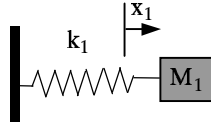


Osno nihanje sistema s koncentriranimi masami

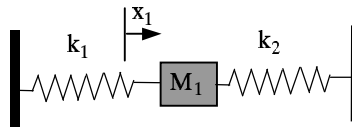
G.M.L. Gladwell: Inverse Problems in Vibration, 1986

Sistem z eno maso:



$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{M_1}} \rightarrow \omega_1^2 = \lambda_1 = \frac{k_1}{M_1}$$

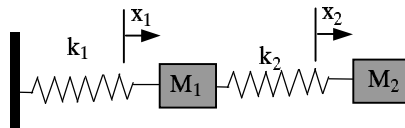
Spremenjeni robni pogoj:



$$\bar{\omega}_1 = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{M_1}} \rightarrow \bar{\omega}_1^2 = \bar{\lambda}_1 = \frac{k_1 + k_2}{M_1}$$

Dve enačbi s tremi neznankami (k_1 , k_2 in M_1). Da se lahko sistem reši, je potrebno poznati togost k_2 (če sta znani k_1 ali M_1 , potem sprememba konstrukcije ni potrebna).

Sistem z dvema masama:



Masna matrika

$$[M] = \begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{bmatrix}$$

togostna matrika:

$$[K] = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}$$

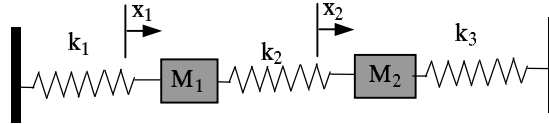
$$([K] - \omega^2 \cdot [M]) \cdot \{x\} = \{0\}$$

$$|[K] - \omega^2 \cdot [M]| = 0$$

$$\omega_1^2 = \lambda_1 = \frac{k_2 \cdot M_1 + k_1 \cdot M_2 + k_2 \cdot M_2 - \sqrt{(k_2 \cdot M_1 + k_1 \cdot M_2 + k_2 \cdot M_2)^2 - 4 \cdot k_1 \cdot k_2 \cdot M_1 \cdot M_2}}{2 \cdot M_1 \cdot M_2}$$

$$\omega_2^2 = \lambda_2 = \frac{k_2 \cdot M_1 + k_1 \cdot M_2 + k_2 \cdot M_2 + \sqrt{(k_2 \cdot M_1 + k_1 \cdot M_2 + k_2 \cdot M_2)^2 - 4 \cdot k_1 \cdot k_2 \cdot M_1 \cdot M_2}}{2 \cdot M_1 \cdot M_2}$$

Spremenjeni robni pogoj:



$$\bar{\omega}_1^2 = \bar{\lambda}_1 = \frac{k_2 \cdot M_1 + k_3 \cdot M_2 + k_1 \cdot M_2 + k_2 \cdot M_2}{2 \cdot M_1 \cdot M_2}$$

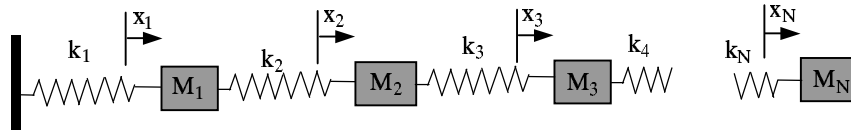
$$- \frac{\sqrt{(k_2 \cdot M_1 + k_3 \cdot M_1 + k_1 \cdot M_2 + k_2 \cdot M_2)^2 - 4 \cdot (k_1 \cdot k_2 + k_1 \cdot k_3 + k_2 \cdot k_3) \cdot M_1 \cdot M_2}}{2 \cdot M_1 \cdot M_2}$$

$$\bar{\omega}_2^2 = \bar{\lambda}_2 = \frac{k_2 \cdot M_1 + k_3 \cdot M_2 + k_1 \cdot M_2 + k_2 \cdot M_2}{2 \cdot M_1 \cdot M_2}$$

$$+ \frac{\sqrt{(k_2 \cdot M_1 + k_3 \cdot M_1 + k_1 \cdot M_2 + k_2 \cdot M_2)^2 - 4 \cdot (k_1 \cdot k_2 + k_1 \cdot k_3 + k_2 \cdot k_3) \cdot M_1 \cdot M_2}}{2 \cdot M_1 \cdot M_2}$$

Štiri enačbe s petimi neznankami (k_1 , k_2 , k_3 ter M_1 in M_2). Predpostavi se, da je znana vsota obeh mas.

Sistem s poljubnim številom mas:



Masna matrika

$$[M] = \begin{bmatrix} M_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & M_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & M_N \end{bmatrix}$$

Togostna matrika (inverzija podajnostne, MKE, Lagrangeove enačbe drugega reda, virtualno delo) ima naslednjo obliko:

$$[K] = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k_3 & k_3 + k_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{N-1} + k_N & -k_N & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -k_N & k_N \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -k_N & k_N \end{bmatrix}$$

