que cualquier número entero positivo.
- El 0 es mayor que cualquier negativo y menor que cualquier positivo.

Ejercicio 1º

Utiliza números enteros para describir las siguientes frases:

- a) Paco vuela a 10.200 m sobre el nivel del mar :
- b) Emilio bucea a 12 m. de profundidad :
- c) Patricia tiene 15 □ :
- d) Pepe debe 20 □ :
- e) M^a Belén baja 3 pisos :
- f) Cristina sube 12 pisos :
- g) Alicante tiene una temperatura de 22° C sobre cero :
- h) El invierno pasado en Albacete se ha registrado 7° C bajo cero:

Ejercicio 2º

Representa gráficamente : -2, +5, -3, +3, -5, -8, +7.

Ejercicio 3º

- a) Escribe los números enteros que siendo mayores que -8, sean menores que +5.
- b) Escribe los números enteros que hay entre -12 y +12.
- c) ¿Cuántos números enteros hay entre el -15 y -14?

Ejercicio 4º

Escribe el valor absoluto de: -5, +10, -27, +3, -120, +150.

Ejercicio 5º

Encuentra los números opuestos a: -5, +7, -20, -1, +300, +8.

Ejercicio 6º

- a) Ordena de mayor a menor: -10, 0, -9, +34, -1, +10, +11, -3, +6.
- b) Ordena de menor a mayor: -3, +5, -12, +15, 0, -33, +45, -7, -120.

2º Suma de números enterosa) Con el mismo signo, (mismo sentido):Para sumar números enteros con el **mismo signo**, se **suman** sus valores absolutos y se coloca el signo que tenían.Ejemplo: $(+2) + (+10) = +12$; $(-7) + (-2) = -9$ b) Con distinto signo, (distinto sentido):Para sumar números enteros de **distinto signo** se **restan** sus valores absolutos y se pone el signo del número que tenga el mayor valor absoluto.Ejemplo: $(-5) + (+6) = +1$; $(-8) + (+3) = -5$ **Ejercicio 7º** Calcula las siguientes SUMAS:

a) Sumandos con el mismo signo:

- | | |
|----------------------------|-----------------------------|
| a) $(+2) + (+12) =$ | k) $(-32) + (-1) + (-12) =$ |
| b) $(-7) + (-5) =$ | l) $(+19) + (+21) + (+5) =$ |
| c) $(-1) + (-21) =$ | m) $(-3) + (-8) + (-12) =$ |
| d) $0 + (-6) =$ | n) $(-7) + (-12) + (-21) =$ |
| e) $(+25) + (+20) =$ | ñ) $(+3) + (+7) + (+12) =$ |
| f) $(+3) + (+6) =$ | o) $(-8) + (-2) + (-5) =$ |
| g) $(-8) + (-6) =$ | p) $(-12) + (-6) + (-8) =$ |
| h) $(+18) + (+2) =$ | q) $(+12) + (+5) + (+10) =$ |
| i) $(+3) + (+6) + (+5) =$ | r) $(-5) + (-7) + (-12) =$ |
| j) $(-2) + (-5) + (-10) =$ | s) $(+8) + (+7) + (+3) =$ |

Ejercicio 8º

b) Sumandos con distinto signo:

- | | |
|-----------------------|-----------------------------|
| a) $(+7) + (-2) =$ | k) $(-8) + (+5) =$ |
| b) $(+5) + (-1) =$ | l) $(+18) + (-20) =$ |
| c) $(-6) + (+12) =$ | m) $(+3) + (-7) =$ |
| d) $(-3) + (-15) =$ | n) $(+7) + (-12) =$ |
| e) $(-8) + (+10) =$ | ñ) $(+1) + (-5) =$ |
| f) $(+25) + (-5) =$ | o) $(+1) + (-12) =$ |
| g) $(+100) + (-75) =$ | p) $(-12) + (+3) =$ |
| h) $(-25) + (+100) =$ | q) $(-150) + (+25) =$ |
| i) $(+12) + (-15) =$ | r) $(-28) + (-12) + (+4) =$ |
| j) $(+2) + (-7) =$ | s) $(+8) + (-12) + (+1) =$ |

Observa que los números enteros positivos y el cero coinciden con los números naturales, por lo tanto podemos escribirlo con paréntesis o sin él, con el signo (+) o sin el signo.

