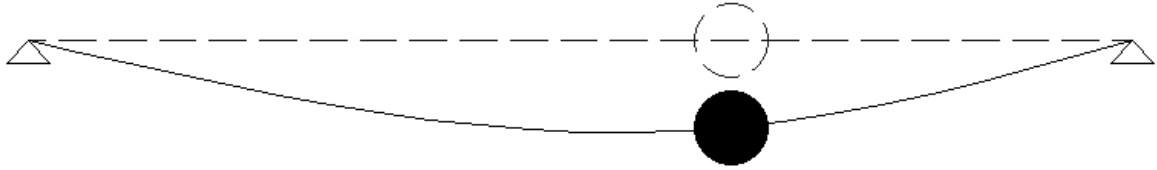


Primer 1: Prostoležeči nosilec z eno koncentrirano maso

Dolžina nosilca $L=2.2$ m, koncentrirana masa ($M_1=500$ kg) se nahaja na razdalji 1.4 m od leve podpore (prerez $b/h = 10/12$ cm, $E=30$ GPa)



1.1 dodatna masa $\Delta M_1=10$ kg

Frekvence	osnovni sistem	sistem z dodatno maso
1	10.7307715207637 Hz	10.6250470555282 Hz
»identifikacija«	10.7333 Hz (0.02356 %)	10.6333 Hz (0.077675 %)

a) Da se simulira vpliv nenatančnosti meritev na identifikacijo, se izračun izvede z upoštevanjem zgolj prvega decimalnega mesta obeh frekvenc: 10.7 Hz (-0.28 %) in 10.6 Hz (0.0777 %).

Osnovni sistem

$$\lambda_1 = \frac{1}{\omega_1^2} = \frac{1}{(2 \cdot \pi \cdot \nu_1)^2} = \frac{1}{(2 \cdot \pi \cdot 10.7)^2} = 2.212446 \cdot 10^{-4}$$

$$A_o = \sum_{i=1}^N \lambda_i = \lambda_1 = 2.212446 \cdot 10^{-4}$$

$$\det_o = \prod_{i=1}^N \lambda_i = \lambda_1 = 2.212446 \cdot 10^{-4}$$

Sistem z dodatno maso $\Delta M_1=10$ kg

$$\lambda_1 = \frac{1}{\omega_1^2} = \frac{1}{(2 \cdot \pi \cdot \nu_1)^2} = \frac{1}{(2 \cdot \pi \cdot 10.6)^2} = 2.25439 \cdot 10^{-4}$$

$$A_1 = \sum_{i=1}^N \lambda_i = \lambda_1 = 2.25439 \cdot 10^{-4}$$

$$\det_1 = \prod_{i=1}^N \lambda_i = \lambda_1 = 2.25439 \cdot 10^{-4}$$

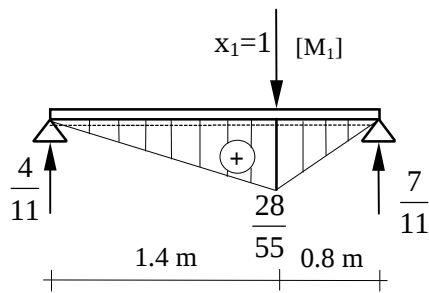
Identifikacija

$$M_1 = \frac{\det_o}{\det_1 - \det_o} \cdot \Delta M_1 = 527.512 \text{ kg}$$

$$d_{11} = \frac{A_1 - A_o}{\Delta M_1} = 4.19411738 \cdot 10^{-7}$$

Podajnost je mogoče izračunati na več načinov (virtualno delo, integracija obtežbe, MKE).

Ker je konstrukcija statično določena, se uporabi npr. kar virtualno delo:



Pomik pod silo je tako:

$$d_{11} = \frac{0.1209476584}{EI} + \frac{6.911294767 \cdot 10^{-2}}{EI}$$

$$d_{11} = \frac{0.19006060606}{EI}$$

Tako sledi za obravnavano konstrukcijo, kjer je EI enak levo in desno od mase:

$$EI = \frac{0.19006060606}{d_{11}} = \frac{0.19006060606}{4.19411738 \cdot 10^{-7}} = 453159.96 \text{ Nm}^2$$

Ker sta bili pri analizi lastnih frekvenc uporabljeni vrednosti $M_1=500 \text{ kg}$ ter $EI=432000 \text{ Nm}^2$, napaki torej znašata 5.5 % oz. 4.8 %.

b) Da se dalje prouči vpliv natančnosti meritev, se identifikacija sedaj izvede z upoštevanjem prvih dveh decimalnih mest obeh frekvenc: 10.73 Hz (-0.0072 %) in 10.63 Hz (0.0466 %).

Osnovni sistem

$$\lambda_1 = \frac{1}{\omega_1^2} = \frac{1}{(2 \cdot \pi \cdot v_1)^2} = \frac{1}{(2 \cdot \pi \cdot 10.7)^2} = 2.20009 \cdot 10^{-4}$$

$$A_o = \sum_{i=1}^N \lambda_i = \lambda_1 = 2.20009 \cdot 10^{-4}$$

$$\det_o = \prod_{i=1}^N \lambda_i = \lambda_1 = 2.20009 \cdot 10^{-4}$$

Sistem z dodatno maso

$$\lambda_1 = \frac{1}{\omega_1^2} = \frac{1}{(2 \cdot \pi \cdot v_1)^2} = \frac{1}{(2 \cdot \pi \cdot 10.63)^2} = 2.24168 \cdot 10^{-4}$$

$$A_1 = \sum_{i=1}^N \lambda_i = \lambda_1 = 2.24168 \cdot 10^{-4}$$

$$\det_1 = \prod_{i=1}^N \lambda_i = \lambda_1 = 2.24168 \cdot 10^{-4}$$

Identifikacija

$$M_1 = \frac{\det_o}{\det_1 - \det_o} \cdot \Delta M_1 = 529.012 \text{ kg}$$

$$d_{11} = \frac{A_1 - A_o}{\Delta M_1} = 4.15887 \cdot 10^{-7}$$

Tako sledi

$$EI = \frac{0.19006060606}{d_{11}} = \frac{0.19006060606}{4.15887 \cdot 10^{-7}} = 457000 \text{ Nm}^2$$

Obe napaki znašata 5.8 % oz. 5.8 %, kar je še celo malenkost več kot v prvem računu. Eden izmed vzrokov za napako leži v dejstvu, da je ena izmed uporabljenih frekvenc manjša od »prave«, druga pa je višja od »prave«. Če se uporabita vrednosti 10.73 Hz in 10.62 Hz (-0.0475 %), namreč sledita vrednosti:

$$M_1 = \frac{\det_o}{\det_1 - \det_o} \cdot \Delta M_1 = 480.240 \text{ kg } (-3.952 \%)$$

ter

$$EI = \frac{0.19006060606}{d_{11}} = \frac{0.19006060606}{4.5812326832049543 \cdot 10^{-7}} = 414867.8297 \text{ Nm}^2 \text{ } (-3.966 \%)$$

Na izračun tako očitno vpliva, ali sta obe identificirani frekvenci višji ali nižji od dejanskih.

c) Za dopolnitev študije se identifikacija sedaj izvede še z upoštevanjem prvih treh decimalnih mest obeh frekvenc: 10.731 Hz (0.00214 %) in 10.625 Hz (-0.00044%).

Osnovni sistem

$$\lambda_1 = \frac{1}{\omega_1^2} = \frac{1}{(2 \cdot \pi \cdot v_1)^2} = \frac{1}{(2 \cdot \pi \cdot 10.7)^2} = 2.19968 \cdot 10^{-4}$$

$$A_o = \sum_{i=1}^N \lambda_i = \lambda_1 = 2.19968 \cdot 10^{-4}$$

$$\det_o = \prod_{i=1}^N \lambda_i = \lambda_1 = 2.19968 \cdot 10^{-4}$$

Sistem z dodatno maso

$$\lambda_1 = \frac{1}{\omega_1^2} = \frac{1}{(2 \cdot \pi \cdot v_1)^2} = \frac{1}{(2 \cdot \pi \cdot 10.63)^2} = 2.24379 \cdot 10^{-4}$$

$$A_1 = \sum_{i=1}^N \lambda_i = \lambda_1 = 2.24379 \cdot 10^{-4}$$

$$\det_1 = \prod_{i=1}^N \lambda_i = \lambda_1 = 2.24379 \cdot 10^{-4}$$

Identifikacija

$$M_1 = \frac{\det_o}{\det_1 - \det_o} \cdot \Delta M_1 = 498.692 \text{ kg}$$

$$d_{11} = \frac{A_1 - A_o}{\Delta M_1} = 4.41091 \cdot 10^{-7}$$

Tako sledi

$$EI = \frac{0.19006060606}{d_{11}} = \frac{0.19006060606}{4.41091 \cdot 10^{-7}} = 430888 \text{ Nm}^2$$

Napaki torej znašata -0.2616 % oz. -0.257 %, kar jasno pokaže vpliv natančnosti meritev na rezultate, saj majhno odstopanje frekvenc seveda vodi do majhne napake.

d) Identifikacija izvede z upoštevanjem »točnih« frekvenc

Osnovni sistem

$$\lambda_1 = \frac{1}{\omega_1^2} = \frac{1}{(2 \cdot \pi \cdot v_1)^2} = \frac{1}{(2 \cdot \pi \cdot 10.7307715207637)^2} = 2.19978 \cdot 10^{-4}$$

$$A_o = \sum_{i=1}^N \lambda_i = \lambda_1 = 2.19978 \cdot 10^{-4}$$

$$\det_o = \prod_{i=1}^N \lambda_i = \lambda_1 = 2.19978 \cdot 10^{-4}$$

Sistem z dodatno maso

$$\lambda_1 = \frac{1}{\omega_1^2} = \frac{1}{(2 \cdot \pi \cdot v_1)^2} = \frac{1}{(2 \cdot \pi \cdot 10.6250470555282)^2} = 2.24377 \cdot 10^{-4}$$

$$A_1 = \sum_{i=1}^N \lambda_i = \lambda_1 = 2.24377 \cdot 10^{-4}$$

$$\det_1 = \prod_{i=1}^N \lambda_i = \lambda_1 = 2.24377 \cdot 10^{-4}$$

Identifikacija

$$M_1 = \frac{\det_o}{\det_1 - \det_o} \cdot \Delta M_1 = 500 \text{ kg}$$

$$d_{11} = \frac{A_1 - A_o}{\Delta M_1} = 4.39955 \cdot 10^{-7}$$

Tako sledi

$$EI = \frac{0.19006060606}{d_{11}} = \frac{0.19006060606}{4.39955 \cdot 10^{-7}} = 432000 \text{ Nm}^2$$

Identificirani vrednosti sta torej popolnoma natančni, kar je bil tudi pričakovan rezultat.

e) Identifikacija z upoštevanjem »identificiranih« vrednosti frekvenc: 10.7333 Hz (0.0236 %) in 10.6333 Hz (0.0777%).

