

Identifikacija mase in upogibne togosti elastičnih nosilcev na osnovi spremembe lastnih frekvenc z metodo dodatne mase

Elastični odziv vitkih nosilcev

Vitki nosilci so sicer enostavne, vendar pogoste inženirske konstrukcije. Vrednosti lastnih frekvenc nosilcev z enakomerno porazdeljeno maso in konstantno upogibno togostjo se lahko izrazijo v analitični obliki z rešitvijo diferencialne enačbe gibanja. Če se tako opazuje elementarni primer, ki zanemara prečne sile, dušenje ter vpliv osnih sil, se rešitev za lastno prečno nihanje nosilca dobi z rešitvijo diferencialne enačbe nihanje Bernoulli-Eulerjeva nosilca, zapisane v obliki:

$$m \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) = 0 \quad (1)$$

kjer so:

- m - masa na enoto dolžine, funkcija koordinate x ,
- EI - upogibna togost, funkcija koordinate x ,
- v - prečni pomik, funkcija koordinate x in časa t .

Rešitev enačbe (1) se predpostavi v obliki produkta dveh funkcij:

$$v(x, t) = w(x) \cdot Y(t) \quad (2)$$

Vstavitev enačbe (2) v (1) vodi do:

$$w(x) \cdot m \cdot \frac{\partial^2 Y(t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \cdot \frac{\partial^2 w(x)}{\partial x^2} \right) \cdot Y(t) = 0 \quad (3)$$

Za homogen nosilec konstantnega prečnega prereza se zadnja enačba poenostavi v:

$$w(x) \cdot m \cdot \ddot{Y}(t) + EI \cdot \frac{\partial^4 w(x)}{\partial x^4} \cdot Y(t) = 0 \quad (4)$$

in se zapiše kot:

$$\frac{\ddot{Y}(t)}{Y(t)} + \frac{EI \cdot \frac{\partial^4 w(x)}{\partial x^4}}{w(x) \cdot m} = 0 \quad (5)$$

$$-\frac{\ddot{Y}(t)}{Y(t)} = \frac{EI \cdot \frac{\partial^4 w(x)}{\partial x^4}}{w(x) \cdot m} \quad (6)$$

Zadnji pogoj zahteva, da sta obe strani enaki konstanti, npr. ω^2 :

$$\frac{\ddot{Y}(t)}{Y(t)} = -\omega^2 \quad (7)$$

$$\frac{EI \cdot \frac{\partial^4 w(x)}{\partial x^2}}{w(x) \cdot m} = \omega^2 \quad (8)$$

Parcialna diferencialna enačba (1) se tako transformira v dve navadni linearni diferencialni enačbi (koordinate x in časa t) (7) in (8), katerih rešitvi sta funkciji $w(x)$ in $Y(t)$

$$\ddot{Y}(t) + \omega^2 = Y(t) \quad (9)$$

$$\frac{\partial^4 w(x)}{\partial x^2} - \frac{\omega^2 \cdot m}{EI} \cdot w(x) = 0 \quad (10)$$

Z vpeljavo okrajšave

$$b^4 = \frac{\omega^2 \cdot m}{EI} \quad (11)$$

se diferencialna enačba (10) lahko zapiše kot:

$$\frac{\partial^4 w(x)}{\partial x^2} - b^4 \cdot w(x) = 0 \quad (12)$$

Njena rešitev je:

$$w(x) = A_1 \cdot \sin(b \cdot x) + A_2 \cdot \cos(b \cdot x) + A_3 \cdot \sinh(b \cdot x) + A_4 \cdot \cosh(b \cdot x) \quad (13)$$

Da se lahko določijo lastne frekvence ω opazovane konstrukcije, je v enačbo (13) potrebno vpeljati dejanske robne pogoje opazovane konstrukcije, kar običajno prevede rešitev v iskanje sistema štirih homogenih linearnih enačb. Sistem ima netrivialno oz. neničelno rešitev, če je determinanta sistema enačb, ki predstavlja karakteristično enačbo, enaka nič. Splošni izraz za n -to krožno frekvenco ω_n^0 opazovanega nosilca z enakomerno maso ima tako obliko:

$$\omega_n^0 = \frac{\chi_n \cdot \pi^2}{L^2} \cdot \sqrt{\frac{EI}{m}} \quad n=1,2,\dots, \infty \quad (14)$$

kjer so χ_n konstante, odvisne od dejanskih robnih pogojev in L je razpon nosilca. Lastne frekvence so tako funkcije L , EI in m .

