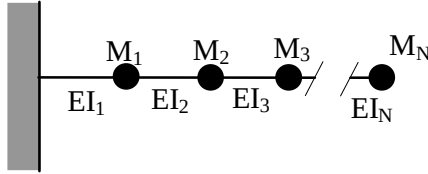


Analiza lastnega nihanja nosilcev s koncentriranimi masami

Izračun lastnih frekvenc konstrukcije z N koncentriranimi masami



Masna matrika

$$[M] = \begin{bmatrix} M_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & M_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & M_N \end{bmatrix}$$

Podajnostna matrika – virtualno delo, inverzija togostne matrike (Lagrangove enačbe 2. reda, MKE)

$$[d] = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1N} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{N1} & d_{N2} & \dots & d_{NN} \end{bmatrix}$$

Dinamična matrika

$$[DM] = [d] \cdot [M] = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1N} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{N1} & d_{N2} & \dots & d_{NN} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} M_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & M_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & M_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_1 \cdot d_{11} & M_2 \cdot d_{12} & \dots & M_N \cdot d_{1N} \\ M_1 \cdot d_{21} & M_2 \cdot d_{22} & \dots & M_N \cdot d_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_1 \cdot d_{N1} & M_2 \cdot d_{N2} & \dots & M_N \cdot d_{NN} \end{bmatrix}$$

Problem lastnih frekvenc se prevede v razvoj determinante:

$$|[DM] - \lambda \cdot [I]| = 0$$

$$\begin{vmatrix} M_1 \cdot d_{11} - \lambda & M_2 \cdot d_{12} & \dots & M_N \cdot d_{1N} \\ M_1 \cdot d_{21} & M_2 \cdot d_{22} - \lambda & \dots & M_N \cdot d_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_1 \cdot d_{N1} & M_2 \cdot d_{N2} & \dots & M_N \cdot d_{NN} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

kjer je $\lambda = \frac{1}{\omega^2}$

Determinanta vodi do karakterističnega polinoma reda N :

$$(-1)^N \cdot \lambda^N + (-1)^{N-1} \cdot A_0 \cdot \lambda^{N-1} + (-1)^{N-2} \cdot B_0 \cdot \lambda^{N-2} + \dots + \det_0 = 0$$

Število členov polinoma je seveda funkcija koeficienta N , za vsak $N > 1$ pa se pojavita naslednja koeficienta:

$$A_o = \text{tr}[DM] = \text{sled}[DM] = M_1 \cdot d_{11} + M_2 \cdot d_{22} + \dots + M_N \cdot d_{NN} = \sum_{i=1}^N M_i \cdot d_{ii}$$

$$\det_o = |DM| = \begin{vmatrix} M_1 \cdot d_{11} & M_2 \cdot d_{12} & \dots & M_N \cdot d_{1N} \\ M_1 \cdot d_{21} & M_2 \cdot d_{22} & \dots & M_N \cdot d_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_1 \cdot d_{N1} & M_2 \cdot d_{N2} & \dots & M_N \cdot d_{NN} \end{vmatrix}$$

Koeficienta se pojavita tudi pri $N=1$, vendar sta enaka, saj je dinamična matrika v bistvu skalar.

Determinanta se lahko dalje zapiše kot:

$$\det_o = M_1 \cdot M_2 \cdot \dots \cdot M_N \cdot \begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1N} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{N1} & d_{N2} & \dots & d_{NN} \end{vmatrix} = M_1 \cdot M_2 \cdot \dots \cdot M_N \cdot |d| = |d| \cdot \prod_{i=1}^N M_i$$

Rešitve oz. ničle karakterističnega polinoma so vrednosti $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_N$, iz katerih sledijo lastne frekvence:

$$\lambda_i = \frac{1}{\omega_i^2} \rightarrow \omega_i^2 = \frac{1}{\lambda_i} \rightarrow \omega_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} \rightarrow v_i = \frac{\omega_i}{2 \cdot \pi} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\lambda_i}} \quad i = 1, 2, \dots, N$$

Nato se izračunajo še lastnim frekvencam pripadajoči lastni vektorji.

Inverzna identifikacija nosilcev s koncentriranimi masami

Osnovni sistem

Vse lastne frekvence ω_i se izmerijo in izračunajo se ustrezne pripadajoče vrednosti λ_i , kar omogoči rekonstruiranje karakterističnega polinoma:

$$(-1)^N \cdot (\lambda - \lambda_1) \cdot (\lambda - \lambda_2) \cdot (\lambda - \lambda_3) \cdot \dots \cdot (\lambda - \lambda_N) = 0$$

Razvoj izraza vodi do:

$$\begin{aligned} & (-1)^N \cdot \lambda^N + (-1)^{N-1} \cdot (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \dots + \lambda_N) \cdot \lambda^{N-1} + \dots + \\ & + (-1)^1 \cdot (\lambda_2 \cdot \lambda_3 \cdot \lambda_4 \cdot \dots \cdot \lambda_N + \lambda_1 \cdot \lambda_3 \cdot \lambda_4 \cdot \dots \cdot \lambda_N + \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_4 \cdot \dots \cdot \lambda_N + \dots + \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \cdot \dots \cdot \lambda_{N-1}) \cdot \lambda \\ & + (\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \cdot \dots \cdot \lambda_N) = 0 \\ & (-1)^N \cdot \lambda^N + (-1)^{N-1} \cdot \lambda^{N-1} \cdot \sum_{i=1}^N \lambda_i + \dots + (-1)^1 \cdot P_o \cdot \lambda + \prod_{i=1}^N \lambda_i = 0 \end{aligned}$$