Osnovni sistem

$$\lambda_1 = \frac{1}{\omega_1^2} = \frac{1}{(2 \cdot \pi \cdot v_1)^2} = \frac{1}{(2 \cdot \pi \cdot 10.7333)^2} = 2.19873924 \cdot 10^{-4}$$

$$A_o = \sum_{i=1}^N \lambda_i = \lambda_1 = 2.19873924 \cdot 10^{-4}$$

$$\det_o = \prod_{i=1}^N \lambda_i = \lambda_1 = 2.19873924 \cdot 10^{-4}$$

Sistem z dodatno maso

$$\lambda_1 = \frac{1}{\omega_1^2} = \frac{1}{(2 \cdot \pi \cdot v_1)^2} = \frac{1}{(2 \cdot \pi \cdot 10.6333)^2} = 2.2402894 \cdot 10^{-4}$$

$$A_1 = \sum_{i=1}^N \lambda_i = \lambda_1 = 2.2402894 \cdot 10^{-4}$$

$$\det_1 = \prod_{i=1}^N \lambda_i = \lambda_1 = 2.2402894 \cdot 10^{-4}$$

Identifikacija

$$M_1 = \frac{\det_o}{\det_1 - \det_o} \cdot \Delta M_1 = 529.177 \text{ kg}$$

$$d_{11} = \frac{A_1 - A_o}{\Delta M_1} = 4.1550189874 \cdot 10^{-7}$$

kar vodi do:

$$EI = \frac{0.19006060606}{d_{11}} = \frac{0.19006060606}{4.1550189874 \cdot 10^{-7}} = 457424.15771733713 \text{ Nm}^2$$

Napaki torej znašata presenetljivih +5.8 % oz. +5.9 %. Obe za identifikacijo uporabljeni frekvenci sta sicer višji od »točnih« vrednosti, vendar je rang napake pri obeh frekvencah zelo različen (trikratna vrednost).

1.II dodatna masa $\Delta M_1 = 20 \text{ kg}$

Frekvence	sistem z dodatno maso
1	10.5223871885153 Hz
»identifikacija«	10.5333 Hz (+0.1037 %)

	1 decimalka	2 decimalki	3 decimalke	vse decimalke	»meritev«
v_1 [Hz]	10.7	10.73	10.731	10.73077152	10.7333
	(-0.287 %)	(-0.007 %)	(-0.00214 %)	(0 %)	(0.0235 %)
λ_o	$2.212446 \cdot 10^{-4}$	$2.200092 \cdot 10^{-4}$	$2.199682 \cdot 10^{-4}$	$2.199775 \cdot 10^{-4}$	$2.198739 \cdot 10^{-4}$
A_o	$2.212446 \cdot 10^{-4}$	$2.200092 \cdot 10^{-4}$	$2.199682 \cdot 10^{-4}$	$2.199775 \cdot 10^{-4}$	$2.198739 \cdot 10^{-4}$
$\det_o$	$2.212446 \cdot 10^{-4}$	$2.200092 \cdot 10^{-4}$	$2.199682 \cdot 10^{-4}$	$2.199775 \cdot 10^{-4}$	$2.198739 \cdot 10^{-4}$
v_1 [Hz]	10.5	10.52	10.522	10.52238719	10.5333
	(-0.2126 %)	(-0.02268)	(-0.00361 %)	(0 %)	(0.103 %)
λ_1	$2.297533 \cdot 10^{-4}$	$2.288805 \cdot 10^{-4}$	$2.287935 \cdot 10^{-4}$	$2.287767 \cdot 10^{-4}$	$2.283029 \cdot 10^{-4}$
A_1	$2.297533 \cdot 10^{-4}$	$2.288805 \cdot 10^{-4}$	$2.287935 \cdot 10^{-4}$	$2.287767 \cdot 10^{-4}$	$2.283029 \cdot 10^{-4}$
$\det_1$	$2.297533 \cdot 10^{-4}$	$2.288805 \cdot 10^{-4}$	$2.287935 \cdot 10^{-4}$	$2.287767 \cdot 10^{-4}$	$2.283029 \cdot 10^{-4}$
M_1 [kg]	520.047	496.002	498.494	500	521.712
d_{11}	$4.254318 \cdot 10^{-7}$	$4.435653 \cdot 10^{-7}$	$4.412653 \cdot 10^{-7}$	$4.399551 \cdot 10^{-7}$	$4.214469 \cdot 10^{-7}$
EI	446747	428484	4330717	432000	450973

1.III dodatna masa $\Delta M_1=50$ kg

Frekvence	sistem z dodatno maso
1	10.2313891987902 Hz
»identifikacija«	10.2333 (+0.018676 %)

	1 decimalka	2 decimalki	3 decimalke	vse decimalke	»meritev«
v_1 [Hz]	10.7	10.73	10.731	10.730771521	10.7333
	(-0.287 %)	(-0.007 %)	(-0.00214 %)	(0 %)	(0.0235 %)
v_1 [Hz]	10.2	10.23	10.231	10.23138920	10.2333
	(-0.306 %)	(-0.0136 %)	(-0.003 %)	(0 %)	(0.0187 %)
λ_1	$2.434669 \cdot 10^{-4}$	$2.420410 \cdot 10^{-4}$	$2.419937 \cdot 10^{-4}$	$2.419753 \cdot 10^{-4}$	$2.418849 \cdot 10^{-4}$
A_1	$2.434669 \cdot 10^{-4}$	$2.420410 \cdot 10^{-4}$	$2.419937 \cdot 10^{-4}$	$2.419753 \cdot 10^{-4}$	$2.418849 \cdot 10^{-4}$
$\det_1$	$2.434669 \cdot 10^{-4}$	$2.420410 \cdot 10^{-4}$	$2.419937 \cdot 10^{-4}$	$2.419753 \cdot 10^{-4}$	$2.418849 \cdot 10^{-4}$
M_1 [kg]	497.799	499.298	499.348	500	499.463
d_{11}	$4.444456 \cdot 10^{-7}$	$4.406369 \cdot 10^{-7}$	$4.405107 \cdot 10^{-7}$	$4.399551 \cdot 10^{-7}$	$4.402206 \cdot 10^{-7}$
EI	427635	431332	431455	432000	431740

1.IV dodatna masa $\Delta M_1=100$ kg

Frekvence	sistem z dodatno maso
1	9.79580936892715 Hz
»identifikacija«	9.8 (+0.0428 %)

	1 decimalka	2 decimalki	3 decimalke	vse decimalke	»meritev«
v_1 [Hz]	10.7	10.73	10.731	10.73077152	10.7333
	(-0.287%)	(-0.007 %)	(-0.00214 %)	(0 %)	(0.0235 %)
v_1 [Hz]	9.8	9.80	9.796	9.79580937	9.8
	(0.0428 %)	(0.0428 %)	(0.002 %)	(0 %)	(0.0428 %)
λ_1	$2.637474 \cdot 10^{-4}$	$2.637474 \cdot 10^{-4}$	$2.639628 \cdot 10^{-4}$	$2.639731 \cdot 10^{-4}$	$2.637474 \cdot 10^{-4}$
A_1	$2.637474 \cdot 10^{-4}$	$2.637474 \cdot 10^{-4}$	$2.639628 \cdot 10^{-4}$	$2.639731 \cdot 10^{-4}$	$2.637474 \cdot 10^{-4}$
$\det_1$	$2.637474 \cdot 10^{-4}$	$2.637474 \cdot 10^{-4}$	$2.639628 \cdot 10^{-4}$	$2.639731 \cdot 10^{-4}$	$2.637474 \cdot 10^{-4}$
M_1 [kg]	520.542	503.014	499.989	500	501.155076
d_{11}	$4.250274 \cdot 10^{-7}$	$4.373817 \cdot 10^{-7}$	$4.399460 \cdot 10^{-7}$	$4.399551 \cdot 10^{-7}$	$4.387343 \cdot 10^{-7}$
EI	447173	4434542	432009	432000	433202

1.V dodatna masa $\Delta M_1=200$ kg

Frekvence	sistem z dodatno maso
1	9.06915720729303 Hz
»identifikacija«	9.06667 (-0.0274 %)

	1 decimalka	2 decimalki	3 decimalke	vse decimalke	»meritev«
v_1 [Hz]	10.7	10.73	10.731	10.73077152	10.7333
	(-0.287%)	(-0.007 %)	(-0.00214 %)	(0 %)	(0.0235 %)
v_1 [Hz]	9.1	9.07	9.069	9.06915721	9.06667
	(0.0341 %)	(0.0093 %)	(-0.00173 %)	(0 %)	(-0.0274 %)
λ_1	$3.058845 \cdot 10^{-4}$	$3.079113 \cdot 10^{-4}$	$3.079792 \cdot 10^{-4}$	$3.079686 \cdot 10^{-4}$	$3.081376 \cdot 10^{-4}$
A_1	$3.058845 \cdot 10^{-4}$	$3.079113 \cdot 10^{-4}$	$3.079792 \cdot 10^{-4}$	$3.079686 \cdot 10^{-4}$	$3.081376 \cdot 10^{-4}$
$\det_1$	$3.058845 \cdot 10^{-4}$	$3.079113 \cdot 10^{-4}$	$3.079792 \cdot 10^{-4}$	$3.079686 \cdot 10^{-4}$	$3.081376 \cdot 10^{-4}$
M_1 [kg]	522.790	500.577	499.864	500	498.220
d_{11}	$4.231995 \cdot 10^{-7}$	$4.395108 \cdot 10^{-7}$	$4.400553 \cdot 10^{-7}$	$4.399551 \cdot 10^{-7}$	$4.413182 \cdot 10^{-7}$
EI	449104	432437	431902	432000	430665

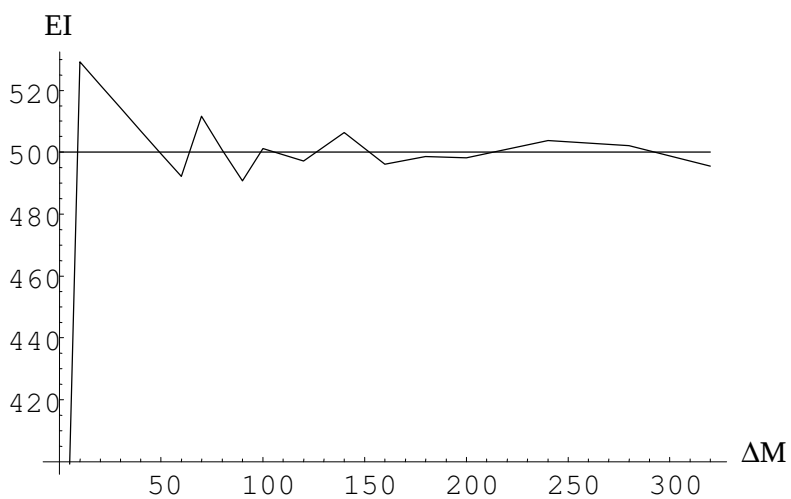
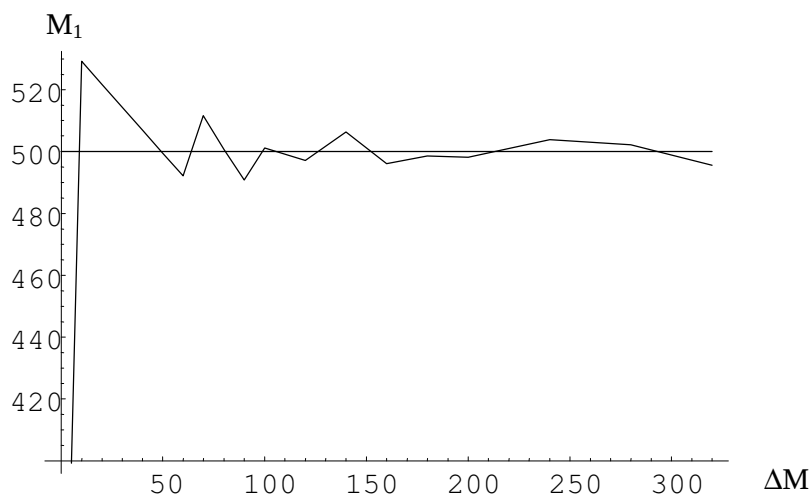
Trend natančnosti z »identificiranimi« frekvencami (frekvenca osnovnega sistema znaša 10.7333)