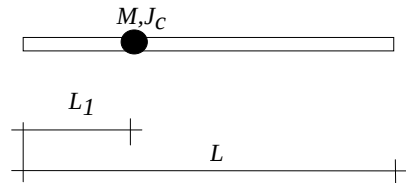
Predpostavimo sedaj, da so nekatere lastne frekvence nekega nosilca znane oz. izmerjene in da je potrebno identificirati upogibno togost EI in m . Če se dalje predpostavi, da se dolžina L zlahka in dovolj natančno izmeri na opazovani konstrukciji, se iz enačbe (14) lahko za vsako frekvenco ω_n^0 pridobi zgolj razmerje med upogibno togostjo EI in maso m :

$$\frac{EI}{m} = \left(\frac{\omega_n^0 \cdot L^2}{\chi_n \cdot \pi^2} \right)^2 \quad (15)$$

kjer pa ločenih vrednosti za EI in m ni mogoče pridobiti, ne glede na to, koliko lastnih frekvenc je znanih. Večje število lastnih frekvenc tako s povprečenjem rezultatov zgolj vpliva na natančnost in tako je za rešitev problema potrebna dodatna enačba, ki se pridobi iz konstrukcije s kontrolirano spremembo.

Taka enačba se lahko npr. pridobi iz enačbe gibanja opazovane konstrukcije z znano dodatno maso M na izbrani lokaciji.

Enačba gibanja za nosilec z dodano maso



Nosilec z dodano maso

Opazujmo elastični, homogeni nosilec z dodano maso M (z vztrajnostnim momentom J_c) locirano na znanem mestu, npr. L_1 od začetka nosilca. Proces analize je podoben procesu pri osnovnem sistemu, vendar s to razliko, da masa sedaj razdeli nosilec na dva dela, kar vodi do dveh navadnih diferencialnih enačb koordinate x . Funkciji $w_1(x)$ in $w_2(x)$ tako veljata za del levo in desno od dodatne mase:

$$\begin{aligned} w_1(x) &= A_1 \cdot \sin(b \cdot x) + A_2 \cdot \cos(b \cdot x) + A_3 \cdot \sinh(b \cdot x) + A_4 \cdot \cosh(b \cdot x) \\ w_2(x) &= B_1 \cdot \sin(b \cdot x) + B_2 \cdot \cos(b \cdot x) + B_3 \cdot \sinh(b \cdot x) + B_4 \cdot \cosh(b \cdot x) \end{aligned} \quad (16)$$

kjer je konstanta b ista kot pri enačbi (11), ω pa sedaj predstavlja lastno krožno frekvenco sistema z dodatno maso. Da se sedaj določi vseh osem koeficientov A_i in B_i ($i=1$ do 4), je potrebno uporabiti štiri robne pogoje ter štiri pogoje zveznosti pri lokaciji mase. Za določitev lastnih frekvenc je tako sedaj potrebno rešiti sistem 8 homogenih enačb. Tudi ta sistem ima netrivialno rešitev, če je determinanta sistema, ki predstavlja karakteristično enačbo, enaka nič. Vendar zaradi kompleksnosti problema sedaj analitična rešitev v splošni obliki enačbe (14) ne obstaja več in problem se tako rešuje numerično.

Proces identifikacije

Na osnovni obravnavani konstrukciji se izmeri dolžina L , in konstrukcija se vzbudi, da zaniha. S pomočjo dodanih akcelorometrov ali pa merskih lističev se izmeri odziv v časovno domeni ene ali več primerno izbranih točk. Izmerjeni podatki se transformirajo v frekvenčno domeno, kjer se poskusi analizirati čim več frekvenc. Iz znanega analitičnega izraza za obravnavane robne pogoje nosilca se nato identificira zgolj razmerje med upogibno togostjo EI in maso na enoto dolžine m , toda ločeni vrednosti ostaneta neznani. Identificirane vrednosti razmerja EI/m je mogoče povprečiti, da se dobi zanesljivejša vrednost.

Za pridobitev manjkajoče dodatne enačbe, ki bo omogočila ločitev neznank, se konstrukciji doda znana M z masnim vztrajnostnim momentom J_c , proces meritve dinamičnega odziva in identifikacije lastnih frekvenc pa se ponovi. Za modificirano konstrukcijo se zapiše odgovarjajoči matematični model, ki preko sistema homogenih enačb vodi do karakteristične

enačbe. Razmerje EI/m , ki se sedaj pojavi v karakteristični enačbi gibanja modificiranega sistema se nadomesti z vrednostjo, identificirano na prvotnem sistemu. Koeficient b , ki se pojavi v enačbi (16), in posledično v karakteristični enačbi, je definiran z enačbo (11), in ga je tako mogoče izračunati s pomočjo izmerjene dolžine L , razmerja EI/m , identificiranega na prvotni konstrukciji in lastnih frekvenc ω , izmerjenih na spremenjeni konstrukciji (z dodano maso). Z izmerjenimi lastnimi frekvencami in znano vrednostjo koeficienta b je sedaj mogoče direktno identificirati bodisi m ali EI , manjkajoči podatek pa nato sledi iz najprej identificiranega razmerja EI/m .

Algoritem je tako direkten, saj ne zahteva iteracij, uporaba več mas na različnih lokacijah pa omogoča zanesljivejšo identifikacijo, praktično pa je dovolj že ena sama frekvenca.

Uporaba različnih mas je iz praktičnih razlogov potrebna tudi zato, ker originalna masa konstrukcije ni znana, in tako lahko relativno majhna masa povzroči (pre)majhne spremembe odziva (frekvenc), da jih ni mogoče zanesljivo ločiti od napak meritev.