Iz primerjave obeh izrazov za karakteristični polinom je sedaj jasno, da je vse koeficiente A_0 , B_0 , ..., $\det_0$ mogoče izraziti z lastnimi frekvencami ω_i oz. iz njih izpeljanimi koeficienti λ_i . Najbolj zanimiva sta koeficienta A_0 ter $\det_0$, ki vodita do:

$$A_0 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \dots + \lambda_N = \sum_{i=1}^N \lambda_i$$

$$\det_0 = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \cdot \dots \cdot \lambda_N = \prod_{i=1}^N \lambda_i$$

Z uporabo zadnje zveze je mogoče ustrezno zapisati tudi koeficient P_0 :

$$\begin{aligned} P_0 &= \lambda_2 \cdot \lambda_3 \cdot \lambda_4 \cdot \dots \cdot \lambda_N + \lambda_1 \cdot \lambda_3 \cdot \lambda_4 \cdot \dots \cdot \lambda_N + \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_4 \cdot \dots \cdot \lambda_N + \dots + \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \cdot \dots \cdot \lambda_{N-1} \\ &= \frac{\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \cdot \lambda_4 \cdot \dots \cdot \lambda_N}{\lambda_1} + \frac{\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \cdot \lambda_4 \cdot \dots \cdot \lambda_N}{\lambda_2} + \frac{\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \cdot \lambda_4 \cdot \dots \cdot \lambda_N}{\lambda_3} + \dots \\ &\quad + \frac{\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \cdot \dots \cdot \lambda_{N-1} \cdot \lambda_N}{\lambda_N} \\ &= \frac{\prod_{i=1}^N \lambda_i}{\lambda_1} + \frac{\prod_{i=1}^N \lambda_i}{\lambda_2} + \frac{\prod_{i=1}^N \lambda_i}{\lambda_3} + \dots + \frac{\prod_{i=1}^N \lambda_i}{\lambda_N} = \frac{\det_0}{\lambda_1} + \frac{\det_0}{\lambda_2} + \frac{\det_0}{\lambda_3} + \dots + \frac{\det_0}{\lambda_N} \\ &= \left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_3} + \dots + \frac{1}{\lambda_N} \right) \cdot \det_0 = (\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 + \dots + \omega_N^2) \cdot \det_0 \end{aligned}$$

Sistem z masi M_j dodano maso ΔM_j

Sedaj masi M_j dodamo znano maso ΔM_j . Spremeni se masna matrika in posledično tudi členi karakterističnega polinoma. Tako sledi (vse konstante imajo sedaj indeks j):

$$\begin{aligned} A_j &= M_1 \cdot d_{11} + M_2 \cdot d_{22} + \dots + (M_j + \Delta M_j) \cdot d_{jj} + \dots + M_N \cdot d_{NN} = \sum_{i=1}^N (M_i + \Delta M_j \cdot \delta_{ij}) \cdot d_{ii} \\ &= \Delta M_j \cdot d_{jj} + \sum_{i=1}^N M_i \cdot d_{ii} = \Delta M_j \cdot d_{jj} + A_0 \end{aligned}$$

in

$$\begin{aligned} \det_j &= M_1 \cdot M_2 \cdot \dots \cdot (M_j + \Delta M_j) \cdot \dots \cdot M_N \cdot |d| = |d| \cdot \prod_{i=1}^N (M_i + \Delta M_j \cdot \delta_{ij}) \\ &= M_1 \cdot M_2 \cdot \dots \cdot M_j \cdot \dots \cdot M_N \cdot |d| + M_1 \cdot M_2 \cdot \dots \cdot \Delta M_j \cdot \dots \cdot M_N \cdot |d| \\ &= \prod_{i=1}^N M_i \cdot |d| + M_1 \cdot M_2 \cdot \dots \cdot \Delta M_j \cdot \frac{M_j}{M_j} \cdot \dots \cdot M_N \cdot |d| \\ &= \det_0 + \frac{\Delta M_j}{M_j} \cdot M_1 \cdot M_2 \cdot \dots \cdot M_j \cdot \dots \cdot M_N \cdot |d| = \det_0 + \frac{\Delta M_j}{M_j} \cdot \prod_{i=1}^N M_i \cdot |d| \\ &= \det_0 + \frac{\Delta M_j}{M_j} \cdot \det_0 \end{aligned}$$

Določitev členov masne matrike ter diagonalnih členov podajnostne matrike

Dodatna masa se lahko doda vsaki koncentrirani masi, ($j=1,\dots,N$), in izmerijo se vse pripadajoče lastne frekvence posameznega sistema:

$$v_1^{(j)}, v_2^{(j)}, v_3^{(j)}, \dots, v_N^{(j)} \rightarrow \lambda_1^{(j)}, \lambda_2^{(j)}, \lambda_3^{(j)}, \dots, \lambda_N^{(j)}$$

kar omogoči direktno in enostavno določitev vrednosti diagonalnih koeficientov podajnostne in masne matrike.