ΔM_1	frekvenca	$M_1= 500$ kg	EI=432000
5 kg	10.6667	399.155542	345032
10 kg	10.6333	529.177	457424
20 kg	10.5333	521.7120221	450971
30 kg	10.4333	514.271299	444539
40 kg	10.3333	506.854874	438129
50 kg	10.2333	499.4630932	431739
60 kg	10.1333	492.096311	425371
70 kg	10.0667 ^a	511.615446	442244
80 kg ^b	9.96667	500.766	432865
90 kg	9.86667	490.776104	424230
100 kg	9.8	501.155076	433202
120 kg	9.63333	497.088948	429687
140 kg	9.5 ^b	506.3371	437681
160 kg	9.33333	496.13521	428862
180 kg	9.2	498.47321	430883
200 kg	9.06667	498.22084	430665
240 kg	8.83333 ^c	503.729489	435427
280 kg	8.6	502.107849	434025
320 kg	8.36667	495.555393	428361

^a skoraj popolnoma raven vrh

^b zanimiv spekter

^c izrazito nejasen maksimum



1.VI Različna profila levo in desno od mase

Pomik pod silo je tako:

$$d_{11} = \frac{0.1209476584}{EI_1} + \frac{6.911294767 \cdot 10^{-2}}{EI_2}$$

Ker izvediaagonalnega člena ni, upogibnih togosti ni mogoče identificirati.

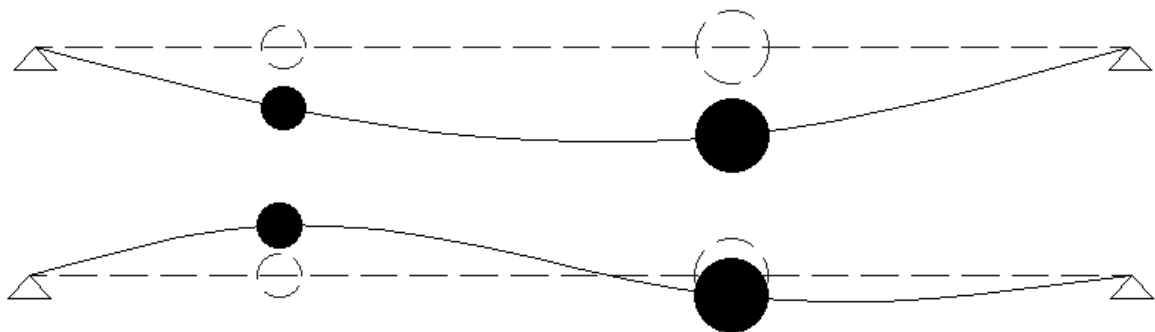
Primer 2.a: Prostoležeči nosilec z dvema koncentriranima masama

Dolžina $L=2.2$ m, prva koncentrirana masa ($M_1=300$ kg) se nahaja na razdalji 0.5 m, druga ($M_2=500$ kg) pa na razdalji 1.4 m od leve podpore (prerez $b/h = 10/12$ cm, $E=30$ GPa).

2.1 Identifikacija z dodatno maso $\Delta M_j=30$ kg

1. »Točne« frekvence – upoštevanje vseh decimalk

Frekvenci	osnovni sistem	$\Delta M_1=30$ kg	$\Delta M_2=30$ kg
1	9.5589953857396 Hz	9.45429708455802 Hz	9.34307590713011 Hz
2	36.7221822404801 Hz	35.4009686784021 Hz	36.4920216305203 Hz



Osnovni sistem

$$\lambda_1 = 2.772143829212516 \cdot 10^{-4}$$

$$\lambda_2 = 1.878379328534115 \cdot 10^{-5}$$

$$A_0 = \lambda_1 + \lambda_2 = 2.9599817620659273 \cdot 10^{-4}$$

$$\det_0 = \lambda_1 \cdot \lambda_2 = 5.207137664516196 \cdot 10^{-9}$$

Sistem z dodatno maso 30 kg v prvi prostostni stopnji

$$\lambda_1 = 2.8338820675224215 \cdot 10^{-4}$$

$$\lambda_2 = 2.021203174482817 \cdot 10^{-5}$$

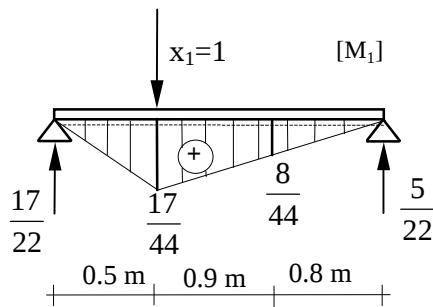
$$A_1 = \lambda_1 + \lambda_2 = 3.036002384970703 \cdot 10^{-4}$$

$$\det_1 = \lambda_1 \cdot \lambda_2 = 5.727851430986247 \cdot 10^{-9}$$

Identificirani vrednosti sta

$$M_1 = \frac{\det_0}{\det_1 - \det_0} \cdot \Delta M_1 = 300 \text{ kg}$$

$$d_{11} = \frac{A_1 - A_0}{\Delta M_1} = 2.534020763492524 \cdot 10^{-7}$$



Pomik pod silo je tako:

$$d_{11} = \frac{2.487947659 \cdot 10^{-2}}{EI} + \frac{7.577479339 \cdot 10^{-2}}{EI} + \frac{8.815426996 \cdot 10^{-3}}{EI} + \frac{0.109469697}{EI}$$

Tako sledi:

$$EI = \frac{0.109469697}{d_{11}} = \frac{0.109469697}{2.534020763492524 \cdot 10^{-7}} = 432000 \text{ Nm}^2$$

Sistem z dodatno maso 30 kg v drugi prostostni stopnji

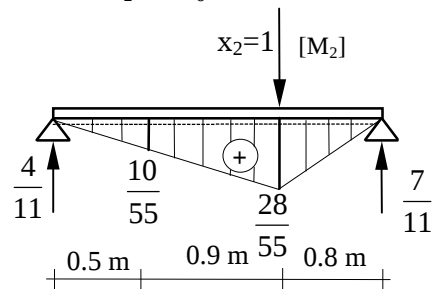
$$\lambda_1 = 2.901753445397742 \cdot 10^{-4}$$

$$\lambda_2 = 1.9021484865068847 \cdot 10^{-5}$$

$$A_2 = \lambda_1 + \lambda_2 = 3.0919682940484306 \cdot 10^{-4}$$

$$\det_2 = \lambda_1 \cdot \lambda_2 = 5.519565924379453 \cdot 10^{-9}$$

$$M_2 = \frac{\det_0}{\det_2 - \det_0} \cdot \Delta M_2 = 500 \text{ kg}$$



Pomik pod silo je tako:

$$d_{22} = \frac{5.509641873 \cdot 10^{-3}}{EI} + \frac{0.1154380165}{EI} + \frac{6.911294767 \cdot 10^{-2}}{EI} + \frac{0.19006060606}{EI}$$

$$d_{22} = \frac{A_2 - A_0}{\Delta M_2} = 4.3995510660834453 \cdot 10^{-7}$$

$$EI = \frac{0.19006060606}{d_{22}} = \frac{0.19006060606}{4.3995510660834453 \cdot 10^{-7}} = 432000 \text{ Nm}^2$$

Identificirani izvendiagonalni člen (zgolj zaradi kontrole)

$$d_{12} = \sqrt{d_{11} \cdot d_{22} - \frac{\det_0}{M_1 \cdot M_2}}$$

$$= \sqrt{2.534020763492524 \cdot 10^{-7} \cdot 4.3995510660834453 \cdot 10^{-7} - \frac{5.207137664516196 \cdot 10^{-9}}{300 \cdot 500}}$$

$$= 2.7707631876049045 \cdot 10^{-7}$$

Ker pa velja:

$$d_{12} = \frac{1.170798898 \cdot 10^{-2}}{EI} + \frac{8.330578512 \cdot 10^{-2}}{EI} + \frac{2.468319559 \cdot 10^{-2}}{EI} = \frac{1.196969696 \cdot 10^{-1}}{EI}$$

ponovno sledi:

$$EI = \frac{0.119696969696}{d_{12}} = \frac{0.119696969696}{2.7707631876049045 \cdot 10^{-7}} = 432000 \text{ Nm}^2$$

2. upoštevanje enega decimalnega mesta

Frekvenci	osnovni sistem	$\Delta M_1 = 30 \text{ kg}$	$\Delta M_2 = 30 \text{ kg}$
1	9.6 Hz	9.5 Hz	9.3 Hz
2	36.7 Hz	35.4 Hz	36.5 Hz

Osnovni sistem $A_o = 2936578078884129 \cdot 10^{-4}$ $\det_o = 5.168992856583897 \cdot 10^{-9}$	
$M_1 = 30 \text{ kg}$ $A_1 = 3.008801304770658 \cdot 10^{-4}$ $\det_1 = 5.6728725213365544 \cdot 10^{-9}$ $M_1 = 307.56212 \text{ kg} (+ 2.52 \%)$ $d_{11} = 2.4078095865470406 \cdot 10^{-7}$ $EI = 454644 \text{ Nm}^2$	$M_2 = 30 \text{ kg}$ $A_2 = 3.118828187703287 \cdot 10^{-4}$ $\det_2 = 5.568380456517479 \cdot 10^{-9}$ $M_2 = 388.268904000287 \text{ kg} (- 22.346 \%)$ $d_{22} = 6.075003627305259 \cdot 10^{-7}$ $EI = 312856 \text{ Nm}^2$
$d_{12} = 3.209193282762449 \cdot 10^{-7}$ $EI = 372981 \text{ Nm}^2$	
$EI_{\text{povp}} = 380161 \text{ Nm}^2$	