Ejemplo: $(+5) + (-7) + (+3) = 5 + (-7) + 3$

Ejercicio 9º

Calcula las siguientes sumas teniendo en cuenta esta norma:

- | | |
|---------------------|---------------------------|
| a) $5 + (-8) =$ | n) $(-7) + 1 =$ |
| b) $-4 + (-2) =$ | ñ) $205 + (-205) =$ |
| c) $(+3) + (-7) =$ | o) $(-2) + 9 =$ |
| d) $(-5) + 9 =$ | p) $(-5) + 0 =$ |
| e) $(-3) + (+8) =$ | q) $4 + 7 =$ |
| f) $(-8) + (-4) =$ | r) $(-1) + 56 =$ |
| g) $0 + (-2) =$ | s) $(-3) + (-3) =$ |
| h) $(-3) + (-15) =$ | t) $5 + (-3) + (-5) =$ |
| i) $-2 + 10 =$ | u) $2 + 5 + (-9) =$ |
| j) $14 + (-12) =$ | v) $(-15) + (-20) + 45 =$ |
| k) $6 + (-1) =$ | x) $-1 + (-3) + 5 =$ |
| l) $(-12) + 7 =$ | y) $-9 + (-2) + (-7) =$ |
| m) $16 + (-16) =$ | z) $(-12) + 8 + (-6) =$ |

Ejercicio 10º Resuelve los siguientes problemas:

- a) Pitágoras fue un famoso matemático griego de la Antigüedad que nació en el año 582 a.C. y vivió 82 años. ¿En qué año murió?
- b) El termómetro marca 6°C bajo cero y baja 7°C . ¿Qué temperatura hace ahora?
- c) Antonio tiene 25 € y **deba 30 €**. ¿Qué dinero tiene actualmente?
- d) Alba sube 4 escalones y baja 3 escalones. ¿En qué escalón se encuentra?
- e) Un ascensor está en el 3^{er} piso, sube 5 pisos y después baja 9 pisos. ¿En qué planta se encuentra?
- f) Arquímedes nació en el año 287 a.C. y vivió 75 años. ¿En qué año murió?
- g) Hemos tomado la temperatura de San Juan durante el primer día de abril y son las siguientes: Por la mañana habían 9°C , al medio día subió 6°C y por la noche bajó 10°C . ¿Cuál es la temperatura actual?
- h) Tengo 5 canicas, como mi gran tesoro, en el patio del instituto me encuentro 6 canicas. Me pongo a jugar y pierdo 7, en la segunda jugada gano 2, en la tercera partida gano 3, en la cuarta pierdo 6. Me asusto y dejo de jugar, ¿con cuántas canicas me voy a casa?

c) Propiedades de la suma de números enteros**Prop. CONMUTATIVA:**

El orden de los sumandos no altera el resultado.

Ejemplo: $(+3) + (-8) = -5$
 $(-8) + (+3) = -5$

Prop. ASOCIATIVA :

Podemos agrupar los sumandos como queramos, el resultado es el mismo.

Ejemplo:

$$(+6) + (-2) + (+3) = [(+6) + (-2)] + (+3) = [(-2) + (+3)] + (+6) =$$

Prop. ELEMENTO NEUTRO:

El 0 es el elemento neutro de la suma, al sumarlo a cualquier número entero, el resultado no cambia.

Ejemplo: $(+7) + 0 = 7;$ $0 + (-6) = -6$

Prop. ELEMENTO OPUESTO:

Todo número entero tiene su opuesto.
 Si sumamos dos números opuestos da 0

Ejemplo: $(+12) + (-12) = 0$

3º Multiplicación de números enteros.a) Con el mismo signo:

Se multiplican los valores absolutos y al resultado se le pone el signo (+).

Ejemplo: $(+6) \cdot (+8) = +48$
 $(-3) \cdot (-5) = +15$

b) Con distinto signo:

Se multiplican los valores absolutos y al resultado se le pone el signo (-).