Diagonalni člen podajnostne matrike se namreč izračuna iz:

$$A_j = A_o + \Delta M_j \cdot d_{jj} \rightarrow A_j - A_o = \Delta M_j \cdot d_{jj} \rightarrow d_{jj} = \frac{A_j - A_o}{\Delta M_j}$$

Velokost mase M_j pa sledi iz:

$$\det_j = \det_o + \frac{\Delta M_j}{M_j} \cdot \det_o \rightarrow \det_j - \det_o = \frac{\Delta M_j}{M_j} \cdot \det_o \rightarrow \frac{\det_j - \det_o}{\det_o} = \frac{\Delta M_j}{M_j}$$

$$M_j = \frac{\Delta M_j}{\frac{\det_j - \det_o}{\det_o}} = \frac{\det_o}{\det_j - \det_o} \cdot \Delta M_j$$

Masna matrika je tako identificirana v celoti, znani pa so tudi diagonalni členi podajnostne matrike $[d]$.

Skupaj pa je neznanih $\frac{N \cdot (N+1)}{2}$ členov simetrične podajnostne matrike $[d]$ ter še N členov masne matrike, skupno torej $\frac{N \cdot (N+3)}{2}$ neznank.

Ob vsaki spremembi konstrukcije ($j=1,2,\dots,N$) z dodano maso ΔM_j sledi nov pripadajoči karakteristični polinom, v katerem nastopa N koeficientov ($A_j, B_j, \dots, \det_j$). Če se upoštevajo še koeficienti karakterističnega polinoma osnovne konstrukcije, torej $A_o, B_o, \dots, \det_o$, ki so tudi funkcije členov podajnostne in masne matrike, imamo tako $N \cdot (N+1)$ enačb za izračun $\frac{N \cdot (N+3)}{2}$ neznank.

Da se torej lahko določijo vsi koeficienti podajnostne matrike, mora formalno veljati:

$$N \cdot (N+1) \geq \frac{N \cdot (N+3)}{2} \rightarrow N+1 \geq \frac{N+3}{2} = \frac{N}{2} + 1.5$$

$$\frac{N}{2} \geq 0.5 \rightarrow N \geq 1$$

kar pomeni, da je ta pogoj vedno izpolnjen, kar pomeni, da je z vsemi meritvami mogoče zbrati dovolj podatkov, da se identificirajo vsi členi podajnostne matrike.

Zato se postavi dodatno vprašanje, ali je sploh potrebno izvesti N meritev na spremenjenih sistemih oz. ali je potrebno dodati maso v vse prostostne stopnje. Število dejansko potrebnih spremenjenih sistemov n_{sis} je tako:

$$N \cdot (n_{\text{sis}} + 1) = \frac{N \cdot (N + 3)}{2} \rightarrow n_{\text{sis}} + 1 = \frac{N + 3}{2}$$

$$n_{\text{sis}} = \frac{N + 1}{2}$$

Tako velja

N	n_{sis}
1	1
2	1.5 (2)
3	2
4	2.5 (3)
5	3

kar pokaže, da pri naraščajočem številu koncentriranih mas formalno ni potrebno dodatno maso dodati vsaki koncentrirani masi.

Določitev izvendiagonalnih členov podajnostne matrike

Vprašanje, ki se sedaj očitno postavlja, je, ali je direktna identifikacija izvendiagonalnih členov sploh dejansko potrebna oz. kakšno informacijo sploh prinašajo?

Če je znano, da je upogibna togost EI konstantna vzdolž celotnega nosilca, iskanje izvendiagonalnih členov načeloma ni potrebno, saj je mehansko lastnost - vrednost upogibne togosti EI mogoče identificirati kar s pomočjo diagonalnih členov podajnostne matrike (dovolj je lahko pravzaprav en sam), ki se, kot funkcija EI izračunajo (za statično določene konstrukcije najenostavneje kar z virtualnim delom, za statično nedoločene pa npr. z MKE ali z integracijo obtežbe).

Če se že iz diagonalnih členov lahko identificira EI, identifikacija izvendiagonalnih členov dejansko sploh ni več potrebna. Ko je namreč upogibna togost konstrukcije EI identificirana, se lahko namreč celotna podajnostna matrika pridobi z uporabo numeričnih postopkov (virtualno delo, metoda končnih elementov), in se uporabi (skupaj z identificiranimi masami) za izračun karakterističnega polinoma, ki se seveda mora ujemati s karakterističnim polinomom, izračunanim na osnovi izmerjenih frekvenc (kontrola izračuna).

Morebitna identifikacija izvendiagonalnih členov tako služi zgolj primerjavi identificiranih vrednosti oz. izboljšanju dobljenih rezultatov (s povprečenjem).