3. upoštevanje dveh decimalnih mest

Frekvenci	osnovni sistem	$\Delta M_1 = 30 \text{ kg}$	$\Delta M_2 = 30 \text{ kg}$
1	9.56 Hz	9.45 Hz	9.34 Hz
2	36.72 Hz	35.40 Hz	36.49 Hz

Osnovni sistem $A_o = 2.9594214970290783 \cdot 10^{-4}$ $\det_o = 5.2066621365270804 \cdot 10^{-9}$	
$M_1 = 30 \text{ kg}$ $A_1 = 3.038591266684767 \cdot 10^{-4}$ $\det_1 = 5.733375489925624 \cdot 10^{-9}$ $M_1 = 296.555 \text{ kg} (- 1.15 \%)$ $d_{11} = 2.6389923218562975 \cdot 10^{-7}$ $EI = 414816 \text{ Nm}^2$	$M_2 = 30 \text{ kg}$ $A_2 = 3.0939009331639063 \cdot 10^{-4}$ $\det_2 = 5.523814012171024 \cdot 10^{-9}$ $M_2 = 492.508 \text{ kg} (- 1.5 \%)$ $d_{22} = 4.4826478711609324 \cdot 10^{-7}$ $EI = 423991 \text{ Nm}^2$
$d_{12} = 2.874862791264157 \cdot 10^{-7}$ $EI = 416357.1564309889 \text{ Nm}^2$	
$EI_{\text{povp}} = 418388 \text{ Nm}^2$	

2.II. Identifikacija z dodatno maso $\Delta M_j = 60 \text{ kg}$

1. »Točne« frekvence – upoštevanje vseh decimalk

Frekvenci	osnovni sistem	$\Delta M_1 = 60 \text{ kg}$	$\Delta M_2 = 60 \text{ kg}$
1	9.5589953857396 Hz	9.35190272846613 Hz	9.14082950473505 Hz
2	36.7221822404801 Hz	34.2649521371333 Hz	36.2865863201457 Hz

Osnovni sistem	
$A_o = 2.9599817620659273 \cdot 10^{-4}$	$\det_o = 5.207137664516196 \cdot 10^{-9}$
$M_1 = 60 \text{ kg}$ $A_1 = 3.1120230078787877 \cdot 10^{-4}$ $\det_1 = 6.248565197465885 \cdot 10^{-9}$ $M_1 = 299.9999999 \text{ kg } (+ 0.0 \%)$ $d_{11} = 2.5340207635476735 \cdot 10^{-7}$ $EI = 432000 \text{ Nm}^2$	$M_2 = 60 \text{ kg}$ $A_2 = 3.223954826031749 \cdot 10^{-4}$ $\det_2 = 5.831994184244121 \cdot 10^{-9}$ $M_2 = 500.00000 \text{ kg } (0.0 \%)$ $d_{22} = 4.399551066097025 \cdot 10^{-7}$ $EI = 432000 \text{ Nm}^2$
$d_{12} = 2.7707631876477183 \cdot 10^{-7}$	$EI = 431999.999941 \text{ Nm}^2$
$EI_{\text{povp}} = 432000 \text{ Nm}^2$	

2. upoštevanje dveh decimalnih mest

Frekvenci	osnovni sistem	$\Delta M_1 = 60 \text{ kg}$	$\Delta M_2 = 60 \text{ kg}$
1	9.56 Hz	9.35 Hz	9.14 Hz
2	36.72 Hz	34.26 Hz	36.29 Hz

Osnovni sistem	
$A_o = 2.9594214970290783 \cdot 10^{-4}$	$\det_o = 5.2066621365270804 \cdot 10^{-9}$
$M_1 = 60 \text{ kg}$ $A_1 = 3.1132642897102803 \cdot 10^{-4}$ $\det_1 = 6.252915899783615 \cdot 10^{-9}$ $M_1 = 298.58886931910274 \text{ kg } (-0.47 \%)$ $d_{11} = 2.5640465446867 \cdot 10^{-7}$ $EI = 426941 \text{ Nm}^2$	$M_2 = 60 \text{ kg}$ $A_2 = 3.2244689253768823 \cdot 10^{-4}$ $\det_2 = 5.8319554624725845 \cdot 10^{-9}$ $M_2 = 499.60509 \text{ kg } (-0.08 \%)$ $d_{22} = 4.417457139130066 \cdot 10^{-7}$ $EI = 430248 \text{ Nm}^2$
$d_{12} = 2.799338579574193 \cdot 10^{-7}$ $EI = 427590.18 \text{ Nm}^2$	
$EI_{\text{povp}} = 428260.07539395633 \text{ Nm}^2$	

3. upoštevanje enega decimalnega mesta

Frekvenci	osnovni sistem	$\Delta M_1 = 60 \text{ kg}$	$\Delta M_2 = 60 \text{ kg}$
1	9.6 Hz	9.4 Hz	9.1 Hz
2	36.7 Hz	34.3 Hz	36.3 Hz

Osnovni sistem $A_o = 2.936578078884129 \cdot 10^{-4}$ $\det_o = 5.168992856583897 \cdot 10^{-9}$	
$M_1 = 60 \text{ kg}$ $A_1 = 3.082019208376965 \cdot 10^{-4}$ $\det_1 = 6.1721515239193395 \cdot 10^{-9}$ $M_1 = 309.16302823641695 \text{ kg } (+3.05 \%)$ $d_{11} = 2.424018824880595 \cdot 10^{-7}$ $EI = 451604 \text{ Nm}^2$	$M_2 = 60 \text{ kg}$ $A_2 = 3.2510776443933046 \cdot 10^{-4}$ $\det_2 = 5.880097019690699 \cdot 10^{-9}$ $M_2 = 436.13803 \text{ kg } (-12.772 \%)$ $d_{22} = 5.241659425152923 \cdot 10^{-7}$ $EI = 362596.251767 \text{ Nm}^2$
$d_{12} = 2.9786558012804275 \cdot 10^{-7}$ $EI = 401848.95 \text{ Nm}^2$	
$EI_{\text{povp}} = 405349.7841249611 \text{ Nm}^2$	

2.III. Identifikacija z dodatno maso $\Delta M_j = 100 \text{ kg}$

1. »Točne« frekvence – upoštevanje vseh decimalk

Frekvenci	osnovni sistem	$\Delta M_1 = 100 \text{ kg}$	$\Delta M_2 = 100 \text{ kg}$
1	9.5589953857396 Hz	9.21892330952467 Hz	8.89012775923678 Hz
2	36.7221822404801 Hz	32.9754828133672 Hz	36.0447575177766 Hz

Osnovni sistem $A_o = 2.9599817620659273 \cdot 10^{-4}$ $\det_o = 5.207137664516196 \cdot 10^{-9}$	
$M_1 = 100 \text{ kg}$ $A_1 = 3.213383838373666 \cdot 10^{-4}$ $\det_1 = 6.942850219328968 \cdot 10^{-9}$ $M_1 = 300.00000000 \text{ kg } (+0.0 \%)$ $d_{11} = 2.5340207635476735 \cdot 10^{-7}$ $EI = 432000 \text{ Nm}^2$	$M_2 = 100 \text{ kg}$ $A_2 = 3.399936868677087 \cdot 10^{-4}$ $\det_2 = 6.248565197398564 \cdot 10^{-9}$ $M_2 = 500.00000 \text{ kg } (0.0 \%)$ $d_{22} = 4.399551066111595 \cdot 10^{-7}$ $EI = 432000 \text{ Nm}^2$
$d_{12} = 2.7707631873168175 \cdot 10^{-7}$ $EI = 432000 \text{ Nm}^2$	
$EI_{\text{povp}} = 432000 \text{ Nm}^2$	

2. dve decimalni mesti

Frekvenci	osnovni sistem	$\Delta M_1 = 100 \text{ kg}$	$\Delta M_2 = 100 \text{ kg}$
1	9.56 Hz	9.22 Hz	8.89 Hz
2	36.72 Hz	32.98 Hz	36.04 Hz

Osnovni sistem $A_o = 2.9594214970290783 \cdot 10^{-4}$ $\det_o = 5.2066621365270804 \cdot 10^{-9}$	
$M_1 = 100 \text{ kg}$ $A_1 = 3.2126239738848724 \cdot 10^{-4}$ $\det_1 = 6.93932745907879 \cdot 10^{-9}$ $M_1 = 300.500164 \text{ kg (+ 0.17 \%)}$ $d_{11} = 2.532024768557941 \cdot 10^{-7}$ $EI = 432341 \text{ Nm}^2$	$M_2 = 100 \text{ kg}$ $A_2 = 3.4000804640610686 \cdot 10^{-4}$ $\det_2 = 6.250394656389886 \cdot 10^{-9}$ $M_2 = 498.85023581 \text{ kg (- 0.23 \%)}$ $d_{22} = 4.406589670319903 \cdot 10^{-7}$ $EI = 431310 \text{ Nm}^2$
$d_{12} = 2.7720527687103955 \cdot 10^{-7}$ $EI = 431799 \text{ Nm}^2$	
$EI_{\text{povp}} = 431817 \text{ Nm}^2$	

3. Zgolj eno decimalno mesto

Frekvenci	osnovni sistem	$\Delta M_1 = 100 \text{ kg}$	$\Delta M_2 = 100 \text{ kg}$
1	9.6 Hz	9.2 Hz	8.9 Hz
2	36.7 Hz	33.0 Hz	36.0 Hz

Osnovni sistem $A_o = 2.936578078884129 \cdot 10^{-4}$ $\det_o = 5.206095008336827 \cdot 10^{-9}$	
$M_1 = 100 \text{ kg}$ $A_1 = 3.2253112509892637 \cdot 10^{-4}$ $\det_1 = 6.961085885901583 \cdot 10^{-9}$ $M_1 = 288.433288 \text{ kg (- 3.86 \%)}$ $d_{11} = 2.887331721051345 \cdot 10^{-7}$ $EI = 379137.92933 \text{ Nm}^2$	$M_2 = 100 \text{ kg}$ $A_2 = 3.393315728855904 \cdot 10^{-4}$ $\det_2 = 6.250222986304679 \cdot 10^{-9}$ $M_2 = 478.065928 \text{ kg (- 4.38 \%)}$ $d_{22} = 4.567376499717746 \cdot 10^{-7}$ $EI = 416126 \text{ Nm}^2$
$d_{12} = 3.072279200172885 \cdot 10^{-7}$ $EI = 389603 \text{ Nm}^2$	
$EI_{\text{povp}} = 394956 \text{ Nm}^2$	

Primer 2.b – Prostoležeči nosilec nekonstantnega prereza z dvema koncentriranima masama

Dolžina $L=2.2$ m, prva koncentrirana masa ($M_1=300$ kg) se nahaja na razdalji 0.5 m, druga ($M_2=500$ kg) pa na razdalji 1.4 m od leve podpore. Prečni prerezi nosilca med podporama in masama so različni - trije različno odseki. Vsi prerezi so široki 10 cm, višine pa so 10 cm, 12 cm ter 14 cm, modul elastičnosti pa znaša $E=30$ GPa.