Ejemplo: $(+4) \cdot (-5) = -5$
 $(-10) \cdot (+4) = -40$

Regla de los signos: $+ \cdot + = +$ $+ \cdot - = -$
 $- \cdot - = +$ $- \cdot + = -$

Ejercicio 11º

Calcula las siguientes multiplicaciones (**mismo signo**):

- | | | | |
|----|-----------------------|----|----------------------|
| a) | $(+4) \cdot (+8) =$ | e) | $(-7) \cdot (-11) =$ |
| b) | $(+3) \cdot (+12) =$ | f) | $(-1) \cdot (-29) =$ |
| c) | $(-12) \cdot (-10) =$ | g) | $(+11) \cdot (+6) =$ |
| d) | $(-6) \cdot (-12) =$ | h) | $(+5) \cdot (+25) =$ |

Ejercicio 12º

Calcula las siguientes multiplicaciones (**distinto signo**):

- | | | | |
|----|-----------------------|----|-----------------------------------|
| a) | $(+2) \cdot (-7) =$ | i) | $(-1) \cdot (+3) =$ |
| b) | $(-9) \cdot (+5) =$ | j) | $- (+3) =$ |
| c) | $(+14) \cdot (-6) =$ | k) | $(-1) \cdot (-8) =$ |
| d) | $(+36) \cdot (-12) =$ | l) | $- (-8) =$ |
| e) | $(-5) \cdot (-11) =$ | m) | $(-1) \cdot (+5) \cdot (+10) =$ |
| f) | $5 \cdot (-12) =$ | n) | $- (+5) \cdot (-11) \cdot (-2) =$ |
| g) | $(-7) \cdot 14 =$ | ñ) | $- (-2) \cdot (+9) \cdot (-5) =$ |
| h) | $(+8) \cdot (-4) =$ | o) | $- (+8) \cdot (-4) \cdot (+5) =$ |

4º Restas de números enteros**Ejercicio 13º**

Calcula las siguientes RESTAS de números enteros (simplificando):

- | | | | |
|----|-------------------|----|-------------------------|
| a) | $- (+7) =$ | k) | $- 5 - (+6) =$ |
| b) | $- (-12 + 3) =$ | l) | $- 13 - (-12) =$ |
| c) | $(+6) - (+3) =$ | m) | $- 13 - (+12) =$ |
| d) | $12 - (+9) =$ | n) | $25 - (-20 + 10) =$ |
| e) | $7 - (-2) =$ | ñ) | $16 - (+20) =$ |
| f) | $15 - (-7) =$ | o) | $- 19 - (+4) - (+10) =$ |
| g) | $(+8) - (-6) =$ | p) | $- 21 - (+12) - (-3) =$ |
| h) | $(-3) - (+4) =$ | q) | $9 - (-3) - (+12) =$ |
| i) | $(-5) - (-7) =$ | r) | $- (-7) - (+11) - 5 =$ |
| j) | $(-10) - (-10) =$ | s) | $(-3) - 9 - (-10) =$ |

Ejercicio 14º (Ampliación)

Calcula (simplificando previamente):

- | | |
|-----------|--------------------------------------|
| a) | $- (+5 - 2) =$ |
| b) | $- (- 2 + 4 - 9) - (- 5 + 6) =$ |
| c) | $- 6 + (- 3 + 1 - 8) - (- 10) =$ |
| d) | $(-5) - (+4) + (-6) - (-8) =$ |
| e) | $- (-3) + (-2+7) - (+4-5) =$ |
| f) | $- 2 + 5 - 7 - 1 + 6 + 3 - 9 =$ |
| g) | $12 - (+4 -6) - (-5 +3) - 12 =$ |
| h) | $- (- (-5)) + (- (+3)) - (- (+8)) =$ |

c) Propiedades de la multiplicación de números enteros

Prop. CONMUTATIVA:

El orden de los factores no cambia el producto.

$$\text{Ejemplo: } (+3) \cdot (-7) = -21$$

$$(-7) \cdot (+3) = -21$$

Prop. ASOCIATIVA:

Los factores se pueden agrupar de diferentes formas sin que cambie el resultado.

$$\text{Ejemplo: } (+6) \cdot (-2) \cdot (+5) = [(+6) \cdot (-2)] \cdot (+5) = (+6) \cdot [(-2) \cdot (+5)] =$$

Prop. ELEMENTO IDENTIDAD:

El elemento identidad es el 1. Al multiplicarlo por un número el resultado no cambia.

$$\text{Ejemplo: } 1 \cdot (-8) = -8$$

Prop. DISTRIBUTIVA:

El producto de un número por una suma es igual a la suma de los productos de dicho número por los sumandos.

