Universidad Autónoma de Madrid Curso 2006-07

EXAMEN DE ÁLGEBRA LINEAL (8/09/07) Primero de Matemáticas

APELLIDOS:.. **NOMBRE:**............ **GRUPO:**...

1.- Indica si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando la respuesta:

(1.1)[0'5 puntos] Sea f un endomorfismo de $\mathbb{R}^n$. Si f es inyectiva entonces es biyectiva.

(1.2)[0'5 puntos] Sean $B_1 = \{u_1, u_2\}$ y $B_2 = \{v_1, v_2\}$ bases de $\mathbb{R}^2$. Sea $w \in \mathbb{R}^2$ y sean (x_1, x_2) y (y_1, y_2) las coordenadas de w respecto B_1 y B_2, respectivamente. Si $x_1 = y_1$ entonces $u_1 = v_1$.

(1.3)[0'5 puntos] Se considera la base $B = \{(1,1),(0,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$. Entonces su base dual es $B^* = \{x_1 + x_2, x_2\}$.

(1.4)[0'5 puntos] Sea $A \in M_2(\mathbb{C})$ una matriz con 3 como valor propio doble. Entonces $Tr\,A = 6$.

2.- Se considera el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{R}^{\leq 3}[X]$ y sus subespacios V y W, donde

$$V = \langle 8 - 10X + X^2 + X^3, 1 + X\rangle \qquad \text{y} \qquad W = \{p(X) \in \mathbb{R}^{\leq 3}[X] \,|\, p(1) = p(2) = 0\}.$$

Halla:

(2.1)[Un punto] Bases de V y de un complementario de V.

(2.2)[Un punto] Bases de $V \cap W$ y de $V + W$.

3.-[1'5 puntos] Sea $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un endomorfismo tal que

(i) $(1,0,1)$ pertenece al núcleo de f, y

(ii) $f(u) = u$ para todo vector u del plano de ecuación $x_1 + x_2 + x_3 = 0$.

Halla la matriz de f (respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^3$).

4.-[2 puntos] Sea f el siguiente endomorfismo de $\mathbb{R}^4$

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_3 + x_4, x_2 - x_3, x_3, x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4).$$

Halla bases de $Im\,f$ y del espacio cociente $\mathbb{R}^4/Nuc\,f$.

5.- Dada la siguiente matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(5.1)[0'5 puntos] Comprueba que 1 es un valor propio simple y 2 es valor propio de multiplicidad algebraica 3.

(5.1)[2 puntos] Halla una forma de Jordan de A y la correspondiente matriz de paso.