Če pa je jasno, da je upogibna togost med vsemi posameznimi masami različna, a odsekovno konstantna, ali pa se ne more zagotovo trditi, da je konstantna vzdolž celega elementa, pa je identifikacija izvendiagonalnih členov (formalno vsaj enega) potrebna, saj iz identificiranih diagonalnih členov ni mogoče identificirati vseh upogibnih togosti (razen za konzolo). Pri nosilcu z N koncentriranimi masami namreč tako nastopi N+1 različnih upogibnih togosti, iz diagonalnih členov pa sledi zgolj N enačb. Tako je potrebna vsaj še ena enačba, ki pa se pridobi s pomočjo izvendiagonalnega člena podajnostne matrike.

Izvendiagonalni členi ne nastopajo v členih $A_0, A_1, A_2, \dots, A_N$, nastopajo pa v členih $\det_0, \det_1, \det_2, \dots, \det_N$, vendar nastopajo kot nelinearni členi.

Sistem z dvema koncentriranima masama (N=2)

Zaradi simetrije podajnostne matrike je neznan zgolj en sam izvendiagonalni člen d_{12} .

Karakteristični polinom je tako:

$$\begin{aligned} |[\mathbf{DM}] - \lambda \cdot [\mathbf{I}]| &= \begin{vmatrix} M_1 \cdot d_{11} - \lambda & M_2 \cdot d_{12} \\ M_1 \cdot d_{21} & M_2 \cdot d_{22} - \lambda \end{vmatrix} = (M_1 \cdot d_{11} - \lambda) \cdot (M_2 \cdot d_{22} - \lambda) - M_1 \cdot M_2 \cdot d_{12}^2 = 0 \\ (M_1 \cdot d_{11} - \lambda) \cdot M_2 \cdot d_{22} - (M_1 \cdot d_{11} - \lambda) \cdot \lambda - M_1 \cdot M_2 \cdot d_{12}^2 &= 0 \\ M_1 \cdot M_2 \cdot d_{11} \cdot d_{22} - \lambda \cdot M_2 \cdot d_{22} - M_1 \cdot d_{11} \cdot \lambda + \lambda^2 - M_1 \cdot M_2 \cdot d_{12}^2 &= 0 \\ \lambda^2 - \lambda \cdot M_2 \cdot d_{22} - M_1 \cdot d_{11} \cdot \lambda + M_1 \cdot M_2 \cdot d_{11} \cdot d_{22} - M_1 \cdot M_2 \cdot d_{12}^2 &= 0 \\ \lambda^2 - (M_1 \cdot d_{11} + M_2 \cdot d_{22}) \cdot \lambda + M_1 \cdot M_2 \cdot (d_{11} \cdot d_{22} - d_{12}^2) &= 0 \end{aligned}$$

kar bi bilo mogoče zapisati tudi direktno s pomočjo:

$$(-1)^2 \cdot \lambda^2 + (-1)^{2-1} \cdot A_o \cdot \lambda^{2-1} + \det_o = 0$$

Ker iskani izvendiagonalni člen nastopa v izrazu za $\det_o$, ki se izračuna oz. identificira s pomočjo lastnih frekvenc, sledi:

$$\begin{aligned} \det_o &= (d_{11} \cdot d_{22} - d_{12}^2) \cdot M_1 \cdot M_2 \\ d_{11} \cdot d_{22} - d_{12}^2 &= \frac{\det_o}{M_1 \cdot M_2} \\ d_{12}^2 &= d_{11} \cdot d_{22} - \frac{\det_o}{M_1 \cdot M_2} \rightarrow d_{12} = \sqrt{d_{11} \cdot d_{22} - \frac{\det_o}{M_1 \cdot M_2}} \end{aligned}$$

Sistem s tremi koncentriranimi masami (N=3)

Neznani so trije izvendiagonalni členi in sicer d_{12} , d_{13} ter d_{23} , in pripadajoči karakteristični polinom je:

$$\begin{aligned} |[\mathbf{DM}] - \lambda \cdot [\mathbf{I}]| &= \begin{vmatrix} M_1 \cdot d_{11} - \lambda & M_2 \cdot d_{12} & M_3 \cdot d_{13} \\ M_1 \cdot d_{21} & M_2 \cdot d_{22} - \lambda & M_3 \cdot d_{23} \\ M_1 \cdot d_{31} & M_2 \cdot d_{32} & M_3 \cdot d_{33} - \lambda \end{vmatrix} = \\ -\lambda^3 + A_o \cdot \lambda^2 - B_o \cdot \lambda + \det_o &= 0 \end{aligned}$$

S pomočjo lastnih frekvenc identificirani karakteristični polinom pa je:

$$\begin{aligned} (-1)^3 \cdot \lambda^3 + (-1)^{3-1} \cdot \sum_{i=1}^N \lambda_i \cdot \lambda^{3-1} + (-1)^1 \cdot P_o \cdot \lambda + \prod_{i=1}^3 \lambda_i &= 0 \\ -\lambda^3 + \lambda^2 \cdot \sum_{i=1}^N \lambda_i - P_o \cdot \lambda + \prod_{i=1}^3 \lambda_i &= 0 \end{aligned}$$

od koder sedaj sledi:

$$B_o = P_o = (\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2) \cdot \det_o$$