$$\text{Ejemplo: } (+4) \cdot [(-3) + (+5)] = (+4) \cdot (-3) + (+4) \cdot (+5) = (-12) + (+20) =$$

5º División de números enteros

Para dividir dos números enteros, se dividen sus valores absolutos y se utiliza la misma regla de los signos que para multiplicar.

$$\text{Ejemplo: } (+15) : (+3) = +5$$

$$(-20) : (-2) = +10$$

$$(+25) : (-5) = -5$$

$$(-30) : (+10) = -3$$

Ejercicio 15º

Resuelve las siguientes divisiones:

a) $(+12) : (+2) =$

b) $(-15) : (-3) =$

c) $(+12) : (-6) =$

d) $(-10) : (+5) =$

e) $(+30) : (-6) =$

f) $(-100) : (-100) =$

g) $(+5) : (-1) =$

h) $(+35) : (-7) =$

i) $[(-12) : (+6)] \cdot (-5) =$

j) $[(+20) : (+5)] \cdot (-10) =$

k) $[(-15) : (+3)] \cdot (+4) =$

l) $[(-30) : (+6)] \cdot (-50) =$

6º Operaciones combinadas

Ejemplo: $30 + (-12) + 60 + (-45)$

Esta expresión se puede resolver de dos formas:

a) Operando de izquierda a derecha, (antes simplificamos quitando los paréntesis):

$$30 + (-12) + 60 + (-45) = 30 - 12 + 60 - 45 = 18 + 60 - 45 = 78 - 45 = 33$$

b) Sumando los positivos y los negativos por separado:

$$30 + (-12) + 60 + (-45) = 30 - 12 + 60 - 45 = (30 + 60) + (-12 - 45) = 90 + (-57) = 33$$

Reglas de prioridad

- 1º Se calculan los paréntesis y corchetes de dentro hacia fuera.
 2º Se calculan las multiplicaciones y las divisiones.
 3º Se calculan las sumas y restas.

Resuelve el siguiente ejemplo:

Ejemplo: $[60:(-10) + 4] \cdot 5 + 15:[20 - (12 + 5)] =$

Ejercicio 16º

Calcula las siguientes expresiones siguiendo las normas de prioridad.

- | | |
|---|------------------------------------|
| a) $[(+6) + (-2) + (-5)] \cdot (-10) =$ | g) $[(+20) : (-5)] \cdot (-10) =$ |
| b) $-5 - [-(12 + (-12))] =$ | h) $-[17 - (-3 + 4)] =$ |
| c) $-(15 + 8 - 9) =$ | i) $2 - 5 \cdot (8 - 5) \cdot 2 =$ |
| d) $(+8) \cdot (-3) + (-6) \cdot (+5) =$ | j) $(2-5) \cdot (8-5) \cdot 2 =$ |
| e) $5 - 4 \cdot [(-5) \cdot (-2) - 4] =$ | k) $20 : (-5) - 1 =$ |
| f) $17 - (4 \cdot 8 - 3 \cdot 5) =$ | l) $35 : (-7) - (-28) : (-4) =$ |
| *m) $(8 - 12 + 3) - [-5 + (11 - 13 + 4)] =$ | |
| *n) $-[-(-1 + 3 - 7) + 14 - (-7 + 6 - 9)] - 12 =$ | |

7º Potencia de números enterosa) Potencias de base positiva:**Las potencias de base positiva siempre son **positivas**.**

Ejemplo: $(+3)^2 = (+3) \cdot (+3) = 9$
 $(+3)^3 = (+3) \cdot (+3) \cdot (+3) = 27$

b) Potencias de base negativa y exponente par:**Las potencias de base negativa y exponente par son **positivas**.**

Ejemplo: $(-4)^2 = (-4) \cdot (-4) = 16$
 $(-5)^2 = (-5) \cdot (-5) = 25$

c) Potencias de base negativa y exponente impar:**Las potencias de base negativa y exponente impar son **negativas**.**

Ejemplo: $(-5)^3 = (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) = -125$
 $(-2)^5 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -32$

Ejercicio 17º

Calcular el valor de las siguientes potencias:

a) $(+2)^3 =$	f) $-4^2 =$	k) $(+10)^3 =$
b) $(-3)^4 =$	g) $(-3)^3 =$	l) $(-5)^4 =$
c) $(+5)^3 =$	h) $(-1)^6 =$	m) $(-1)^5 =$
d) $4^2 =$	i) $-3^2 =$	n) $(-10)^4 =$
e) $(-4)^2 =$	j) $(-3)^2 =$	ñ) $-5^3 =$

8º Operaciones con potenciasa) Potencias con la misma base**MULTIPLICACIÓN:** Para multiplicar potencias con la misma base, **se suman** los exponentes y se deja la misma base.