Čeprav je v nadaljevanju obravnavan zgolj prostoležeči nosilec (podani so izrazi identifikacije, ki so bili tudi uporabljeni za eksperimentalno potrditev rezultatov), je izraze za ostale vrste robnih pogojev mogoče pridobiti na osnovi enakih korakov analize.

Dinamično obnašanje elastičnega prostoležečega nosilca z dodatno maso

Opazujmo prostoležeči nosilec z dodatno maso M in vztrajnostnim momentom J_c , locirano na razdalji L_1 od leve podpore. Za pridobitev informacije o lastni frekvenci takega sistema je na razpolago več pristopov, katerih rezultati se lahko uporabijo tudi za inverzno identifikacijo. Eden izmed najpreprostejših a hkrati tudi dovolj učinkovitih je zagotovo Rayleighov princip, ki omogoči tudi izpeljavo relativno enostavnih analitičnih izrazov za prvo frekvenco. Uspešnost metode je odvisna od izbire oblikovnih funkcij in kot najpreprosteje funkcije se smatrajo statične upogibnice. Za obravnavano konstrukcijo je najbolj očitno mesto za izbiro lokacije dodatne mase na sredini razpona. Za to situacijo se ocena velikosti porazdeljene mase m konstrukcije lahko pridobi tudi iz izraza za izračun prve lastne frekvence prostoležečega nosilca z dodatno maso na sredini razpona, ki ga je podal npr. Low:

$$m = \frac{35 \cdot M \cdot v_1^2 \cdot \pi^2}{\frac{420}{L^3} \cdot \frac{EI}{m} - 17 \cdot v_1^2 \cdot \pi^2} \quad (18)$$

kjer v_1 (Hz) predstavlja prvo lastno frekvenco prostoležečega nosilca z dodatno maso M .

Alternativna oblika oblikovne funkcije je trigonometrična funkcija. Uporaba oblikovne funkcije $v = \sin(\pi x/L)$ za sistem z dodatno maso M na sredini razpona vodi do naslednjega izraza:

$$m = \frac{8 \cdot L^3 \cdot M \cdot v_1^2}{\pi^2 \cdot \frac{EI}{m} - 4 \cdot L^4 \cdot v_1^2} \quad (19)$$

V enačbah (18) in (19) ne nastopa vztrajnostni moment J_c dodatne mase, ker ne vpliva na odziv konstrukcije zaradi njene simetrije. Enačba (19) vodi do boljših rezultatov zaradi primernejše oblikovne funkcije.

Čeprav je mogoče zlahka najti še mnoge druge oblikovne funkcije, ki vodijo do podobnih rešitev, je najbolje narediti analizo diferencialne enačbe nihanja, ker tak pristop omogoča enostavnejšo vpeljavo višjih frekvenc, hkrati pa vodi tudi do najboljših rezultatov. Kot je že omenjeno, je proces analize enak kot pri osnovnem sistemu, vendar s to razliko, da masa razdeli nosilec na dva dela, kar vodi do dveh funkcij: $w_1(x)$ za del levo od dodatne mase in $w_2(x)$ za del desno od dodatne mase (enačba 16).

Osem neznanih koeficientov A_i in B_i ($i=1$ do 4) se določi iz štirih robnih pogojev, ki opisujejo pomika in upogibna momenta na obeh koncih:

$$w_1(0) = 0, \quad w_1''(0) = 0, \quad w_2(L) = 0, \quad w_2''(L) = 0 \quad (20)$$

ter štirih pogojev zveznosti pri lokaciji mase, ki opisujejo kompabilitetne pogoje za pomike, zasuke, upogibne momente in prečne sile:

$$\begin{aligned} w_1(x)|_{x=L_1} &= w_2(x)|_{x=L_1}, & w_1'(x)|_{x=L_1} &= w_2'(x)|_{x=L_1}, \\ EI \cdot \left(w_1''(x)|_{x=L_1} - w_2''(x)|_{x=L_1} \right) - J_c \cdot w_1'(x)|_{x=L_1} \cdot \omega^2 &= 0, \\ EI \cdot \left(w_1'''(x) - w_2'''(x) \right)|_{x=L_1} + M \cdot \omega^2 \cdot w_1(x)|_{x=L_1} &= 0 \end{aligned} \quad (21)$$

