CÁLCULO I, 1^0 de Matemáticas e Ing. Informática. **Curso 2006-07**

Examen extraordinario 04.09.07 .

Nombre y apellidos: D.N.I.:

Utilizar una hoja distinta (y sólo una) para cada ejercicio. Duración del examen: 3 horas

Ejercicio 1.: Se define la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mediante

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3-x^2}{2}, & \text{si} \quad x < 1 \\ \frac{1}{x}, & \text{si} \quad x \geq 1. \end{cases}$$

a: Probar que f es derivable en todo punto y calcular $f'(1)$.
b: Hallar los puntos del intervalo $[0, 2]$ en los que la tangente a la curva $y = f(x)$ es paralela al segmento que une $(0, f(0))$ con $(2, f(2))$. Justificar por qué sabemos de antemano que existe al menos uno de estos puntos.

Ejercicio 2.: Enunciar el Teorema Fundamental del Cálculo.
Hallar la fórmula explícita de una función $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ que verifique

$$\int_0^x g(t)dt = \int_x^1 t^2 g(t)dt + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} + C,$$

donde C es una constante. Calcular a continuación el valor de C. *Indicación*: Derivar ambos lados de la igualdad.

Ejercicio 3.: Determinar razonadamente la convergencia o divergencia de las siguientes series:

$$A) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\arctan k}{1 + k^2}; \qquad B) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{k^3 - k + 1}; \qquad C) \quad \sum_{n=1}^{\infty} n\, e^{-\frac{1}{n}}.$$

Ejercicio 4.: Hacer un esquema de la gráfica (regiones de crecimiento, decrecimiento, convexidad, etc.) de la función:

$$h(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \frac{4}{3}x^3.$$

Demostrar en particular que la ecuación $h(x) = 0$ tiene una única raíz real.