1. vse decimalke

Frekvenci	osnovni sistem	$\Delta M_1 = 100$ kg	$\Delta M_2 = 100$ kg
1	9.86169660849964 Hz	9.43346838596097 Hz	9.21228290458968 Hz
2	34.833202653525 Hz	31.5358308334634 Hz	34.0398121259905 Hz

Osnovni sistem $A_0 = 2.8133386856143386 \cdot 10^{-4}$ $\det_0 = 5.43738943120448 \cdot 10^{-9}$	
$M_1 = 100$ kg $A_1 = 3.1011116869143616 \cdot 10^{-4}$ $\det_1 = 7.24985257491473 \cdot 10^{-9}$ $M_1 = 300.0000000406783$ kg $d_{11} = 2.8777300130002296 \cdot 10^{-7}$	$M_2 = 100$ kg $A_2 = 3.203342621912218 \cdot 10^{-4}$ $\det_2 = 6.524867317359772 \cdot 10^{-9}$ $M_2 = 500.00000003935884$ kg $d_{22} = 3.9000393629787916 \cdot 10^{-7}$
$d_{12} = 2.756507580180256 \cdot 10^{-7}$	

Upogibne togosti se sedaj izračunajo iz linearnega sistema treh enačb s tremi neznankami:

$$d_{11} = \frac{2.487947659 \cdot 10^{-2}}{EI_1} + \frac{7.577479339 \cdot 10^{-2}}{EI_2} + \frac{8.815426996 \cdot 10^{-3}}{EI_3}$$

$$d_{22} = \frac{5.509641873 \cdot 10^{-3}}{EI_1} + \frac{0.1154380165}{EI_2} + \frac{6.911294767 \cdot 10^{-2}}{EI_3}$$

$$d_{12} = \frac{1.170798898 \cdot 10^{-2}}{EI_1} + \frac{8.330578512 \cdot 10^{-2}}{EI_2} + \frac{2.468319559 \cdot 10^{-2}}{EI_3}$$

katerega rešitve so:

$$EI_1 = 249998.867226798 \text{ Nm}^2$$

$$EI_2 = 432000.7761248989 \text{ Nm}^2$$

$$EI_3 = 685997.405000775 \text{ Nm}^2$$

kar predstavlja (korektne) odlične približke koerktivnih vrednosti

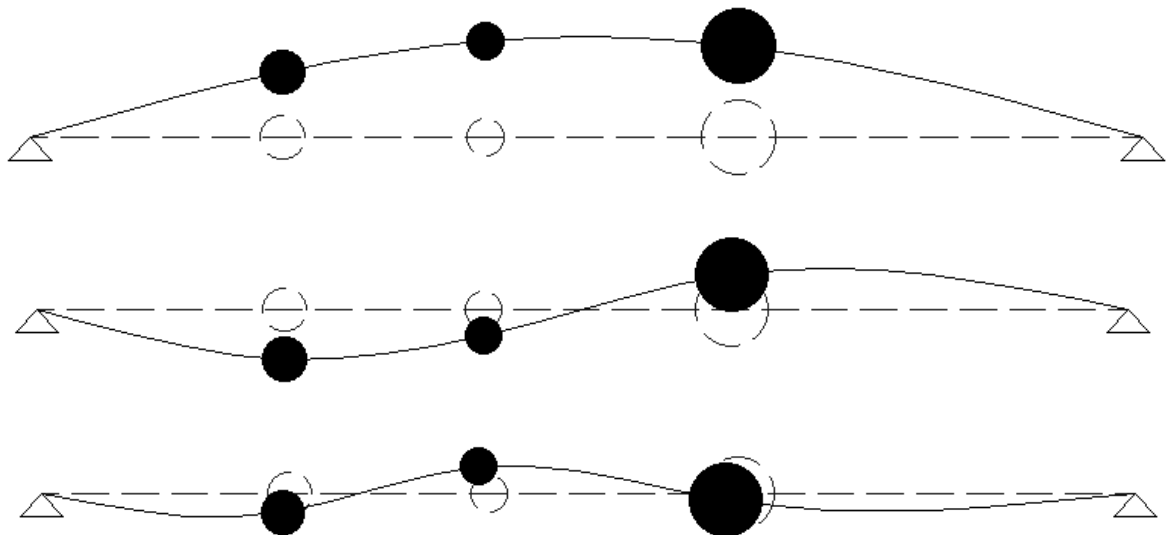
$$EI_1 = 250000 \text{ Nm}^2 \quad EI_2 = 432000 \text{ Nm}^2 \quad EI_3 = 686000 \text{ Nm}^2$$

Primer 3.a: Prostoležeči nosilec s tremi koncentriranimi masami

Dolžina $L=2.2$ m, prva koncentrirana masa ($M_1=300$ kg) se nahaja na razdalji 0.5 m, druga ($M_2=250$ kg) na razdalji 0.9 m od leve podpore, tretja ($M_3=500$ kg) na razdalji 1.4 m od leve podpore (prerez $b/h = 10/12$ cm, $E=30$ GPa).

Identifikacija z vsemi decimalnimi mesti

Frekvence	osnovni sistem
1	8.04315487892137 Hz
2	33.9510584765251 Hz
3	100.63446838507 Hz



Osnovni sistem

$$\lambda_1 = 3.9155015495638426 \cdot 10^{-4}$$

$$\lambda_2 = 2.197523995761662 \cdot 10^{-5}$$

$$\lambda_3 = 2.501190381168865 \cdot 10^{-6}$$

$$A_o = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 4.1602658529516976 \cdot 10^{-4}$$

$$\det_o = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 = 2.1521264052500576 \cdot 10^{-14}$$

$$B_o = (\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2) \cdot \det_o = 9.63871435073647 \cdot 10^{-9}$$

Sistemi z dodatno maso

Frekvence	$\Delta M_1=50$ kg	$\Delta M_2=50$ kg	$\Delta M_3=50$ kg
1	7.93443324054552 Hz	7.81440572141491 Hz	7.83437175997695 Hz
2	32.6849396645967 Hz	33.5902584823817 Hz	33.3224088806698 Hz
3	98.1046322390441 Hz	95.5710994477659 Hz	100.366689415056 Hz

Sistem z dodatno maso 50 kg v prvi prostostni stopnji

$$\lambda_1 = 4.0235411051817453 \cdot 10^{-4}$$

$$\lambda_2 = 2.3710727976331528 \cdot 10^{-5}$$

$$\lambda_3 = 2.6318506162497317 \cdot 10^{-6}$$

$$A_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 4.286966891107558 \cdot 10^{-4}$$

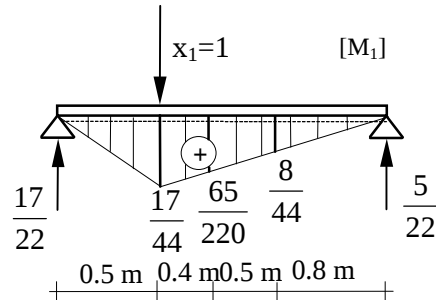
$$\det_1 = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 = 2.5108141394532497 \cdot 10^{-14}$$

$$B_1 = (\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2) \cdot \det_1 = 1.0661447872409377 \cdot 10^{-8}$$

Identificirani vrednosti sta:

$$M_1 = \frac{\det_o}{\det_1 - \det_o} \cdot \Delta M_1 = 300 \text{ kg}$$

$$d_{11} = \frac{A_1 - A_o}{\Delta M_1} = 2.534020763117213 \cdot 10^{-7}$$



Pomik pod silo je tako:

$$d_{11} = \frac{2.487947659 \cdot 10^{-2}}{EI} + \frac{4.676308541 \cdot 10^{-2}}{EI} + \frac{2.901170799 \cdot 10^{-2}}{EI} + \frac{8.815426996 \cdot 10^{-3}}{EI} + \frac{0.109469697}{EI}$$

Tako sledi:

$$EI = \frac{0.109469697}{d_{11}} = \frac{0.109469697}{2.534020763117213 \cdot 10^{-7}} = 432000 \text{ Nm}^2$$

Sistem z dodatno maso 50 kg v drugi prostostni stopnji

$$\lambda_1 = 4.1480917277137596 \cdot 10^{-4}$$

$$\lambda_2 = 2.244985661975212 \cdot 10^{-5}$$

$$\lambda_3 = 2.773237722476921 \cdot 10^{-6}$$

$$A_2 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 4.4003226711360503 \cdot 10^{-4}$$

$$\det_2 = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 = 2.5825516863260783 \cdot 10^{-14}$$

$$B_2 = (\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2) \cdot \det_2 = 1.0525029688076497 \cdot 10^{-8}$$

$$M_2 = \frac{\det_o}{\det_2 - \det_o} \cdot \Delta M_2 = 250 \text{ kg}$$

$$d_{22} = \frac{A_2 - A_o}{\Delta M_2} = 4.801136363687055 \cdot 10^{-7}$$

$$EI = \frac{0.207409091}{d_{22}} = \frac{0.207409091}{4.801136363687055 \cdot 10^{-7}} = 432000 \text{ Nm}^2$$

Sistem z dodatno maso 50 kg v tretji prostostni stopnji

$$\lambda_1 = 4.126975695294109 \cdot 10^{-4}$$

$$\lambda_2 = 2.281221652805847 \cdot 10^{-5}$$

$$\lambda_3 = 2.5145545691922183 \cdot 10^{-6}$$

$$A_3 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 4.380243406266616 \cdot 10^{-4}$$

$$\det_3 = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 = 2.3673390457550846 \cdot 10^{-14}$$

$$B_3 = (\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2) \cdot \det_3 = 1.0509659439167123 \cdot 10^{-8}$$

$$M_3 = \frac{\det_0}{\det_3 - \det_0} \cdot \Delta M_3 = 500 \text{ kg}$$

$$d_{33} = \frac{A_3 - A_0}{\Delta M_3} = 4.3995510662983704 \cdot 10^{-7}$$

$$d_{33} = \frac{5.509641873 \cdot 10^{-3}}{EI} + \frac{2.662258953 \cdot 10^{-2}}{EI} + \frac{8.8815427 \cdot 10^{-2}}{EI} + \frac{6.911294767 \cdot 10^{-2}}{EI}$$

$$d_{33} = \frac{0.19006060606}{EI}$$

$$EI = \frac{0.19006060606}{d_{33}} = \frac{0.19006060606}{4.3995510662983704 \cdot 10^{-7}} = 431999.999991 \text{ Nm}^2$$

Iz vendiagonalnih členov sedaj ni več mogoče identificirati direktno oz. ločeno, ampak se zapiše linearni sistem enačb:

$$\frac{B_p - B_0}{\Delta M_p} = \sum_{i=1}^3 M_i \cdot (d_{pp} \cdot d_{ii} - d_{ip}^2)$$

ki ima obliko:

$$\begin{aligned}
 &2.045467043345812 \cdot 10^{-11} = \\
 &250 \cdot (1.2166179232140073 \cdot 10^{-13} - d_{12}^2) + 500 \cdot (1.1148553750394545 \cdot 10^{-13} - d_{13}^2) \\
 &1.772630674680053 \cdot 10^{-11} = \\
 &300 \cdot (1.2166179232140073 \cdot 10^{-13} - d_{12}^2) + 500 \cdot (2.1122844608303264 \cdot 10^{-13} - d_{23}^2) \\
 &1.7418901768613044 \cdot 10^{-11} = \\
 &300 \cdot (1.1148553750394545 \cdot 10^{-13} - d_{13}^2) + 250 \cdot (2.1122844608303264 \cdot 10^{-13} - d_{23}^2)
 \end{aligned}$$