Problem lastnega nihanja se prevede:

$$([K] - \omega^2 \cdot [M]) \cdot \{x\} = \{0\}$$

Če se uvede $\omega^2 = \lambda$, sledi:

$$([K] - \lambda \cdot [M]) \cdot \{x\} = \{0\}$$

$$[K] - \omega^2 \cdot [M] = 0$$

Problem lastnih frekvenc se prevede v razvoj determinante:

$$[K] - \omega^2 \cdot [M] = 0$$

Vpelje se:

$$[M] = [M]_2^1 \cdot [M]_2^1$$

ter vektorska transformacija

$$\{x\} = [M]_2^1 \cdot \{y\}$$

kar vodi do:

$$([K] - \lambda \cdot [M]) \cdot [M]_2^1 \cdot \{y\} = \{0\}$$

$$\left([K] \cdot [M]_2^1 - \lambda \cdot [M] \cdot [M]_2^1 \right) \cdot \{y\} = \{0\} \quad / [M]_2^1 \cdot$$

$$\left([M]_2^1 \cdot [K] \cdot [M]_2^1 - \lambda \cdot [M]_2^1 \cdot [M] \cdot [M]_2^1 \right) \cdot \{y\} = \{0\}$$

$$([B] - \lambda \cdot [I]) \cdot \{y\} = \{0\}$$

kjer je:

$$[B] = [M]_2^1 \cdot [K] \cdot [M]_2^1$$

$$[B] = \begin{bmatrix} a_1 & -b_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -b_1 & a_2 & -b_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -b_2 & a_3 & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & a_{N-1} & -b_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -b_{N-1} & a_N \end{bmatrix}$$

kjer so:

$$a_i = \frac{k_i + k_{i+1}}{M_i} \quad i = 1, 2, \dots, N-1$$

$$a_N = \frac{k_N}{M_N}$$

$$\text{ter} \quad b_i = \frac{k_{i+1}}{\sqrt{M_{i+1} \cdot M_i}}$$

Če se sedaj doda zadnji masi še vzmet s togostjo k_{N+1} , se spremeni zgolj zadnji diagonalni člen togostne matrike $[K]$ ter posledično zadnji diagonalni člen matrike $[B]$:

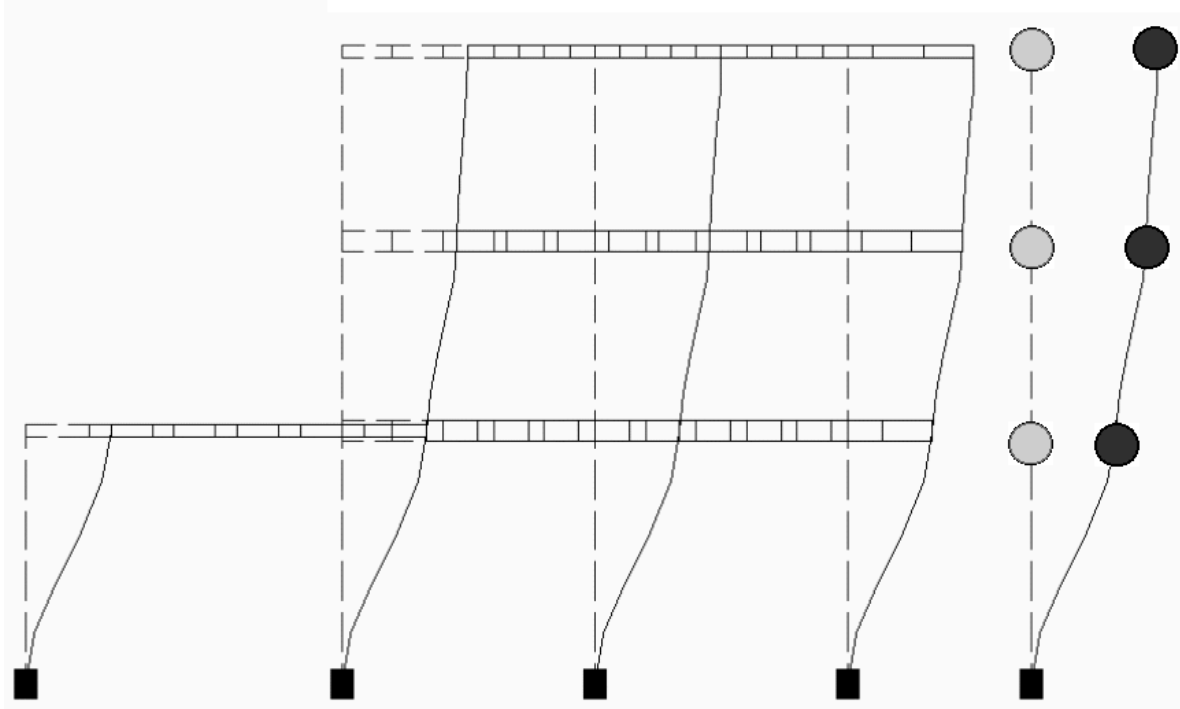
$$[\bar{K}] = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k_3 & k_3 + k_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{N-1} + k_N & -k_N & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -k_N & k_N + k_{N+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -k_N & k_N + k_{N+1} \end{bmatrix}$$

$$\bar{a}_i = \frac{k_i + k_{i+1}}{M_i} \quad i = 1, 2, \dots, N$$

Na osnovi rekonstruiranja karakterističnega polinoma reda N za oba sistema (osnovnega in sistema z dodatno maso) se lahko s pomočjo Lanczosovega algoritma rekonstruirata masna in togostna matrika. Če je znana celotna masa sistema, se lahko določijo vse mase sistema, drugače pa zgolj njihova razmerja.

Praktična uporabnost metode

- za osno nihanje, ki pa v večini vsakdanjih konstrukcij ni dominantno
- za prečno nihanje okvirne konstrukcije z uporabo strižnega modela



$$RF = \frac{\sum \frac{EI_n}{L_n}}{\sum \frac{EI_n}{L_n} + \frac{1}{2} \cdot \sum \frac{EI_s}{h_s}}$$

Slabosti

- zgolj za omejeni tip konstrukcij
- zahteva po vseh lastnih frekvencah
- numerična občutljivost
- sprememba togosti je praktično težko izvedljiva
- zahteva poznavanje podatka o celotni masi konstrukcije