Ejemplo: $(-3)^2 \cdot (-3) \cdot (-3)^4 = (-3)^{2+1+4=7} = (-3)^7$

DIVISIÓN: Para dividir potencias con la misma base, **se restan** los exponentes y se deja la misma base.

Ejemplo: $(+10)^8 : (+10)^6 = (+10)^{8-6=2} = (+10)^2$

POTENCIA DE OTRA POTENCIA: Se multiplican los exponentes y se deja la misma base.

Ejemplo: $((-3)^2)^3 = (-3)^{2 \cdot 3} = (-3)^6$

b) Potencias con distinta base:

POTENCIA DE UN PRODUCTO: (Hay dos formas)

1ª Se multiplican los factores y después se calcula la potencia:

Ejemplo: $[(-3) \cdot (+5)]^2 = (-15)^2 = 225$

2ª Se halla la potencia de cada factor y después se multiplica:

Ejemplo: $[(-3) \cdot (+5)]^2 = (-3)^2 \cdot (+5)^2 = 9 \cdot 25 = 225$

POTENCIA DE UN COCIENTE: (Hay dos formas)

1ª Se divide el dividendo por el divisor y después se halla la potencia:

Ejemplo: $[(-12) : (+3)]^3 = (-4)^3 = -64$

2ª Se calcula la potencia del dividendo y del divisor y después se divide:

Ejemplo: $[(-12) : (+3)]^3 = (-12)^3 : (+3)^3 = (-1.728) : (+27) = -64$

Ejercicio 18º

Escribe en forma de una sola potencia y **CALCULA:**

a) $(-2)^4 \cdot (-2)^3 =$

b) $(-1)^3 \cdot (-1)^6 \cdot (-1)^2 =$

c) $(-4)^{12} : (-4)^9 =$

d) $(-6)^8 : (-6)^8 =$

e) $[(-3)^2]^3 =$

f) $2^2 \cdot 9^2 \cdot 5^2 =$

g) $4^3 \cdot (-2)^3 =$

h) $(-30)^4 : 10^4 =$

i) $[(-15)^4 : 5^4]^2 =$

j) $5^2 \cdot (-2)^2 =$

k) $50^5 : (-25)^5 =$

l) $4^3 \cdot 5^3 =$

9º Raíz cuadrada de un número entero

¿Recuerdas cómo se obtienen los cuadrados perfectos de los números naturales?

¿Sabrías encontrar los cuadrados perfectos de los números enteros?

$$\begin{aligned} (+2)^2 &= 4 \\ (-2)^2 &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (+5)^2 &= 25 \\ (-5)^2 &= 25 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (+7)^2 &= 49 \\ (-7)^2 &= 49 \end{aligned}$$

Las raíces cuadradas exactas tienen 2 soluciones, una positiva y la otra negativa, de forma que:

$$\sqrt{4} = 2$$

$$\sqrt{25} = 5$$

$$\sqrt{49} = 7$$

$$-\sqrt{4} = -2$$

$$-\sqrt{25} = -5$$

$$-\sqrt{49} = -7$$

¿Tienen solución las raíces cuadradas de números enteros negativos? _____

$\sqrt{-4} = \rightarrow$ NO hay ningún número que al elevarlo al CUADRADO nos dé negativo.

Observa: $(-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = (-2)^3 = -8$

$$\sqrt[3]{-8} = -2$$

$$(-5) \cdot (-5) \cdot (-5) = (-5)^3 = -125$$

$$\sqrt[3]{-125} = -5$$

Ejercicio 19º

Calcula:

a) $\sqrt{144} =$

d) $\sqrt{121} =$

g) $\sqrt[3]{-125} =$

b) $\sqrt{64} =$

e) $\sqrt{4^2} =$

h) $\sqrt[3]{-27} =$

c) $\sqrt{-25} =$

f) $\sqrt[3]{125} =$

i) $\sqrt[3]{5^3} =$