$$P_8(x+y) \leqslant P_8(x) + 2P_8(y/2), \tag{8}$$
$$P_9(x+y) \leqslant P_9(x) + 2P_9(y/2). \tag{9}$$

3.本文证明了七生八生九生素数性质与素数的性质有下述不同:

(i) 已知素数满足 $\pi(2x) \leqslant 2\pi(x)$，这与上述 1 中相反;

(ii) 素数,孪生、三生、四生、五生、六生素数的第一个间隔都是最小间隔. 而七生、八生、九生素数的第一个间隔都不是最小间隔.

4.在 213 亿以内未找到本类型的大于 11 的连续 33 个整数中包含 10 个素数的数组.

5.本文列出 213 亿以内七生素数 405 个,八生素数 62 个,九生素数 14 个的三个表.

6.本文分别列出 213 亿以内七生八生九生素数的大间隔表和小间隔表.

参 考 资 料

[1] Herschel F. Smith, On a Generlization of the Prime Pair Problem, **MTAC**, 11 (1957), 249—254.

[2] Richard K. Guy, Unsolved Problems in Number Theory, Springer-Verlag New York Inc., 1981, 15.

[3] 王元,谈谈素数,上海教育出版社,1978,62.

互 素 点 集 的 概 率

宋向军 孙 衡

(中国科学技术大学,合肥 230026)

摘要 两整数互素的概率为 $\prod_p \left(1-\frac{1}{p^2}\right)$. 本文推广这一事实至任何整数组构成的集合上.

我们已知两整数互素的概率为 $\prod_p \left(1-\frac{1}{p^2}\right) = \frac{6}{\pi^2}$[1] $\left(\prod_p \text{是过所有素数求积,下同}\right)$, 本文将予以推广. 先引入记号和定义. 下面的集合仅限于 $\mathbf{R}^n$ 中的整点集 $\mathbf{Z}^n$, 例如,

$[a,b]^n = \{(x_1,x_2,\cdots,x_n) \in \mathbf{Z}^n \mid a \leqslant x_i \leqslant b, i = 1,2,\cdots,n\}$.

整点 $x=(x_1,\cdots,x_n)$ $(n>1)$, 被称为素点,如果 $x_1,\cdots,x_n$ 的最大公约数为 1.

若两点 $x=(x_1,\cdots,x_n)$ 与 $y=(y_1,\cdots,y_n)$ 满足 $x_i \equiv y_i(\mathrm{mod}\ p)(i=1,\cdots,n)$, 则记 $x \equiv y(\mathrm{mod}\ p)$. 易见 $\mathbf{Z}^n$ 在 $\equiv(\mathrm{mod}\ p)$ 下分成 p^n 个等价类.

给定整点集 A 及素数 p,记 T_pA 为满足下列条件的集合:

i) $\forall x \in A, \exists y \in T_pA$ 使 $x \equiv y(\mathrm{mod}\ p)$, 反之亦然.

ii) $T_pA \subset [0,p-1]^n$.

给定 p,易见 T_pA 由 A 唯一确定,且 $\forall x_1,x_2 \in T_pA$, $x_1 \neq x_2$,则 $x_1 \not\equiv x_2(\mathrm{mod}\ p)$. 故 $|T_pA| \leqslant p^n$ (1·1表集的势).

整点集 A 关于 $a=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 的平移是指集合 $A+a=\{(x_1+a_1,\cdots,x_n+a_n) \mid (x_1,\cdots,x_n) \in A\}$.

易见下述引理 1 成立.

引理 1. 整点集 A 为素点集的充要条件为 $\forall p$ 为素数，$0 \in T_pA$(其中 $0=\underbrace{(0,\cdots,0)}_{n}$).

引理 2. $|T_pA| = |T_p(A+a)|$.

证. 设 $x, y \in A$. $x \not\equiv y(\bmod p) \Rightarrow x_i \not\equiv y_i(\bmod p)$ $(i=1,\cdots,n) \Rightarrow x_i + a_i \not\equiv y_i + a_i$ $(\bmod p) \Rightarrow x+a \not\equiv y+a$ $(\bmod p)$，故映射 $f: T_pA \to T_p(A+a)$，$x \longmapsto x + a(\bmod p)$为单射. 所以 $|T_pA| \leqslant |T_p(A+a)|$. 同理 $|T_p(A+a)| \leqslant |T_pA|$，故 $|T_pA| = |T_p(A+a)|$.