Prva dva robna pogoja vodita do enostavne rešitve:

$$A_2 = A_4 = 0 \quad (22)$$

ki jo je smiselno direktno upoštevati. Preostala robna pogoja ter pogoji zveznosti vodijo do sistema homogenih diferencialnih enačb. Tak sistem ima netrivialno rešitev, kadar je determinanta sistema enaka nič. Tako mora biti determinanta naslednje matrike enaka nič:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & s_L & c_L & sh_L & ch_L \\ 0 & 0 & -s_L & -c_L & sh_L & ch_L \\ s_1 & sh_1 & -s_1 & -c_1 & -sh_1 & -ch_1 \\ c_1 & ch_1 & -c_1 & s_1 & -ch_1 & -sh_1 \\ -b_1 \cdot s_1 - J_c \cdot \omega^2 \cdot c_1 & b_1 \cdot sh_1 - J_c \cdot \omega^2 \cdot ch_1 & b_1 \cdot s_1 & b_1 \cdot c_1 & -b_1 \cdot sh_1 & -b_1 \cdot ch_1 \\ M \cdot \omega^2 \cdot s_1 - b_3 \cdot c_1 & b_3 \cdot ch_1 + M \cdot \omega^2 \cdot sh_1 & b_3 \cdot ch_1 & -b_3 \cdot sh_1 & -b_3 \cdot ch_1 & b_3 \cdot sh_1 \end{bmatrix} \quad (23)$$

kjer so simboli

$$\begin{aligned} s_1 &= \sin(b \cdot L_1) & sh_1 &= \sinh(b \cdot L_1) \\ c_1 &= \cos(b \cdot L_1) & ch_1 &= \cosh(b \cdot L_1) \\ s_L &= \sin(b \cdot L) & sh_L &= \sinh(b \cdot L) \\ c_L &= \cos(b \cdot L) & ch_L &= \cosh(b \cdot L) \\ b_1 &= b \cdot EI & b_3 &= b^3 \cdot EI \end{aligned} \quad (24)$$

Determinanta matrike (23) se lahko zapiše v splošni obliki kot:

$$EI^2 \cdot \Delta_1 + EI \cdot \Delta_2 + \Delta_3 \equiv 0, \quad (25)$$

s koeficienti, funkcijami dolžine L , lokacije mase L_1 , mase M in njenega vztrajnostnega momenta J_c , lastne frekvence ω ter koeficienta b :

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= 8 \cdot b^4 \cdot s_L \cdot sh_L \\ \Delta_2 &= 2 \cdot b \cdot M \cdot \omega^2 \cdot (ch_L \cdot s_L - \cosh(b \cdot (L - 2 \cdot L_1))) \cdot s_L + (c_L - \cos(b \cdot (L - 2 \cdot L_1))) \cdot sh_L \\ &\quad + 2 \cdot b^3 \cdot J_c \cdot \omega^2 \cdot (-ch_L \cdot s_L - \cosh(b \cdot (L - 2 \cdot L_1))) \cdot s_L + (c_L + \cos(b \cdot (L - 2 \cdot L_1))) \cdot sh_L \\ \Delta_3 &= M \cdot J_c \cdot \omega^4 \cdot (\cos(b \cdot (L - 2 \cdot L_1))) \cdot ch_L - c_L \cdot \cosh(b \cdot (L - 2 \cdot L_1)) \\ &\quad - M \cdot J_c \cdot \omega^4 \cdot (s_L \cdot sh_L + \sin(b \cdot (L - 2 \cdot L_1))) \cdot \sinh(b \cdot (L - 2 \cdot L_1)) \end{aligned} \quad (26)$$

Očitno je, da v primeru, ko dodatne mase ni, enačba (25) preide v obliko $\Delta_1 \equiv 0$ (saj člena Δ_2 in Δ_3 izgineta), kar pa je standardna enačba za prostoležeče nosilce.

Enačba (25) je dejansko preprosta kvadratna enačba neznanke EI z naslednjima rešitvama:

$$\begin{aligned} EI &= \frac{-\Delta_2 - \sqrt{\Delta_2^2 - 4 \cdot \Delta_1 \cdot \Delta_3}}{2 \cdot \Delta_1} \\ EI &= \frac{-\Delta_2 + \sqrt{\Delta_2^2 - 4 \cdot \Delta_1 \cdot \Delta_3}}{2 \cdot \Delta_1} \end{aligned} \quad (27)$$

Če imata rešitvi enačbe (27) različna predznaka, je jasno, da ima inženirski pomen zgolj pozitivna rešitev. Če pa sta obe rešitvi pozitivni, je potrebno še ugotoviti, katera je korektna. V primeru identifikacije z večjim številom frekvenc si je pri iskanju korektne rešitve mogoče pomagati z višjimi frekvencami, zaplete pa se lahko pri identifikaciji z zgolj prvo frekvenco. Potrebni indikator korektne rešitve se lahko dobi iz enačbe, izpeljane iz karakteristične enačbe brez upoštevanja vztrajnostnega momenta J_c . Enačba (25) se tako reducira v linearno enačbo

$$EI \cdot \bar{\Delta}_1 + \bar{\Delta}_2 \equiv 0 \quad (28)$$

z

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}_1 &= 8 \cdot b^4 \cdot s_L \cdot sh_L \\ \bar{\Delta}_2 &= 2 \cdot b \cdot M \cdot \omega^2 \cdot (ch_L \cdot s_L - \cosh(b \cdot (L - 2 \cdot L_1))) \cdot s_L + (c_L - \cos(b \cdot (L - 2 \cdot L_1))) \cdot sh_L \end{aligned} \quad (29)$$

Enačba (28) ima zgolj eno rešitev

$$EI = -\frac{\bar{\Delta}_2}{\bar{\Delta}_1} = -\frac{M \cdot \omega^2 \cdot (ch_L \cdot s_L - \cosh(b \cdot (L - 2 \cdot L_1))) \cdot s_L + (c_L - \cos(b \cdot (L - 2 \cdot L_1))) \cdot sh_L}{4 \cdot b^3 \cdot s_L \cdot sh_L} \quad (30)$$

Čeprav je preprostejša in s tem manj natančna od enačbe (26), je pomen enačbe (28) in njene rešitve (30) zgolj v dejstvu, da indicira korektno rešitev izmed izrazov (27).