Če se kot neznanke vzamejo kvadrati izvendiagonalnih členov, se sistem reši kot sistem linearnih enačb, ki vodi do rešitev:

$$\begin{aligned}
 d_{12} &= \sqrt{1.0927161277787754 \cdot 10^{-13}} = 3.305625701404766 \cdot 10^{-7} \\
 d_{13} &= \sqrt{7.677128641163905 \cdot 10^{-14}} = 2.770763187492555 \cdot 10^{-7} \\
 d_{23} &= \sqrt{1.8320994031825327 \cdot 10^{-13}} = 4.2803030303735885 \cdot 10^{-7}
 \end{aligned}$$

Ker pa velja:

$$\begin{aligned}
 d_{13} &= \frac{1.170798898 \cdot 10^{-2}}{EI} + \frac{3.426997245 \cdot 10^{-2}}{EI} + \frac{4.903581268 \cdot 10^{-2}}{EI} + \frac{2.468319559 \cdot 10^{-2}}{EI} \\
 &= \frac{1.196969696 \cdot 10^{-1}}{EI}
 \end{aligned}$$

sledi:

$$EI = \frac{0.119696969696}{d_{13}} = \frac{0.119696969696}{2.770763187492555 \cdot 10^{-7}} = 431999.999965 \text{ Nm}^2$$

Slično sledi še iz preostalih dveh izvendiagonalnih členov:

$$\begin{aligned}
 d_{12} &= \frac{1.90254821 \cdot 10^{-2}}{EI} + \frac{5.568870524 \cdot 10^{-2}}{EI} + \frac{5.222107438 \cdot 10^{-2}}{EI} + \frac{1.58677686 \cdot 10^{-2}}{EI} \\
 &= \frac{1.428030303 \cdot 10^{-1}}{EI}
 \end{aligned}$$

od koder spet sledi:

$$EI = \frac{0.1428030303}{d_{12}} = \frac{0.1428030303}{2.770763187492555 \cdot 10^{-7}} = 431999.99997925 \text{ Nm}^2$$

kot tudi:

$$\begin{aligned}
 d_{23} &= \frac{8.953168042 \cdot 10^{-3}}{EI} + \frac{4.326170799 \cdot 10^{-2}}{EI} + \frac{8.826446283 \cdot 10^{-2}}{EI} + \frac{4.442975207 \cdot 10^{-2}}{EI} \\
 &= \frac{1.849090909 \cdot 10^{-1}}{EI}
 \end{aligned}$$

od koder ponovno sledi:

$$EI = \frac{0.1849090909}{d_{23}} = \frac{0.1849090909}{4.2803030303735885 \cdot 10^{-7}} = 431999.9999716398 \text{ Nm}^2$$

V tem primeru direktna identifikacija izvendiagonalnih členov dejansko ni potrebna.

Primer 3.b – Prostoležeči nosilec nekonstantnega prereza s tremi koncentriranimi masami

Dolžina $L=2.2$ m, prva koncentrirana masa ($M_1=300$ kg) se nahaja na razdalji 0.5 m, druga ($M_2=250$ kg) na razdalji 0.9 m od leve podpore, tretja ($M_3=500$ kg) na razdalji 1.4 m od leve podpore. Prečni prerezi nosilca med podporama in masama so različni - štiri različni odseki. Vsi prerezi so široki 10 cm, višine pa so 10 cm, 12 cm, 8 cm ter 14 cm, modul elastičnosti pa znaša $E=30$ GPa.

Identifikacija z vsemi decimalnimi mesti

Frekvence	osnovni sistem
1	5.67171676223372 Hz
2	28.7757661483628 Hz
3	74.7437982668863 Hz

Osnovni sistem

$$\lambda_1 = 7.874286169533371 \cdot 10^{-4}$$

$$\lambda_2 = 3.0590492732502346 \cdot 10^{-5}$$

$$\lambda_3 = 4.534087906320772 \cdot 10^{-6}$$

$$A_o = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 8.225531975921601 \cdot 10^{-4}$$

$$\det_o = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 = 1.0921633590076135 \cdot 10^{-13}$$

$$B_o = (\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2) \cdot \det_o = 2.779679993664128 \cdot 10^{-8}$$

Sistemi z dodatno maso

Frekvence	$\Delta M_1=50$ kg	$\Delta M_2=50$ kg	$\Delta M_3=50$ kg
1	5.6022686794895 Hz	5.50408998034201 Hz	5.52373882443463 Hz
2	27.6757691920558 Hz	28.4638643673377 Hz	28.257814541622 Hz
3	72.8416149038559 Hz	71.0798633762355 Hz	74.5158302677198 Hz

Sistem z dodatno maso 50 kg v prvi prostostni stopnji

$$\lambda_1 = 8.070722158486457 \cdot 10^{-4}$$

$$\lambda_2 = 3.3070507768389604 \cdot 10^{-5}$$

$$\lambda_3 = 4.773985901799046 \cdot 10^{-6}$$

$$A_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 8.449167095188343 \cdot 10^{-4}$$

$$\det_1 = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 = 1.2741905854997119 \cdot 10^{-13}$$

$$B_1 = (\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2) \cdot \det_1 = 3.070111750192083 \cdot 10^{-8}$$

Identificirani masa in podajnost sta:

$$M_1 = \frac{\det_o}{\det_1 - \det_o} \cdot \Delta M_1 = 300.0000000151141 \text{ kg}$$

$$d_{11} = \frac{A_1 - A_o}{\Delta M_1} = 4.472702385334838 \cdot 10^{-7}$$

Sistem z dodatno maso 50 kg v drugi prostostni stopnji

$$\lambda_1 = 8.361211574851695 \cdot 10^{-4}$$

$$\lambda_2 = 3.1264575812541424 \cdot 10^{-5}$$

$$\lambda_3 = 5.013570133438402 \cdot 10^{-6}$$

$$A_2 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 8.723993034311494 \cdot 10^{-4}$$

$$\det_2 = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 = 1.310596030794417 \cdot 10^{-13}$$

$$B_2 = (\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2) \cdot \det_2 = 3.048967252329694 \cdot 10^{-8}$$

$$M_2 = \frac{\det_0}{\det_2 - \det_0} \cdot \Delta M_2 = 250.0000000168464 \text{ kg}$$

$$d_{22} = \frac{A_2 - A_0}{\Delta M_2} = 9.96922116779785 \cdot 10^{-7}$$

Sistem z dodatno maso 50 kg v tretji prostostni stopnji

$$\lambda_1 = 8.301832973527258 \cdot 10^{-4}$$

$$\lambda_2 = 3.1722187100067575 \cdot 10^{-5}$$

$$\lambda_3 = 4.56187282245785 \cdot 10^{-6}$$

$$A_3 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 8.664673572752514 \cdot 10^{-4}$$

$$\det_3 = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 = 1.2013796949000547 \cdot 10^{-13}$$

$$B_3 = (\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2) \cdot \det_3 = 3.026713309102677 \cdot 10^{-8}$$

$$M_3 = \frac{\det_0}{\det_3 - \det_0} \cdot \Delta M_3 = 500.00000003809043 \text{ kg}$$

$$d_{33} = \frac{A_3 - A_0}{\Delta M_3} = 8.782831936618246 \cdot 10^{-7}$$

Posameznih upogibnih togosti pa sedaj ni več mogoče direktni identificirati, ampak se lahko zgolj zapiše sistem enačb:

$$d_{11} = \frac{2.487947659 \cdot 10^{-2}}{EI_1} + \frac{4.676308541 \cdot 10^{-2}}{EI_2} + \frac{2.901170799 \cdot 10^{-2}}{EI_3} + \frac{8.815426996 \cdot 10^{-3}}{EI_4} \quad (1)$$

$$d_{22} = \frac{1.454889808 \cdot 10^{-3}}{EI_1} + \frac{7.030027547 \cdot 10^{-2}}{EI_2} + \frac{9.399793392 \cdot 10^{-2}}{EI_3} + \frac{2.856198348 \cdot 10^{-2}}{EI_4} \quad (2)$$

$$d_{33} = \frac{5.509641873 \cdot 10^{-3}}{EI_1} + \frac{2.662258953 \cdot 10^{-2}}{EI_2} + \frac{8.8815427 \cdot 10^{-2}}{EI_3} + \frac{6.911294767 \cdot 10^{-2}}{EI_4} \quad (3)$$

V treh enačbah, ki pripadajo diagonalnim členom podajnostne matrike, nastopajo štiri neznanke – štiri upogibne togosti. Za rešitev sistema je tako potrebna še ena enačba, ki se pridobi iz izvendiagonalnih členov podajnostne matrike.

Četrta enačba je tako npr. enačba za prvi izvendiagonalni člen prve vrstice podajnostne matrike:

$$d_{12} = \frac{1.90254821 \cdot 10^{-2}}{EI_1} + \frac{5.568870524 \cdot 10^{-2}}{EI_2} + \frac{5.222107438 \cdot 10^{-2}}{EI_3} + \frac{1.58677686 \cdot 10^{-2}}{EI_4} \quad (4)$$

Da pa se ta enačba lahko uporabi, je potrebno najprej uporabljeni izvendiagonalni člen d_{12} identificirati. Ker izvendiagonalnih členov sedaj ni več mogoče posamično identificirati, se zapiše linearni sistem enačb:

$$\frac{B_p - B_o}{\Delta M_p} = \sum_{i=1}^3 M_i \cdot (d_{pp} \cdot d_{ii} - d_{ip}^2)$$

ki zavzame obliko.

$$5.808635130559093 \cdot 10^{-11} =$$

$$250 \cdot (4.4589359297140003 \cdot 10^{-13} - d_{12}^2) + 500 \cdot (3.9282993352907425 \cdot 10^{-13} - d_{13}^2)$$

$$5.38574517331132 \cdot 10^{-11} =$$

$$300 \cdot (4.4589359297140003 \cdot 10^{-13} - d_{12}^2) + 500 \cdot (8.75579940557456 \cdot 10^{-13} - d_{23}^2)$$

$$4.9406663087709754 \cdot 10^{-11} =$$

$$300 \cdot (3.9282993352907425 \cdot 10^{-13} - d_{13}^2) + 250 \cdot (8.75579940557456 \cdot 10^{-13} - d_{23}^2)$$

Rešitve sistema so:

$$d_{12} = \sqrt{4.0464734776956426 \cdot 10^{-13}} = 6.361189729677651 \cdot 10^{-7}$$

$$d_{13} = \sqrt{2.972803535274791 \cdot 10^{-13}} = 5.452342189623456 \cdot 10^{-7}$$

$$d_{23} = \sqrt{7.926127842198985 \cdot 10^{-13}} = 8.902880344135254 \cdot 10^{-7}$$

Sedaj je sistem enačba (1) – (4) mogoče rešiti in njegove rešitve so:

$$EI_1 = 249999.99244970898 \text{ Nm}^2$$

$$EI_2 = 431999.9939277919 \text{ Nm}^2$$

$$EI_3 = 128000.00047763248 \text{ Nm}^2$$

$$EI_4 = 685999.9863230366 \text{ Nm}^2$$

Ker so na voljo vsi izvendiagonalni členi, se lahko namesto enačbe (4), ki upošteva d_{12} , uporabita analogni enačbi, ki upoštevata d_{13} ali d_{23} , kar omogo dodatno kontrolo ali s povprečenjem izboljšanje rezultatov.