Ker je bil za $N=2$ izvendiagonalni člen identificiran kar iz izraza za determinanto, se tudisedaj začne z izrazom za determinanto, ki pa je sedaj enak:

$$\det_o = \begin{vmatrix} M_1 \cdot d_{11} & M_2 \cdot d_{12} & M_3 \cdot d_{13} \\ M_1 \cdot d_{21} & M_2 \cdot d_{22} & M_3 \cdot d_{23} \\ M_1 \cdot d_{31} & M_2 \cdot d_{32} & M_3 \cdot d_{33} \end{vmatrix} = M_1 \cdot M_2 \cdot M_3 \cdot \begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{vmatrix}$$

$$= \left(-d_{13}^2 \cdot d_{22} + 2 \cdot d_{12} \cdot d_{13} \cdot d_{23} - d_{11} \cdot d_{23}^2 - d_{12}^2 \cdot d_{33} + d_{11} \cdot d_{22} \cdot d_{33} \right) \cdot M_1 \cdot M_2 \cdot M_3$$

$$\frac{\det_o}{M_1 \cdot M_2 \cdot M_3} = -d_{13}^2 \cdot d_{22} - d_{11} \cdot d_{23}^2 - d_{12}^2 \cdot d_{33} + 2 \cdot d_{12} \cdot d_{13} \cdot d_{23} + d_{11} \cdot d_{22} \cdot d_{33}$$

$$d_{13}^2 \cdot d_{22} + d_{11} \cdot d_{23}^2 + d_{12}^2 \cdot d_{33} - 2 \cdot d_{12} \cdot d_{13} \cdot d_{23} = d_{11} \cdot d_{22} \cdot d_{33} - \frac{\det_o}{M_1 \cdot M_2 \cdot M_3}$$

V izrazu sicer nastopajo vsi trije neznani koeficienti, vendar jih brez dodatnih dveh enačb seveda ni mogoče rešiti. Na razpolago so sicer še tri podobne enačbe za sisteme z dodatnimi masami:

$$d_{13}^2 \cdot d_{22} + d_{11} \cdot d_{23}^2 + d_{12}^2 \cdot d_{33} - 2 \cdot d_{12} \cdot d_{13} \cdot d_{23} = d_{11} \cdot d_{22} \cdot d_{33} - \frac{\det_1}{(M_1 + \Delta M_1) \cdot M_2 \cdot M_3}$$

$$d_{13}^2 \cdot d_{22} + d_{11} \cdot d_{23}^2 + d_{12}^2 \cdot d_{33} - 2 \cdot d_{12} \cdot d_{13} \cdot d_{23} = d_{11} \cdot d_{22} \cdot d_{33} - \frac{\det_2}{M_1 \cdot (M_2 + \Delta M_2) \cdot M_3}$$

$$d_{13}^2 \cdot d_{22} + d_{11} \cdot d_{23}^2 + d_{12}^2 \cdot d_{33} - 2 \cdot d_{12} \cdot d_{13} \cdot d_{23} = d_{11} \cdot d_{22} \cdot d_{33} - \frac{\det_3}{M_1 \cdot M_2 \cdot (M_3 + \Delta M_3)}$$

ki pa se v bistvu navidezno razlikujejo zgolj po desni strani (vse desne strani so enake ob upoštevanju zveze, s katero se identificira masa).

Zato je sedaj nujno potrebno preučiti še koeficient B_o , ki se tokrat prvič pojavi, in je enak:

$$B_o = -d_{12}^2 \cdot M_1 \cdot M_2 + d_{11} \cdot d_{22} \cdot M_1 \cdot M_2 - d_{13}^2 \cdot M_1 \cdot M_3 + d_{11} \cdot d_{33} \cdot M_1 \cdot M_3$$

$$- d_{23}^2 \cdot M_2 \cdot M_3 + d_{22} \cdot d_{33} \cdot M_2 \cdot M_3$$

Zapiše se lahko tudi kot:

$$B_o = (d_{11} \cdot d_{22} - d_{12}^2) \cdot M_1 \cdot M_2 + (d_{11} \cdot d_{33} - d_{13}^2) \cdot M_1 \cdot M_3 + (d_{22} \cdot d_{33} - d_{23}^2) \cdot M_2 \cdot M_3$$

in dobljeno zvezo je mogoče zapisati kompaktno kot:

$$B_o = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^3 \sum_{n=1}^3 (d_{ii} \cdot d_{nn} - d_{in}^2) \cdot M_i \cdot M_n$$

Sedaj sta sicer na voljo dve nelinearni enačbi (za B_o in $\det_o$), ki pa vseeno vsebujeta tri neznanke, in zato se opazuje še koeficient B_j za sisteme z dodatno maso ΔM_j .