Za nekatere posebne lokacije je mogoče najti celo enostavnejše izraze. Če je dodatna masa locirana na sredini razpona, se vodilna enačba zaradi simetrije konstrukcije reducira na obliko dveh produktov, kar vodi do dveh rešitev:

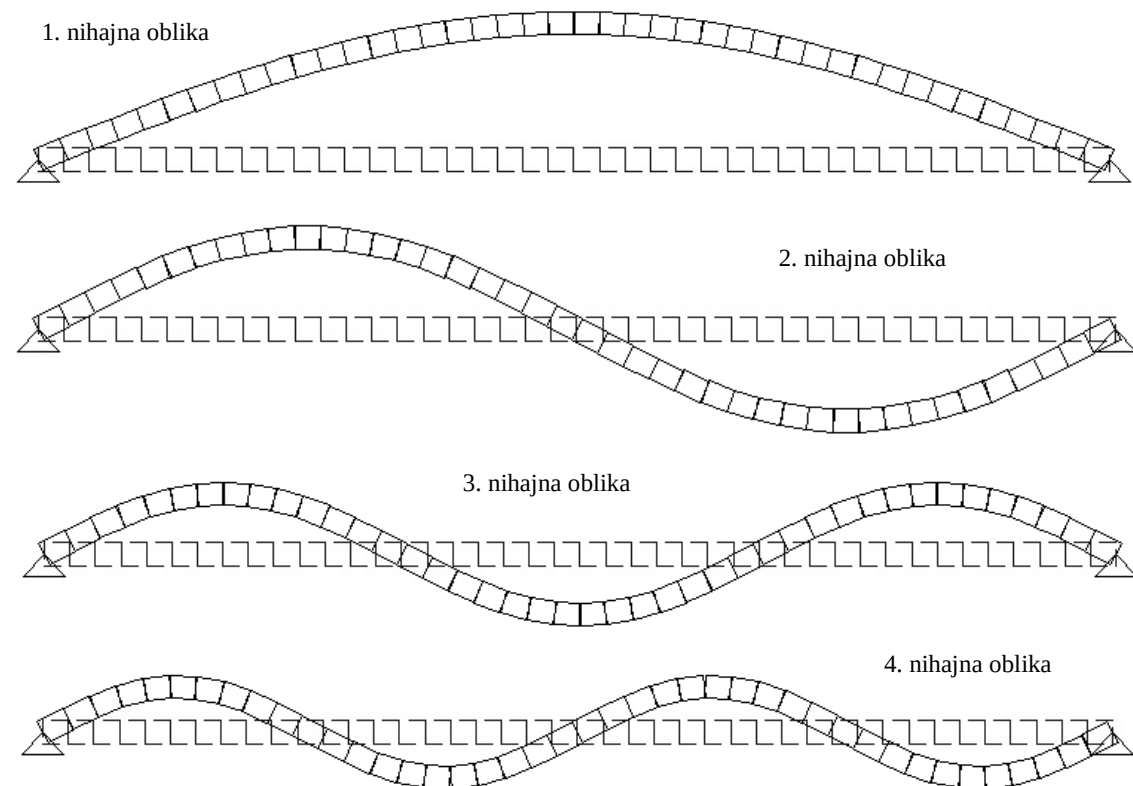
$$EI = M \cdot \omega^2 \cdot \frac{\tan\left(\frac{b \cdot L}{2}\right) - \tanh\left(\frac{b \cdot L}{2}\right)}{4 \cdot b^3} \quad (31)$$

