

Grupo A Hoja 6

Ejercicio 1.- Se consideran los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$. Decir si son anillos o cuerpos (respecto de las operaciones en $\mathbb{R}$) en cada uno de estos casos. Justificar todas las respuestas.

$$a) \quad A = \left\{ \frac{n}{2^m} : m, n \in \mathbb{Z} \right\} \quad \frac{n}{2^m} + \frac{n'}{2^{m'}} = \frac{n + 2^{m-m'} n'}{2^m} \in A \quad \checkmark$$

$$\frac{n}{2^m} \cdot \frac{n'}{2^{m'}} = \frac{n \cdot n'}{2^m \cdot 2^{m'}} \quad \checkmark$$

Así vemos que las operaciones son cerradas, ya que la suma y la multiplicación devuelven elementos del conjunto A.

Comprobemos ahora si el conjunto cumple las propiedades de la suma y la multiplicación:

→ Propiedad asociativa de la suma y el producto:

$$\left(\frac{n}{2^m} + \frac{n'}{2^{m'}} \right) + \frac{n''}{2^{m''}} = \frac{n}{2^m} + \left(\frac{n'}{2^{m'}} + \frac{n''}{2^{m''}} \right) \quad \checkmark$$

$$\left(\frac{n}{2^m} \cdot \frac{n'}{2^{m'}} \right) \cdot \frac{n''}{2^{m''}} = \frac{n}{2^m} \cdot \left(\frac{n'}{2^{m'}} \cdot \frac{n''}{2^{m''}} \right) \quad \checkmark$$

→ Propiedad conmutativa de la suma y el producto:

$$\frac{n}{2^m} + \frac{n'}{2^{m'}} = \frac{n'}{2^{m'}} + \frac{n}{2^m} \quad \checkmark$$

$$\frac{n}{2^m} \cdot \frac{n'}{2^{m'}} = \frac{n'}{2^{m'}} \cdot \frac{n}{2^m} \quad \checkmark$$

→ Propiedad distributiva del producto sobre la suma:

$$\frac{n}{2^m} \cdot \left(\frac{n'}{2^{m'}} + \frac{n''}{2^{m''}} \right) = \frac{n}{2^m} \cdot \frac{n'}{2^{m'}} + \frac{n}{2^m} \cdot \frac{n''}{2^{m''}} \quad \checkmark$$

→ Existe elemento neutro de la suma (con $n=0$)

$$\text{si } n=0 \in \mathbb{Z} \quad \frac{n}{2^m} = 0 \quad \frac{n'}{2^{m'}} + 0 = \frac{n'}{2^{m'}} \quad \checkmark$$

→ Existe elemento neutro de la multiplicación (con $n=2^m$)

$$\text{si } n=2^m \in \mathbb{Z} \quad \frac{n}{2^m} = 1 \quad \frac{n'}{2^{m'}} \cdot 1 = \frac{n'}{2^{m'}} \quad \checkmark$$

→ Existe elemento opuesto:

$$\left(\frac{-n}{2^m} \right) \quad n \in \mathbb{Z} \wedge (-n) \in \mathbb{Z} \quad \text{para la suma } \frac{n}{2^m} + \left(\frac{-n}{2^m} \right) = 0 \quad \checkmark$$

→ No existe elemento inverso $a^{-1} \in A$ tal que $a \cdot a^{-1} = 1$

$$\text{Contraejemplo: si } n=3 \wedge m=1 \quad \frac{n}{2^m} = \frac{3}{2} \in A$$

$$\text{Supongamos que } \frac{3}{2} \text{ tiene inverso en } A \quad \frac{3}{2} \cdot \frac{n}{2^m} = 1 \Leftrightarrow 2^{m+1} = 3n$$

pero si $3n$ es múltiplo de 3 y 2^{m+1} no, se produce una contradicción

Por lo tanto A es un **anillo**, porque cumple las propiedades que lo hacen posible, pero no es un cuerpo, ya que no cumple la condición de tener inverso, propiedad necesaria para que un anillo sea cuerpo.