Za sistem z dodatno maso v prvi prostostni stopnji tako sledi:

$$\begin{aligned}
 B_1 &= (d_{11} \cdot d_{22} - d_{12}^2) \cdot (M_1 + \Delta M_1) \cdot M_2 + (d_{11} \cdot d_{33} - d_{13}^2) \cdot (M_1 + \Delta M_1) \cdot M_3 + (d_{22} \cdot d_{33} - d_{23}^2) \cdot M_2 \cdot M_3 \\
 &= (d_{11} \cdot d_{22} - d_{12}^2) \cdot M_1 \cdot M_2 + (d_{11} \cdot d_{33} - d_{13}^2) \cdot M_1 \cdot M_3 + (d_{22} \cdot d_{33} - d_{23}^2) \cdot M_2 \cdot M_3 \\
 &\quad + (d_{11} \cdot d_{22} - d_{12}^2) \cdot \Delta M_1 \cdot M_2 + (d_{11} \cdot d_{33} - d_{13}^2) \cdot \Delta M_1 \cdot M_3 \\
 &= B_o + (d_{11} \cdot d_{22} - d_{12}^2) \cdot \Delta M_1 \cdot M_2 + (d_{11} \cdot d_{33} - d_{13}^2) \cdot \Delta M_1 \cdot M_3 \\
 &= B_o + ((d_{11} \cdot d_{22} - d_{12}^2) \cdot M_2 + (d_{11} \cdot d_{33} - d_{13}^2) \cdot M_3) \cdot \Delta M_1
 \end{aligned}$$

Za sistem z dodatno maso v drugi prostostni stopnji pa sliĉno sledi:

$$\begin{aligned}
 B_2 &= (d_{11} \cdot d_{22} - d_{12}^2) \cdot M_1 \cdot (M_2 + \Delta M_2) + (d_{11} \cdot d_{33} - d_{13}^2) \cdot M_1 \cdot M_3 + (d_{22} \cdot d_{33} - d_{23}^2) \cdot (M_2 + \Delta M_2) \cdot M_3 \\
 &= (d_{11} \cdot d_{22} - d_{12}^2) \cdot M_1 \cdot M_2 + (d_{11} \cdot d_{33} - d_{13}^2) \cdot M_1 \cdot M_3 + (d_{22} \cdot d_{33} - d_{23}^2) \cdot M_2 \cdot M_3 \\
 &\quad + (d_{11} \cdot d_{22} - d_{12}^2) \cdot M_1 \cdot \Delta M_2 + (d_{22} \cdot d_{33} - d_{23}^2) \cdot \Delta M_2 \cdot M_3 \\
 &= B_o + ((d_{11} \cdot d_{22} - d_{12}^2) \cdot M_1 + (d_{22} \cdot d_{33} - d_{23}^2) \cdot M_3) \cdot \Delta M_2
 \end{aligned}$$

Splošna oblika za dodatno maso ΔM_j , dodano j-ti masi M_j , pa je :

$$B_j = B_o + \sum_{i=1}^3 (d_{ij} \cdot d_{ii} - d_{ij}^2) \cdot M_i \cdot \Delta M_j = B_o + \Delta M_j \cdot \sum_{i=1}^3 (d_{ij} \cdot d_{ii} - d_{ij}^2) \cdot M_i$$

oz.:

$$\begin{aligned}
 B_j - B_o &= \Delta M_j \cdot \sum_{i=1}^3 M_i \cdot (d_{ij} \cdot d_{ii} - d_{ij}^2) \\
 \sum_{i=1}^3 M_i \cdot (d_{ij} \cdot d_{ii} - d_{ij}^2) &= \frac{B_j - B_o}{\Delta M_j}
 \end{aligned}$$

kar ob postavitvi dodatne mase ΔM_j vsaki masi M_j vodi do treh enaĉb (oz. štirih, ĉe se upošteva še osnovna enaĉba za B_o) s tremi neznankami. Ćeprav je za identifikacijo togosti nosilca, kjer nastopajo med masami razliĉne upogibne togosti, potreben zgolj en sam izvendiagonalni ĉlen, nastopata v vsaki izmed zgornjih enaĉb vedno dva izvendiagonalna ĉlena (razen v osnovni za B_o , kjer nastopajo vsi trije), kar pomeni, da je potrebno rešiti sistem enaĉb in poiskati vse vrednosti vseh izvendiagonalnih ĉlenov. Će se kot neznanke smatrajo kvadrati izvendiagonalnih ĉlenov, gre za sistem treh linearnih enaĉb.

Sistem s štirimi koncentriranimi masami ($N=4$)

Sedaj je neznanih šest izvendagonalnih ĉlenov in sicer d_{12} , d_{13} , d_{14} , d_{23} , d_{24} ter d_{34} .

Karakteristiĉni polinom je tako:

$$\begin{aligned}
 [DM] - \lambda \cdot [I] &= \begin{vmatrix} M_1 \cdot d_{11} - \lambda & M_2 \cdot d_{12} & M_3 \cdot d_{13} & M_4 \cdot d_{14} \\ M_1 \cdot d_{21} & M_2 \cdot d_{22} - \lambda & M_3 \cdot d_{23} & M_4 \cdot d_{24} \\ M_1 \cdot d_{31} & M_2 \cdot d_{32} & M_3 \cdot d_{33} - \lambda & M_4 \cdot d_{34} \\ M_1 \cdot d_{41} & M_2 \cdot d_{42} & M_3 \cdot d_{43} & M_4 \cdot d_{44} - \lambda \end{vmatrix} = \\
 \lambda^4 - A_o \cdot \lambda^3 + B_o \cdot \lambda^2 - C_o \cdot \lambda + \det_o &= 0
 \end{aligned}$$