定理. 设 $A \subset \mathbb{Z}^n$, $|T_pA| = m_p$，则 A 的所有平移中出现素点集的概率为

$$\prod_p\left(1-\frac{m_p}{p^n}\right).$$

证. 记事件

$$\begin{aligned} B_p &= \{A+a \text{ 中至少有一点的坐标的最大公约数为 } p \text{ 整除} \mid a \in \mathbf{Z}^n\} \\ &= \{0 \in T_p(A+a) \mid a \in \mathbb{Z}^n\}. \end{aligned}$$

如果 B_p 发生的概率为 $P(B_p) = \dfrac{m_p}{p^n}$，且任意有限个 B_p 是相互独立的，则

$$\begin{aligned} & P\{A+a \text{ 为素点集} \mid a \in \mathbf{Z}^n\} \\ &= P\overline{\{\exists p, \text{使 } A+a \text{ 中至少有一点的各坐标均被 } p \text{ 整除} \mid a \in \mathbf{Z}^n\}} \\ &= P\left(\overline{\bigcup_p \{0 \in T_pA \mid a \in \mathbf{Z}^n\}}\right) \\ &= P\left(\bigcap_p \bar{B}_p\right). \end{aligned}$$

但由概率的上连续性知[2]，

$$\begin{aligned} P\left(\bigcap_p \bar{B}_p\right) &= P\left(\lim_{N\to\infty} \bigcap_{p<N} \bar{B}_p\right) \\ &= \lim_{N\to\infty} P\left(\bigcap_{p<N} \bar{B}_p\right) = \lim_{N\to\infty} \prod_{p<N} P(\bar{B}_p) \\ &= \prod_p P(\bar{B}_p) = \prod_p\left(1-\frac{m_p}{p^n}\right). \end{aligned}$$

因此，下面只须证 $P(B_p) = \dfrac{m_p}{p^n}$ 及有限个 B_p 间是相互独立的. $\forall k$ 个不同素数 $p_1,\cdots,p_k$ 及正整数 N，记 $N = l\cdot p_1\cdots p_k + r$ $(0 \leqslant r < p_1\cdots p_k)$，则

$$\begin{aligned} & P(B_{p_1} \cap B_{p_2} \cap \cdots \cap B_{p_k}) \\ &= \lim_{N\to\infty} |\{a \in [0, N-1]^n \mid 0 \in T_{p_i}(A+a), i \leqslant k\}| / N^n \\ &= \lim_{N\to\infty}\left(\frac{|a \in [0, lp_1\cdots p_k - 1]^n \mid 0 \in T_{p_i}(A+a), i \leqslant k\}|}{N^n}\right. \\ &\quad \left.+ \frac{|\{a \in [0,N-1]^n \backslash [0, lp_1\cdots p_k - 1]^n \mid 0 \in T_{p_i}(A+a), i \leqslant k\}|}{N^n}\right). \quad (*) \end{aligned}$$

但

$$0\leqslant\frac{|\{a\in[0,N-1]^n\backslash[0,lp_1\cdots p_k-1]^n|0\in T_{p_i}(A+a),i\leqslant k\}|}{N^n}$$

$$\leqslant|\{a\in[0,N-1]^n\backslash[0,lp_1\cdots p_k-1]^n\}|/N^n$$

$$=[N^n-(lp_1\cdots p_k)^n]/N^n$$

$$=1-\frac{(N-r)^n}{N^n}\to 0\quad(N\to\infty).$$

又 $\dfrac{lp_1\cdots p_k-1}{N}\to 1\ (N\to\infty)$，故由(＊)知，

$$P(B_{p_1}\cap\cdots\cap B_{p_k})$$

$$=\lim_{l\to\infty}\frac{|\{a\in[0,lp_1\cdots p_k-1]^n|0\in T_{p_i}(A+a),i\leqslant k\}|}{(lp_1\cdots p_k)^n}$$

$$=\lim_{l\to\infty}\frac{l^n\cdot|\{a\in[0,p_1\cdots p_k-1]^n|0\in T_{p_i}(A+a),i\leqslant k\}|}{(lp_1\cdots p_k)^n}$$

$$=\frac{|\{a\in[0,p_1\cdots p_k-1]^n|0\in T_{p_i}(A+a),i\leqslant k\}|}{(p_1\cdots p_k)^n}.$$

上式可看成下述过程的概率：共分 k 步完成；第 i 步是从集 A 按 mod p_i 形成的 $|T_{p_i}(A)|$ 个等价类中任取一类 $\tilde{x}$，使 A 平移 $a\in[0,p_1\cdots p_k-1]^n$ 之后，$\tilde{x}+a=0$。易见共有 $(p_1\cdots p_{i-1}p_{i+1}\cdots p_k)^n$ 个向量 a 满足上式。故其概率为

$$\frac{|T_{p_i}A|\cdot(p_1\cdots p_{i-1}p_{i+1}\cdots p_k)^n}{(p_1\cdots p_k)^n}=\frac{|T_{p_i}A|}{p_i^n},$$

所以

$$P(B_{p_1}\cap\cdots\cap B_{p_k})=\prod_{i=1}^{k}\frac{|T_{p_i}A|}{p_i^n}.$$

取 $k=1$ 故 $P(B_p)=|T_pA|/p^n$，故 $P(B_{p_1}\cap\cdots\cap B_{p_k})=\prod\limits_{i=1}^{k}P(B_{p_k})$。即任意有限个 B_p 相互独立。证毕。

在定理中取 $n=2$，A 为独点集，则 $m_p=1$。即得二整数互素的概率为

$$\prod_p\left(1-\frac{1}{p^2}\right).$$

参　考　资　料

[1] 华罗庚，数论导引，科学出版社，北京，1957.

[2] 复旦大学，概率论(第一册)，高等教育出版社，北京 1979.