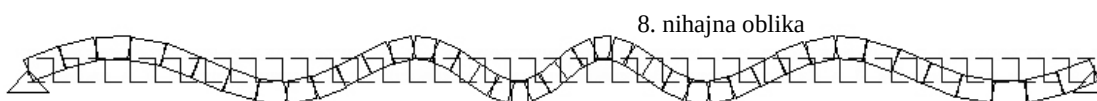
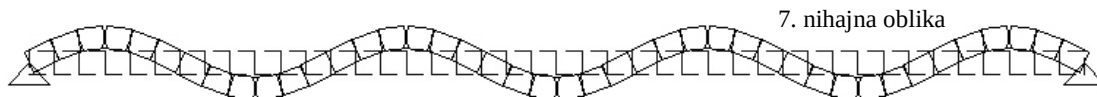
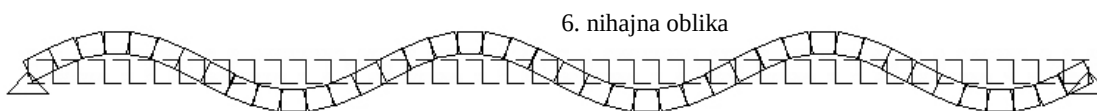
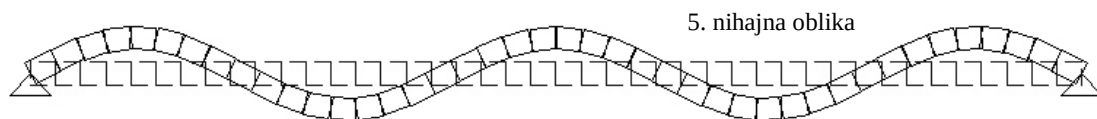
$$EI = J_c \cdot \omega^2 \cdot \frac{\coth\left(\frac{b \cdot L}{2}\right) - \cot\left(\frac{b \cdot L}{2}\right)}{4 \cdot b} \quad (32)$$

Prva enačba je funkcija zgolj vrednosti dodatne mase M , in pripada simetričnim (lihim) nihajnim oblikam in pripadajočim frekvencam. Druga enačba je funkcija zgolj vztrajnostnega momenta J_c in pripada nesimetričnim (sodim) nihajnim oblikam in pripadajočim lastnim frekvencam. Izraza (31) in (32) predstavljata rešitvi, po obliki podobni rešitvama (18) in (19), vendar z mnogo višjo natančnostjo.

Zgled

Dolžina nosilca $L=4.2$ m, prerez $b/h = 10/15$ cm, masa $0.10 \text{ m} \cdot 0.15 \text{ m} \cdot 2500 \text{ kg} = 37.5 \text{ kg}$, $E=32 \text{ GPa}$. Dodatna masa $M=200 \text{ kg}$ (z $J_c=6.66666666 \cdot 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$) je locirana na razdalji 3 m od leve podpore.





Lastne frekvence (izračunane z MKE) so:

Frekvence	osnovni sistem	$\frac{EI}{m} = \left(\frac{\omega_n \cdot L^2}{n^2 \cdot \pi^2} \right)^2$	sistem z dodatno maso M=200 kg ter $J_c=6.66666666 \cdot 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
1	13.7951658635766 Hz	24000.00104050541	12.820750909439 Hz
2	55.1806814391708 Hz	24000.016685001414	50.153975715465 Hz
3	124.156708389841 Hz	24000.084400275657	121.873782592285 Hz
4	220.72387427503 Hz	24000.266451137704	215.961998530973 Hz
5	344.883806299269 Hz	24000.649579554218	318.134797675876 Hz
6	496.639872133206 Hz	24001.344626100577	475.364407713904 Hz
7	675.998120641021 Hz	24002.48597366034	667.783113444883 Hz
8	882.968415431364 Hz	24004.23097843107	837.194605922803 Hz

Identifikacija

	EI [Nm ²]			m [kg]
n	enačbi (27)		enačba (30)	
1	129.398	899016.458	899145.856	37.452
2	862.325	899108.277	899970.603	37.456
3	-22178.332	894408.087	872229.755	37.260
4	-42895.185	895917.716	853022.531	37.323
5	12238.803	898783.911	911022.713	37.443
6	-34834.269	897706.838	862872.568	37.398
7	-663074.463	897444.055	234369.592	37.387
8	-25564.028	899549.263	-181908.009	37.475

Eksperimenti

Za testiranje prikazane procedure se je uporabil 1780 mm dolg jekleni nosilec z modulom elastičnosti $E=2.1 \cdot 10^{11}$ Pa (vrednost, povzeta po literaturi). Masa na enoto dolžine je bila $m=1.72$ kg/m' (merjeni podatek). Prečni prerez je bil votli pravokotnik z zunanjsima dimenzijama 40*20 mm z debelino 2 mm. Vztrajnostni moment prereza je bil $I=1.4216 \cdot 10^{-8}$ m⁴.

Za meritve odziva so se uporabili akcelerometri. Uporaba akcelerometrov za meritve nihanja ima prednosti, kot so enostavna montaža in demontaža, ter visoka intenzivnost, slabost pa je, da akcelerometer doda meritvi tudi svojo maso, kar lahko popači meritev oz. vodi do nižjih lastnih frekvenc. V meritvi uporabljeni akcelerometri (Brüel & Kjær Model 4370 z uporabnim frekvenčnim rangom do 5000 Hz) so imeli 54.2 g in tako se je smatralo, da ne vplivajo na merjeni odziv. Signal iz akcelerometra je bil ojačan z Brüel & Kjær Charge Amplifier 2635 in nato prenesen do analogno digitalne enote Mowlem Microsystems MM700. Od tam je so bili podatki preneseni v PC-a in obdelani s programom Matlab.