S pomoĉjo lastnih frekvenc identificirani karakteristiĉni polinom pa je:

$$(-1)^4 \cdot \lambda^4 + (-1)^{4-1} \cdot \sum_{i=1}^4 \lambda_i \cdot \lambda^{4-1} + (-1)^{4-2} \cdot Q_o \cdot \lambda^{4-2} + (-1)^1 \cdot P_o \cdot \lambda + \prod_{i=1}^4 \lambda_i = 0$$

$$\lambda^4 - \sum_{i=1}^4 \lambda_i \cdot \lambda^3 + Q_o \cdot \lambda^2 - P_o \cdot \lambda + \prod_{i=1}^4 \lambda_i = 0$$

Očitno velja:

$$B_o = Q_o$$

ter

$$C_o = P_o$$

Vrednost koeficienta Q_o se izračuna kot:

$$Q_o = \lambda_1 \cdot \lambda_2 + \lambda_1 \cdot \lambda_3 + \lambda_2 \cdot \lambda_3 + \lambda_1 \cdot \lambda_4 + \lambda_2 \cdot \lambda_4 + \lambda_3 \cdot \lambda_4$$

Koeficient B_o pa je sedaj enak:

$$\begin{aligned} B_o &= -d_{12}^2 \cdot M_1 \cdot M_2 + d_{11} \cdot d_{22} \cdot M_1 \cdot M_2 - d_{13}^2 \cdot M_1 \cdot M_3 + d_{11} \cdot d_{33} \cdot M_1 \cdot M_3 \\ &\quad - d_{23}^2 \cdot M_2 \cdot M_3 + d_{22} \cdot d_{33} \cdot M_2 \cdot M_3 - d_{14}^2 \cdot M_1 \cdot M_4 + d_{11} \cdot d_{44} \cdot M_1 \cdot M_4 \\ &\quad - d_{24}^2 \cdot M_2 \cdot M_4 + d_{22} \cdot d_{44} \cdot M_2 \cdot M_4 - d_{34}^2 \cdot M_3 \cdot M_4 + d_{33} \cdot d_{44} \cdot M_3 \cdot M_4 \\ &= (d_{11} \cdot d_{22} - d_{12}^2) \cdot M_1 \cdot M_2 + (d_{11} \cdot d_{33} - d_{13}^2) \cdot M_1 \cdot M_3 + (d_{22} \cdot d_{33} - d_{23}^2) \cdot M_2 \cdot M_3 \\ &\quad + (d_{11} \cdot d_{44} - d_{14}^2) \cdot M_1 \cdot M_4 + (d_{22} \cdot d_{44} - d_{24}^2) \cdot M_2 \cdot M_4 + (d_{33} \cdot d_{44} - d_{34}^2) \cdot M_3 \cdot M_4 \end{aligned}$$

Dobljeno zvezo je ponovno mogoče zapisati zelo kompaktno kot:

$$B_o = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^4 \sum_{n=1}^4 (d_{ii} \cdot d_{nn} - d_{in}^2) \cdot M_i \cdot M_n$$

Preveriti je mogoče, da je zveza je pravzaprav veljavna za poljubno število koncentriranih mas ($N > 2$).

V enačbi nastopa vseh šest neznanih koeficientov (če se kot neznanke upoštevajo kvadrati neznanizvendidiagonalnih členov podajnostne matrike, gre za enostavno linearno enačbo) in potrebno je poiskati še preostale enačbe (torej še pet). Te sledijo iz sistemov z dodatnimi masami.

Za sistem z dodatno maso v prvi prostostni stopnji tako sledi:

$$\begin{aligned} B_1 &= (d_{11} \cdot d_{22} - d_{12}^2) \cdot (M_1 + \Delta M_1) \cdot M_2 + (d_{11} \cdot d_{33} - d_{13}^2) \cdot (M_1 + \Delta M_1) \cdot M_3 + (d_{22} \cdot d_{33} - d_{23}^2) \cdot M_2 \cdot M_3 \\ &\quad + (d_{11} \cdot d_{44} - d_{14}^2) \cdot (M_1 + \Delta M_1) \cdot M_4 + (d_{22} \cdot d_{44} - d_{24}^2) \cdot M_2 \cdot M_4 + (d_{33} \cdot d_{44} - d_{34}^2) \cdot M_3 \cdot M_4 \\ &= (d_{11} \cdot d_{22} - d_{12}^2) \cdot M_1 \cdot M_2 + (d_{11} \cdot d_{33} - d_{13}^2) \cdot M_1 \cdot M_3 + (d_{22} \cdot d_{33} - d_{23}^2) \cdot M_2 \cdot M_3 \\ &\quad + (d_{11} \cdot d_{44} - d_{14}^2) \cdot M_1 \cdot M_4 + (d_{22} \cdot d_{44} - d_{24}^2) \cdot M_2 \cdot M_4 + (d_{33} \cdot d_{44} - d_{34}^2) \cdot M_3 \cdot M_4 \\ &\quad + (d_{11} \cdot d_{22} - d_{12}^2) \cdot \Delta M_1 \cdot M_2 + (d_{11} \cdot d_{33} - d_{13}^2) \cdot \Delta M_1 \cdot M_3 + (d_{11} \cdot d_{44} - d_{14}^2) \cdot \Delta M_1 \cdot M_4 \\ &= B_o + ((d_{11} \cdot d_{22} - d_{12}^2) \cdot M_2 + (d_{11} \cdot d_{33} - d_{13}^2) \cdot M_3 + (d_{11} \cdot d_{44} - d_{14}^2) \cdot M_4) \cdot \Delta M_1 \end{aligned}$$