Primer 3.c – Prostoležeči nosilec s tremi koncentriranimi masami

Dolžina $L=2.2$ m, prva koncentrirana masa ($M_1=300$ kg) se nahaja na razdalji 0.5 m, druga ($M_2=250$ kg) na razdalji 0.9 m od leve podpore, tretja ($M_3=500$ kg) na razdalji 1.4 m od leve podpore.

K identifikaciji se pristopi, kakor da so prečni prerezi nosilca med podporama in masama različni - štirje različni odseki.

Identifikacija z vsemi decimalnimi mesti

Frekvence	osnovni sistem
1	7.69100596493895 Hz
2	33.8335302966845 Hz
3	99.4338265155942 Hz

Osnovni sistem

$$A_o = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 4.529170561138011 \cdot 10^{-4}$$

$$\det_o = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 = 2.427680648392268 \cdot 10^{-14}$$

$$B_o = (\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2) \cdot \det_o = 1.0629671730238204 \cdot 10^{-8}$$

Sistemi z dodatno maso

Frekvence	$\Delta M_1=50$ kg	$\Delta M_2=50$ kg	$\Delta M_3=50$ kg
1	7.59010228486059 Hz	7.47168930646602 Hz	7.48997743103601 Hz
2	32.554618567556 Hz	33.4736911079048 Hz	33.2169668972423 Hz
3	96.9462427315482 Hz	94.4390446433099 Hz	99.158007490039 Hz

Sistem z dodatno maso 50 kg v prvi prostostni stopnji

$$A_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 4.662844625880098 \cdot 10^{-4}$$

$$\det_1 = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 = 2.8322940897612443 \cdot 10^{-14}$$

$$B_1 = (\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2) \cdot \det_1 = 1.1758396913569338 \cdot 10^{-8}$$

Identificirani masa in podajnost sta:

$$M_1 = \frac{\det_o}{\det_1 - \det_o} \cdot \Delta M_1 = 300.00000002204695 \text{ kg}$$

$$d_{11} = \frac{A_1 - A_o}{\Delta M_1} = 2.6734812948417394 \cdot 10^{-7}$$

Sistem z dodatno maso 50 kg v drugi prostostni stopnji

$$A_2 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 4.7918199855075274 \cdot 10^{-4}$$

$$\det_2 = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 = 2.913216778051377 \cdot 10^{-14}$$

$$B_2 = (\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2) \cdot \det_2 = 1.1610231971261736 \cdot 10^{-8}$$

$$M_2 = \frac{\det_o}{\det_2 - \det_o} \cdot \Delta M_2 = 250.0000000099603 \text{ kg}$$

$$d_{22} = \frac{A_2 - A_o}{\Delta M_2} = 5.252988487390326 \cdot 10^{-7}$$

Sistem z dodatno maso 50 kg v tretji prostostni stopnji

$$A_3 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 4.7705584661569394 \cdot 10^{-4}$$

$$\det_3 = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 = 2.6704487132237198 \cdot 10^{-14}$$

$$B_3 = (\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2) \cdot \det_3 = 1.1588090845627061 \cdot 10^{-8}$$

$$M_3 = \frac{\det_o}{\det_3 - \det_o} \cdot \Delta M_3 = 500.00000001601325 \text{ kg}$$

$$d_{33} = \frac{A_3 - A_o}{\Delta M_3} = 4.827758100378566 \cdot 10^{-7}$$

Posameznih upogibnih togosti pa sedaj ni mogoče direktni identificirati, ampak se lahko zgolj zapiše sistem enačb:

$$d_{11} = \frac{2.487947659 \cdot 10^{-2}}{EI_1} + \frac{4.676308541 \cdot 10^{-2}}{EI_2} + \frac{2.901170799 \cdot 10^{-2}}{EI_3} + \frac{8.815426996 \cdot 10^{-3}}{EI_4} \quad (1)$$

$$d_{22} = \frac{1.454889808 \cdot 10^{-3}}{EI_1} + \frac{7.030027547 \cdot 10^{-2}}{EI_2} + \frac{9.399793392 \cdot 10^{-2}}{EI_3} + \frac{2.856198348 \cdot 10^{-2}}{EI_4} \quad (2)$$

$$d_{33} = \frac{5.509641873 \cdot 10^{-3}}{EI_1} + \frac{2.662258953 \cdot 10^{-2}}{EI_2} + \frac{8.8815427 \cdot 10^{-2}}{EI_3} + \frac{6.911294767 \cdot 10^{-2}}{EI_4} \quad (3)$$

V treh enačbah, ki pripadajo diagonalnim členom podajnostne matrike, nastopajo štiri neznanke. Za rešitev sistema je tako potrebna še ena enačba, ki se pridobi iz izvendiagonalnih členov podajnostne matrike.

Četrta enačba je tako npr. enačba za prvi izvendiagonalni člen prve vrstice podajnostne matrike:

$$d_{12} = \frac{1.90254821 \cdot 10^{-2}}{EI_1} + \frac{5.568870524 \cdot 10^{-2}}{EI_2} + \frac{5.222107438 \cdot 10^{-2}}{EI_3} + \frac{1.58677686 \cdot 10^{-2}}{EI_4} \quad (4)$$

Da pa se ta enačba lahko uporabi, je potrebno najprej uporabljeni izvendiagonalni člen identificirati. Ker izvendiagonalnih členov sedaj ni več mogoče posamično identificirati, se zapiše linearni sistem enačb:

$$\frac{B_p - B_o}{\Delta M_p} = \sum_{i=1}^3 M_i \cdot (d_{pp} \cdot d_{ii} - d_{ip}^2)$$

ki zavzame obliko.

$$\begin{aligned} & 2.257450366622685 \cdot 10^{-11} = \\ & 250 \cdot (1.4043766463057037 \cdot 10^{-13} - d_{12}^2) + 500 \cdot (1.2906920977382785 \cdot 10^{-13} - d_{13}^2) \\ & 1.9611204820470644 \cdot 10^{-11} = \\ & 300 \cdot (1.4043766463057037 \cdot 10^{-13} - d_{12}^2) + 500 \cdot (2.5360157721194 \cdot 10^{-13} - d_{23}^2) \\ & 1.9168382307777142 \cdot 10^{-11} = \\ & 300 \cdot (1.2906920977382785 \cdot 10^{-13} - d_{13}^2) + 250 \cdot (2.5360157721194 \cdot 10^{-13} - d_{23}^2) \end{aligned}$$

Rešitve sistema so:

$$d_{12} = \sqrt{1.264979236214703 \cdot 10^{-13}} = 3.5566546588257664 \cdot 10^{-7}$$

$$d_{13} = \sqrt{9.089007294663295 \cdot 10^{-14}} = 3.0147980520531216 \cdot 10^{-7}$$

$$d_{23} = \sqrt{2.227430121780617 \cdot 10^{-13}} = 4.7195657869984363 \cdot 10^{-7}$$

Sedaj je sistem enačba (1) – (4) mogoče rešiti in njegove rešitve so:

$$EI_1 = 432000.00161572156 \text{ Nm}^2$$

$$EI_2 = 431999.99898765446 \text{ Nm}^2$$

$$EI_3 = 357832.335962884 \text{ Nm}^2$$

$$EI_4 = 431439.2285327994 \text{ Nm}^2$$

Rezultat jasno pokaže, da je v odseku med drugo in tretjo maso očitno oslABLJENA upogibna togost prereza.

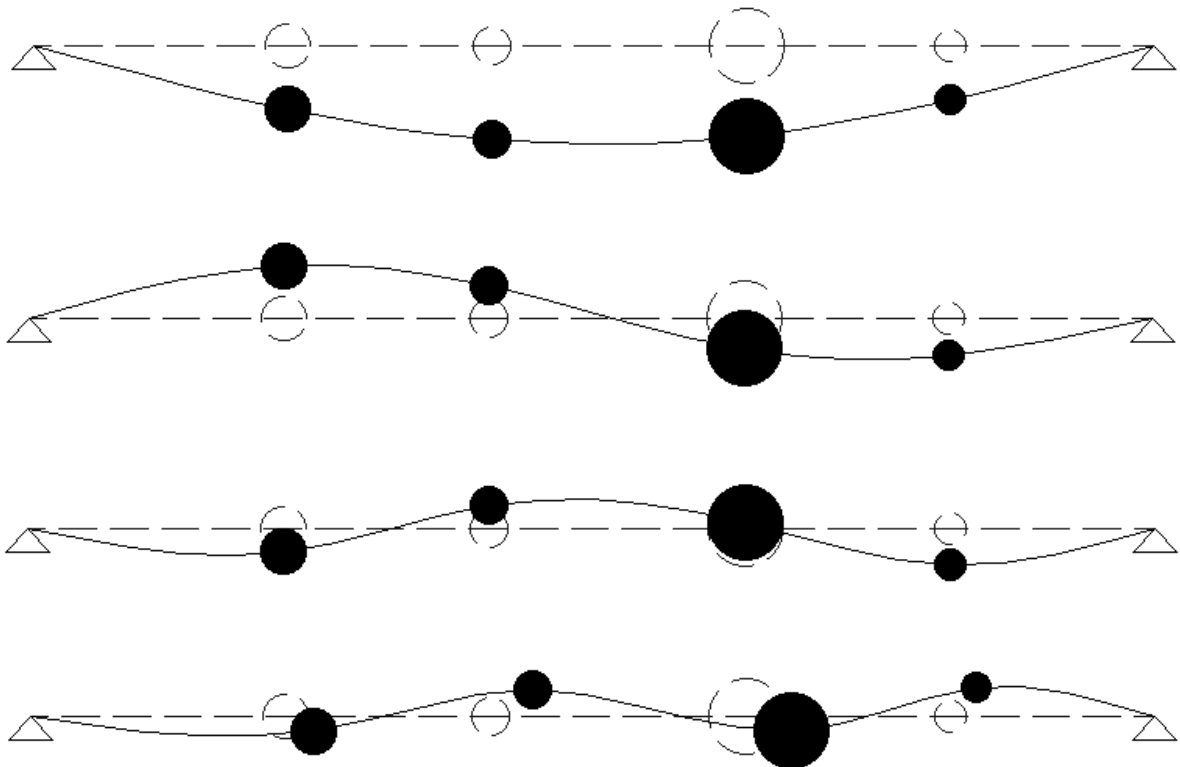
V takem primeru je skoraj nujno, da se izvede kontrola preračuna npr. tako, da se namesto enačbe (4), ki upošteva d_{12} , uporabi ena izmed analognih enačb, ki upoštevatata d_{13} ali d_{23} .