Za pridobitev lastnih frekvenc so se uporabile ambientne vibracije ali pa udarna obtežba. Vzbujanje sistema z nenadnim spuščanjem obešene mase se ni izvajalo, ker so bili zadovoljivi rezultati dobljeni brez vzbujanja ali z udarcem. Frekvence vzorčenja so bile med 20 Hz vse do 500 Hz (zaradi tehničnih omejitev opreme), do maksimalno 3200 meritev (zaradi omejenega spomina analogno-digitalne enote za zbiranje podatkov). Tabela 1 predstavlja prve tri zaznane lastne frekvence konstrukcije s pripadajočimi razmerji EI/m , izračunanimi z enačbo (15).

Tabela 1. Prve tri lastne frekvence in pripadajoča razmerja EI/m .

n	v_n [Hz]	$\frac{EI}{m} = \left(\frac{\omega_n \cdot L^2}{n^2 \cdot \pi^2} \right)^2$
1	20.30	1676.611
2	83.98	1793.235
3	184.14	1703.008
povprečje		1724.28

Očitno je, da identificirani rezultati varirajo znotraj ranga $\pm 4\%$ okoli povprečne vrednosti in tako se je vrednost 1724.28 uporabila v nadaljevanju identifikacije. Primerjava z analitično vrednostjo (1758.97) pokaže, da se vrednosti razlikujeta za manj kot 2.0%.

Testi na spremenjeni konstrukciji so se izvedli z dvema dodatnima masama (diska z masama 5 kg in 10 kg ter masnima vztrajnostnima momentoma $J_c=0.010125$ kg·m² in $J_c=0.049$ kg·m²). Da bi se pridobili čim bolj zanesljivi rezultati, je bila vsaka masa dodana na dveh lokacijah (četrtnina in sredina razpona). Identifikacijska procedura se je izvedla dvakrat za vsak par frekvenc: z upoštevanjem masnega vztrajnostnega momenta v analizi (enačbi (27)) ter brez njegovega upoštevanja (enačba (30)). Kot je bilo pričakovano, so bile frekvence sistema z dodatno maso nižje od frekvenc osnovne konstrukcije.

Tabela 2: Identificirane vrednosti porazdeljene mase za $M=5$ kg in $L_1=0.445$ m

n	v_n [Hz]	b	EI [Nm^2]			masa [kg/m']	E [N/m ²]
			enačbi (27)		en. (30)		
1	12.21	1.35921	6.72	2888.92	2874.33	1.67534	$2.00917 \cdot 10^{11}$
2	55.61	2.90073	3229.40	-27.26	3136.19	1.87279	$2.24597 \cdot 10^{11}$
3	168.0	5.04180	-1840.51	10007.42	6157.26	5.80349	$6.95991 \cdot 10^{11}$

Tabela 3: Identificirane vrednosti porazdeljene mase za $M=10$ kg in $L_1=0.445$ m

n	v_n [Hz]	b	EI [Nm^2]			masa [kg/m']	E [N/m ²]
			enačbi (27)		en. (30)		
1	9.668	1.20948	20.11	3083.13	3047.07	1.78797	$2.14424 \cdot 10^{11}$
2	51.195	2.78320	2801.51	-863.12	1701.36	1.62465	$1.94838 \cdot 10^{11}$

Tabela 4: Identificirane vrednosti porazdeljene mase za $M=5$ kg in $L_1=0.89$ m

n	v_n [Hz]	b	EI [Nm^2]			masa [kg/m']	E [N/m ²]
			enačbi (27)		en. (30)		
1	9.760	1.21522	5.69	2840.57	2840.57	1.64730	$1.97554 \cdot 10^{11}$
2	72.00	3.30063	916.40	-8546.58	-8546.58	0.53144	$6.37336 \cdot 10^{10}$
3	162.30	4.95554	365.88	23614.19	23614.19	13.69432	$1.64230 \cdot 10^{12}$

Tabela 5: Identificirane vrednosti porazdeljene mase za $M=10$ kg in $L_1=0.89$ m

n	v_n [Hz]	b	EI [Nm^2]			masa [kg/m']	E [N/m ²]
			enačbi (27)		en. (30)		
1	7.52	1.06669	16.311	3021.18	3021.18	1.75204	$2.10115 \cdot 10^{11}$
2	72.22	3.30568	4540.45	-17053.39	-17053.39	2.63309	$3.15777 \cdot 10^{11}$
3	128.4	4.40772	-140.95	-13.53984	-140.95	-0.00785	$-9.41661 \cdot 10^8$

Iz tabel 2 do 5 je očitno, da vse štiri rešitve, dobljene s prvimi lastnimi frekvencami, ležijo znotraj zadovoljivega ranga, in da rešitve, dobljene z višjimi frekvencami niso uporabne. Razlog za takšne napake je mogoče pripisati dejstvu, da zaradi velikosti dodatnih mas sistem postane zelo podoben sistemu z eno prostostno stopnjo, zaradi česa je bilo praktično nemogoče zaznati višje frekvence iz frekvenčnega spektra (zaradi izrazite dominantnosti prvih frekvenc). Ker pa je bila (zaradi omejitve opreme) tudi najvišja merska frekvenca relativno nizka za meritve višjih lastnih frekvenc (500 Hz), so bile višje frekvence komaj zaznavne.

