CÁLCULO I, 1^0 de Matemáticas e Ing. Informática. **Curso 2006-07**
Examen final 02.02.07 .

Nombre y apellidos: D.N.I.:

Utilizar una hoja distinta (y sólo una) para cada ejercicio. Duración del examen: 3 horas

Ejercicio 1.: Hacer un esquema de la gráfica (regiones de crecimiento, decrecimiento, convexidad, etc.) de la función:

$$h(x) = \frac{\ln x}{x}, \qquad \text{para} \quad x > 0.$$

Probar que la serie

$$\sum_{1}^{\infty} (-1)^n \, \frac{\ln n}{n}$$

es convergente pero no absolutamente convergente.

Ejercicio 2.: Definimos

$$f(x) = \int_1^x \left(1 + \left|\cos(e^t)\right|\right) \, dt.$$

i) Probar que f es inyectiva.
ii) Estudiar la continuidad y derivabilidad de $f^{-1}(x)$. Calcular $f^{-1}(0)$ y $\left(f^{-1}\right)'(0)$.
iii) (Opcional) Hallar $g'(1)$ siendo

$$g(x) = \int_0^{f(x^2)} e^{t^2} \, dt.$$

Ejercicio 3.: Estudiar la convergencia de las siguientes integrales impropias:

$$\int_0^{\infty} t\, e^{-t} dt; \qquad \int_1^{\infty} \frac{x}{1 + (x^2)^2} \, dx; \qquad \int_2^{\infty} \frac{1}{x \, \ln x} \, dx.$$

Calcular el valor de la integral en el caso de que sean convergentes.

Ejercicio 4.: Se definen $U_1 = 1$, $V_1 = 2$ y, de forma recurrente, para $n = 1, 2, \ldots$

$$U_{n+1} = \sqrt{U_n \cdot V_n}; \qquad V_{n+1} = \frac{1}{2} \left(U_n + V_n\right).$$

- Comprobar que $U_m < V_m$, $\forall m \in \mathbf{N}$, y de aquí que $U_n < U_{n+1}$ y $V_{n+1} < V_n$.
- Deducir que las dos sucesiones $\{U_n\}_n$ y $\{V_n\}_n$ son convergentes.
- Probar que tienen el mismo límite.