Primer 4: Prostoležeči nosilec s štirimi koncentriranimi masami

Dolžina $L=2.2$ m, prva koncentrirana masa ($M_1=300$ kg) se nahaja na razdalji 0.5 m, druga ($M_2=250$ kg) na razdalji 0.9 m od leve podpore, tretja ($M_3=500$ kg) na razdalji 1.4 m od leve podpore, četrta ($M_4=200$ kg) pa na razdalji 1.8 m od leve podpore (prerez $b/h = 10/12$ cm, $E=30$ GPa).

Identifikacija z vsemi decimalnimi mesti

Frekvence	osnovni sistem
1	7.75297630709333 Hz
2	31.4232742892345 Hz
3	83.8947952241058 Hz
4	121.010021348447 Hz



Osnovni sistem

$$\lambda_1 = 4.2140855671659997 \cdot 10^{-4}$$

$$\lambda_2 = 2.5652954486625304 \cdot 10^{-5}$$

$$\lambda_3 = 3.598903706048349 \cdot 10^{-6}$$

$$\lambda_4 = 1.729806752802417 \cdot 10^{-6}$$

$$A_o = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 4.5239022166207606 \cdot 10^{-4}$$

$$\det_o = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \cdot \lambda_4 = 6.729899133556349 \cdot 10^{-20}$$

$$B_o = (\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 + \omega_4^2) \cdot \det_o = 6.038849607789277 \cdot 10^{-14}$$

Sistemi z dodatno maso

v	$\Delta M_1=70 \text{ kg}$	$\Delta M_2=70 \text{ kg}$	$\Delta M_3=70 \text{ kg}$	$\Delta M_4=70 \text{ kg}$
1	7.61982384915107	7.47224967822678	7.49180841349455	7.65662160828096
2	29.9218493530745	30.834392661111	30.9194936155617	30.6295206458647
3	81.6108611587342	81.3694782595782	83.7112091481906	77.9651026849776
4	119.689124443255	116.606553472977	119.459632104516	116.421107055714

Sistem z dodatno maso 70 kg v prvi prostostni stopnji

$$\lambda_1 = 4.362650275814651 \cdot 10^{-4}$$

$$\lambda_2 = 2.829198369593834 \cdot 10^{-5}$$

$$\lambda_3 = 3.803157771119597 \cdot 10^{-6}$$

$$\lambda_4 = 1.7681979521543561 \cdot 10^{-6}$$

$$A_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 4.701283670006774 \cdot 10^{-4}$$

$$\det_1 = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \cdot \lambda_4 = 8.300208931089141 \cdot 10^{-20}$$

$$B_1 = (\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 + \omega_4^2) \cdot \det_1 = 7.189016955641536 \cdot 10^{-14}$$

Identificirani vrednosti sta:

$$M_1 = \frac{\det_o}{\det_1 - \det_o} \cdot \Delta M_1 = 300 \text{ kg}$$

$$d_{11} = \frac{A_1 - A_o}{\Delta M_1} = 2.5340207626573345 \cdot 10^{-7}$$

Tako sledi:

$$EI = \frac{0.109469697}{d_{11}} = \frac{0.109469697}{2.5340207626573345 \cdot 10^{-7}} = 432000.0002099555 \text{ Nm}^2$$

Sistem z dodatno maso 70 kg v drugi prostostni stopnji

$$\lambda_1 = 4.536673381234121 \cdot 10^{-4}$$

$$\lambda_2 = 2.664216207824492 \cdot 10^{-5}$$

$$\lambda_3 = 3.8257554064840625 \cdot 10^{-6}$$

$$\lambda_4 = 1.8629205994531134 \cdot 10^{-6}$$

$$A_2 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 4.8599817620759416 \cdot 10^{-4}$$

$$\det_2 = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \cdot \lambda_4 = 8.614270893628596 \cdot 10^{-20}$$

$$B_2 = (\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 + \omega_4^2) \cdot \det_2 = 7.21804029460967 \cdot 10^{-14}$$

Identificirani vrednosti sta:

$$M_2 = \frac{\det_o}{\det_2 - \det_o} \cdot \Delta M_2 = 249.99999964491215 \text{ kg}$$

$$d_{22} = \frac{A_2 - A_o}{\Delta M_2} = 4.801136363645443 \cdot 10^{-7}$$

Tako sledi:

$$EI = \frac{0.207409091}{d_{22}} = \frac{0.207409091}{4.801136363645443 \cdot 10^{-7}} = 432000.0001885321 \text{ Nm}^2$$

Sistem z dodatno maso 70 kg v tretji prostostni stopnji

$$\lambda_1 = 4.513016671466111 \cdot 10^{-4}$$

$$\lambda_2 = 2.649570733379504 \cdot 10^{-5}$$

$$\lambda_3 = 3.6147064429073834 \cdot 10^{-6}$$

$$\lambda_4 = 1.7749982017975 \cdot 10^{-6}$$

$$A_3 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 4.83187079125111 \cdot 10^{-4}$$

$$\det_3 = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \cdot \lambda_4 = 7.672085011762477 \cdot 10^{-20}$$

$$B_3 = (\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 + \omega_4^2) \cdot \det_2 = 6.751329442939606 \cdot 10^{-14}$$

$$M_3 = \frac{\det_o}{\det_3 - \det_o} \cdot \Delta M_3 = 500.0000002609681 \text{ kg}$$

$$d_{33} = \frac{A_3 - A_o}{\Delta M_3} = 4.399551066147852 \cdot 10^{-7}$$

$$EI = \frac{0.19006060606}{d_{33}} = \frac{0.19006060606}{4.399551066147852 \cdot 10^{-7}} = 432000.00000548415 \text{ Nm}^2$$

Sistem z dodatno maso 70 kg v četrti prostostni stopnji

$$\lambda_1 = 4.320817207806377 \cdot 10^{-4}$$

$$\lambda_2 = 2.6999757469445203 \cdot 10^{-5}$$

$$\lambda_3 = 4.167155942488608 \cdot 10^{-6}$$

$$\lambda_4 = 1.8688601942492698 \cdot 10^{-6}$$

$$A_4 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 4.651174943868208 \cdot 10^{-4}$$

$$\det_4 = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \cdot \lambda_4 = 9.085363830087004 \cdot 10^{-20}$$

$$B_4 = (\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 + \omega_4^2) \cdot \det_2 = 7.399202728577667 \cdot 10^{-14}$$

$$M_4 = \frac{\det_o}{\det_4 - \det_o} \cdot \Delta M_4 = 200.0000000181762 \text{ kg}$$

$$d_{44} = \frac{A_4 - A_o}{\Delta M_4} = 1.8181818178206752 \cdot 10^{-7}$$

$$EI = \frac{7.854545457 \cdot 10^{-2}}{d_{44}} = \frac{0.19006060606 \cdot 10^{-2}}{1.8181818178206752} = 432000.00022080756 \text{ Nm}^2$$

Izvendiagonalnih členov ni potrebno identificirati, saj je prerez konstanten vzdolž celotnega nosilca.

Primer 4.b: Prostoležeči nosilec s štirimi koncentriranimi masami, identifikacija podajnosti oz. upogibne togosti zgolj s prvimi tremi lastnimi frekvencami

Dolžina $L=2.2$ m, prva koncentrirana masa ($M_1=300$ kg) se nahaja na razdalji 0.5 m, druga ($M_2=250$ kg) na razdalji 0.9 m od leve podpore, tretja ($M_3=500$ kg) na razdalji 1.4 m od leve podpore, četrta ($M_4=200$ kg) pa na razdalji 1.8 m od leve podpore (prerez $b/h = 10/12$ cm, $E=30$ GPa).

Ker je višje frekvence običajno težje identificirati, se tako sedaj simulira situacija, ko se upogibna togost identificira zgolj s prvimi tremi lastnimi frekvencami.

Identifikacija z vsemi decimalnimi mesti

Frekvence	osnovni sistem
1	7.75297630709333 Hz
2	31.4232742892345 Hz
3	83.8947952241058 Hz

Osnovni sistem

$$A_o = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 4.5066041490927363 \cdot 10^{-4}$$

Sistemi z dodatno maso

v	$\Delta M_1=70$ kg	$\Delta M_2=70$ kg	$\Delta M_3=70$ kg	$\Delta M_4=70$ kg
1	7.61982384915107	7.47224967822678	7.49180841349455	7.65662160828096
2	29.9218493530745	30.834392661111	30.9194936155617	30.6295206458647
3	81.6108611587342	81.3694782595782	83.7112091481906	77.9651026849776

Sistem z dodatno maso 70 kg v prvi prostostni stopnji

$$A_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 4.6836016904852303 \cdot 10^{-4}$$

$$d_{11} = \frac{A_1 - A_o}{\Delta M_1} = 2.528536305607057 \cdot 10^{-7}$$

Tako sledi:

$$EI = \frac{0.109469697}{d_{11}} = \frac{0.109469697}{2.528536305607057 \cdot 10^{-7}} = 432937.018769514 \text{ Nm}^2$$

Sistem z dodatno maso 70 kg v drugi prostostni stopnji

$$A_2 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 4.8413525560814106 \cdot 10^{-4}$$

$$d_{22} = \frac{A_2 - A_o}{\Delta M_2} = 4.782120099838204 \cdot 10^{-7}$$

Tako sledi:

$$EI = \frac{0.207409091}{d_{22}} = \frac{0.207409091}{4.782120099838204 \cdot 10^{-7}} = 433717.86293493 \text{ Nm}^2$$

Sistem z dodatno maso 70 kg v tretji prostostni stopnji

$$A_3 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 4.8141208092331353 \cdot 10^{-4}$$

$$d_{33} = \frac{A_3 - A_o}{\Delta M_3} = 4.3930951448628433 \cdot 10^{-7}$$

$$EI = \frac{0.19006060606}{d_{33}} = \frac{0.19006060606}{4.3930951448628433 \cdot 10^{-7}} = 432634.85035659035 \text{ Nm}^2$$

Sistem z dodatno maso 70 kg v četrti prostostni stopnji

$$A_4 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 4.6324863419257154 \cdot 10^{-4}$$

$$d_{44} = \frac{A_4 - A_o}{\Delta M_4} = 1.7983170404711298 \cdot 10^{-7}$$

$$EI = \frac{7.854545457 \cdot 10^{-2}}{d_{44}} = \frac{0.19006060606 \cdot 10^{-2}}{1.7983170404711298} = 436772.0085075898 \text{ Nm}^2$$

Povprečna vrednost upogibne togosti pa znaša:

$$EI_{\text{pov}} = 434015.4351421561 \text{ Nm}^2 \quad (+0.467\%)$$