Splošna oblika je torej spet:

$$B_j = B_o + \sum_{i=1}^4 (d_{jj} \cdot d_{ii} - d_{ij}^2) \cdot M_i \cdot \Delta M_j = B_o + \Delta M_j \cdot \sum_{i=1}^4 (d_{jj} \cdot d_{ii} - d_{ij}^2) \cdot M_i$$

oz.:

$$B_j - B_o = \Delta M_j \cdot \sum_{i=1}^4 M_i \cdot (d_{jj} \cdot d_{ii} - d_{ij}^2)$$

$$\sum_{i=1}^4 M_i \cdot (d_{jj} \cdot d_{ii} - d_{ij}^2) = \frac{B_j - B_o}{\Delta M_j}$$

ki je prav tako veljaven splošno za $N > 2$.

Uporaba zadnje enačbe ob postavitvi dodatne mase v vsako prostostno stopnjo vodi do štirih enačb (oz. petih, če se upošteva še osnovna enačba za B_o) s skupno šestimi neznankami. Spet je nemogoče dobiti eno samo enačbo z enim izvendiagonalnim členom, saj v enačbah, ki se zapišejo za B_j , nastopajo trije neznani izvendiagonalni členi, v enačbi za B_o pa celo vseh šest.

Če se kot neznanke smatrajo kvadrati izvendiagonalnih členov, gre za sicer spet za sistem linearnih enačb, vendar enačb sedaj ni dovolj in je tako potrebno zapisati še nelinearno enačbo (bodisi iz $\det_o$ ali pa s členom C_o oz. C_p). Nelinearnim enačbam se ni mogoče izogniti niti tako, da se v posamezne prostostne stopnje dodajo različne dodatne mase, kar sicer vodi do dodatnih enačb, vendar so dejansko neuporabne za identifikacijo izvendiagonalnih členov, saj so leve strani enačb enake. Uporaba različnih dodatnih mas je torej ugodna zgolj za identifikacijo členov masne matrike in diagonalnih členov podajnostne matrike, saj omogoča povprečenje rezultatov in tako eliminacijo oz. zmanjšanje merskih napak oz. nenatančnosti meritev.

Za sisteme z $N > 3$ je torej za identifikacijo izvendiagonalnih členov potrebno rešiti sistem nelinearnih enačb, kar je sicer mogoče izvesti z ustreznimi numeričnimi postopki, vendar je za vsako vrednost N potrebno zapisati pripadajoče ustrezne enačbe.

Obstaja pa še morda nekoliko bolj prikrit, a hkrati tudi zelo pomemben razlog za izračun oz. identifikacijo izvendiagonalnih členov podajnostne matrike. V bistvu bi bilo najkorektnije vedno izvesti identifikacijo vseh členov, tudi izvendiagonalnih, pa čeprav se iz geometrije konstrukcije morda dozdeva, da je upogibna togost EI konstantna po celotnem elementu. Razpoke ali drugačne lokalne oslavitve (plastični členki ali delna plastifikacija prereza) bodo namreč predvsem najbolj lokalno oslabilo upogibno togost na mestu, kjer se pojavijo, kar se bo odražalo v manjši vrednosti EI nad odseku med masama, kjer se oslabeitev pojavi.

To pa je v bistvu že praktično korak in pol izmed treh osnovnih korakov identifikacije razpok na konstrukcij. S pomočjo meritev je namreč potrebno najprej zaznati spremembo na konstrukciji, nato je potrebno določiti čim bolj točno lokacijo spremembe ter na koncu še seveda velikost spremembe.

Prednosti metode pred metodo s spremembo robnih pogojev

sprememba mase je mnogo lažje izvedljiva kot sprememba togosti, ne glede na robne pogoje konstrukcije

ni potrebno poznavanje podatka o celotni masi konstrukcije

možnih je izvesti več različnih sprememb (z več masami, kar omogoči množico rezultatov in povprečenje)

Slabosti

zahtevane so vse lastne frekvence

numerična občutljivost

Možne smeri nadaljnjih raziskav

identifikacija diagonalnih členov podajnostne matrike z omejenim številom lastnih frekvenc

$$d_{jj} = \frac{A_j - A_o}{\Delta M_j} = \frac{\left(\sum_{i=1}^N \lambda_i \right)_j - \left(\sum_{i=1}^N \lambda_i \right)_o}{\Delta M_j} = \frac{\left(\sum_{i=1}^N \frac{1}{\omega_i^2} \right)_j - \left(\sum_{i=1}^N \frac{1}{\omega_i^2} \right)_o}{\Delta M_j}$$

kar ob predpostavki, da je upogibna togost konstantna vzdolž celotnega elementa, v bistvu omogoči izračun podajnostne matrike.