i) $I = \{x + y^2 : x, y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}$

En particular:

Para $y = \sqrt{2} \wedge x = -y^2 + n = -2 + n$ t.q. $n \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow (x + y^2) \in I \Leftrightarrow x + y^2 = -2 + n + 2 = n \Leftrightarrow \mathbb{Q} \subset I$

Para $y = \sqrt{2} \wedge x = -y^2 + m = -2 + m$ t.q. $m \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \Leftrightarrow (x + y^2) \in I \Leftrightarrow x + y^2 = -2 + m + 2 = m \Leftrightarrow \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \subset I$

$$\left. \begin{array}{l} \mathbb{Q} \subset I \\ \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \subset I \end{array} \right\} \Leftrightarrow \mathbb{R} \subset I$$

$$I = \{x + y^2 : x, y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\} \Leftrightarrow (x + y^2) \mathbb{R} \Leftrightarrow I \subset \mathbb{R}$$

$\left. \begin{array}{l} \mathbb{R} \subset I \\ I \subset \mathbb{R} \end{array} \right\} \Leftrightarrow I$ cumple todas las propiedades que tiene $\mathbb{R}$. Como $\mathbb{R}$ es un cuerpo I cumple las propiedades de los cuerpos

$\therefore I$ es un **cuerpo**

Ejercicio 9.- Expresar los siguientes números complejos en la forma $a+bi$

$$a) \frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i) \cdot (1-i)}{(1+i) \cdot (1-i)} = \frac{1-2i+i^2}{1-i^2} = \frac{-2i}{2} = -i$$

$$c) \frac{(2-i)^2}{(3-i)^2} = \frac{(2-i)^2(3+i)^2}{(3-i)^2(3+i)^2} = \frac{((2-i)(3+i))^2}{((3-i)(3+i))^2} = \frac{(7-i)^2}{10^2} = \frac{49-14i+i^2}{100} = \frac{48}{100} - \frac{14i}{100} = \frac{12}{25} - \frac{7}{50}i$$

$$e) \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3 = \binom{3}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \binom{3}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) + \binom{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2 + \binom{3}{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3 =$$

$$= \frac{1}{8} + 3 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{-\sqrt{3}}{2}i + 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot i^2 + \frac{(-3)\sqrt{3}}{8}i^3 = -1$$

Ejercicio 6.- Demostrar que para todo $n \in \mathbb{N}$ y para todo $x > 0$, existe un único número real $y > 0$ tal que $y^n = x$:

$$\forall n \in \mathbb{N} \wedge \forall x > 0 \quad \exists! y \in \mathbb{R}_+ \quad t.q. \quad y^n = x$$

Para realizar la demostración deberemos comprobar la existencia y la unicidad de la misma.

Empecemos con la existencia:

$$Si \ n > 1 \wedge x > 0$$

$$\begin{aligned} [0, 1+x] &\xrightarrow{f} \mathbb{R} & f \text{ continua } f(0) &= -x < 0 \\ t &\rightarrow t^n - x & f(1+x) &> 0 \quad (*) \end{aligned}$$

$$(*) \begin{cases} Si \ x < 1 \Rightarrow x < 1 < 1+x < (1+x)^n \\ Si \ x \geq 1 \Rightarrow x \leq x^n < (x+1)^n \end{cases}$$

$$\exists y \in [0, 1+x] \quad t.q. \quad f(y) = 0 \Rightarrow y^n = x$$

Una vez demostrada la existencia pasemos a ver la unicidad:

$$y^n = x \quad y'^n = x$$

$$y_1 \cdot y_2 \cdot y_3 \cdot \dots \cdot y_n = y'_1 \cdot y'_2 \cdot y'_3 \cdot \dots \cdot y'_n$$

$$y^n = y'^n$$

$$y^n - y'^n = 0$$

$$y = \sqrt[n]{x} \quad y' = \sqrt[n]{x}$$

$$y = y'$$

■