Zaradi tega se je inverzna identifikacija izvedla zgolj z vrednostmi prvih lastnih frekvenc. Očitno je, da vrednosti, identificirane z uporabo zgolj prvih lastnih frekvenc sistema z dodatno maso, vodijo do sprejemljivih rezultatov v primerjavi z dejansko maso 1.72 kg/m'. Povprečna vrednost identificirane mase na osnovi prvih frekvenc vseh štirih meritev je bila namreč 1.73 kg/m', kar predstavlja dobro ujemanje.

Ob predpostavki, da je identificirana vrednost mase na enoto dolžine enaka 1.73 kg/m , se je pridobila vrednost upogibne togosti $EI=2900.5 \text{ Nm}^2$. Primerjava identificirane vrednosti z teoretično (2985.36 N/m^2) pokaže, da se obe vrednosti razlikujeta za manj kot 3%.

Za prvo lastno frekvenco "točna" rešitev (enačba 27) in "poenostavljena" (enačba 30) vodita do enakih rezultatov za dodano maso na sredini razpona, saj tam masni vztrajnostni moment zaradi simetrije nihajne oblike nima vpliva. Dodatna masa na sredini konstrukcije je dejansko locirana v vozlišču druge nihajne oblike in tako zgolj vztrajnostni moment vpliva na nihanje. Dalje je mogoče opaziti, da sta obe rešitvi (enačbi 27) iz kvadratne enačbe pri uporabi prvih frekvenc vodili do pozitivnih rešitev in je tako bilo potrebno uporabiti poenostavljeno enačbo (30) za identifikacijo korektne vrednosti.

Za dodatno maso na sredini razpona sta se za identifikacijo lahko uporabili tudi obe enačbi, pridobljeni z Rayleighovim principom. Za dodatno maso 5 kg enačba (18) vodi do vrednosti $m=1.43 \text{ kg/m'}$, enačba (20) pa vrednost $m=1.63 \text{ kg/m'}$. Za dodatno maso 10 kg pa sta identificirani vrednosti $m=1.64 \text{ kg/m'}$ oz. $m=1.73 \text{ kg/m}$. V obeh primerih enačba (20) očitno vodi do boljših rezultatov, kar je posledica boljšega približka nihajne oblike. Enačbi (31) in (32) jasno vodita do enakih rezultatov kot enačbi (27), korektne pa so zgolj seveda rešitve, dobljene z enačbo (31).

Primerjava rezultatov in komentarji

Predstavljene enačbe za inverzno identifikacijo so bile praktično potrjene z eksperimenti. Predstavljeni pristop je z uporabo povprečenja demonstriral svoje prednosti. Čeprav je bil uporabljen zgolj s prvimi lastnimi frekvencami, se lahko predpostavi, da bi rezultati izkazovali slično natančnost, če bi se uporabile dovolj natančno izmerjene višje lastne frekvence z večjim številom smiselno manjših mas (opozoriti je namreč potrebno, da sta bili dodatni masi, uporabljeni v eksperimentih, večji od celotne mase nosilca). Izbira dodatne mase je lahko zelo občutljiva, saj je identificirana masa na enoto dolžine prvi rezultat analize. Predpostavi se lahko, da bi premajhne mase ne bile uporabne zaradi premajhne razlike med frekvencami originalne in spremenjene konstrukcije (zaradi občutljivosti merske opreme). Problem velikosti dodatne mase se lahko tako omili z uporabo različnih velikosti dodatnih mas, eksperimenti pa so pokazali, da se lahko metoda uspešno uporabi tudi z dodatno maso, večjo od celotne mase osnovne konstrukcije.

Prednosti

Enostavnost spremembe konstrukcije z dodatno maso, kar omogoči pridobitev velikega števila sistemov za identifikacijo
Ohranitev prvotnega stanja konstrukcije po identifikaciji
Enostavnost izračuna (kvadratna enačba)
Dovolj je že prva lastna frekvenca, natančno izmerjene višje frekvence lahko s povprečenjem zagotovijo višjo natančnost

Slabosti

Posebni izrazi za vsako vrsto vpetja
Nepreglednost izrazov pri konstrukcijah z odsekovno konstantnim prerezom

Domača naloga

Dolžina prostoležečega nosilca $L=2.5$ m, dodatna masa $M=20$ kg (z $J_c=6.66666666 \cdot 10^{-3}$ kg·m²) je locirana na razdalji 1.5 m od leve podpore.

Lastne frekvence so:

Frekvence	osnovni sistem	sistem z dodatno maso
1	30.1592862870886 Hz	29.4556632272687 Hz
2	120.637486191849 Hz	119.542398060384 Hz
3	271.437385874854 Hz	268.853776711229 Hz

Koliko znašata upogibna togost EI ter masa konstrukcije m na enoto dolžine?