

CONJUNTOS Y NÚMEROS. HOJA 6

PARA ENTREGAR ANTES DEL 20 DE DICIEMBRE DE 2007

1. Se consideran los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$. Decir si son anillos o cuerpos (respecto de las operaciones en $\mathbb{R}$) en cada uno de estos casos. Justificar todas las respuestas.

- | | |
|---|--|
| a) $\{\frac{n}{2^m} : m, n \in \mathbb{Z}\};$ | f) $\{m + n\sqrt{5} : m, n \in \mathbb{Z}\};$ |
| b) $\{r \in \mathbb{Q} : r \geq 0\};$ | g) $\{m + n\sqrt{2} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Q}\};$ |
| c) $\{m \in \mathbb{Z} : m \geq 0\};$ | h)* $\{r + s\sqrt[3]{3} : r, s \in \mathbb{Q}\};$ |
| d) $\{r + \sqrt{s} : r, s \in \mathbb{Q}, s > 0\};$ | i) $\{x + y^2 : x, y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\};$ |
| e) $\{\frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\} \cup \{0\};$ | j) $\{2m + \sqrt{3}k : m, k \in \mathbb{Z}\}.$ |

2. a) Sean K y L dos anillos. Demostrar que $K \times L$ es también un anillo, si le dotamos de las operaciones de la suma y del producto según las reglas:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d), \quad (a, b) \cdot (c, d) = (ac, bd), \quad a, c \in K, \quad b, d \in L.$$

- b) Supongamos que K y L son cuerpos. ¿Va a ser $K \times L$, con operaciones así definidas, necesariamente un cuerpo? Dar una demostración o un contraejemplo.

3. Sean f, g dos funciones definidas en $[0, +\infty)$ tales que f es creciente, g es decreciente, y $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \geq 0$. Demostrar que existe un número real α tal que $f(x) \leq \alpha \leq g(x)$ para todo $x \geq 0$.

4. a) Demostrar el siguiente *lema de intervalos encajados*: Sea $\{J_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de subintervalos finitos cerrados de $\mathbb{R}$ tal que $J_n \supset J_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$. Entonces la intersección de estos intervalos no es vacía.
b) Demostrar que, bajo las hipótesis de este lema, las longitudes de los intervalos J_n tienen un límite.
c) Dar la condición necesaria y suficiente para que el conjunto $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} J_n$ tenga exactamente un punto.

5. Sea K un cuerpo tal que $\mathbb{Q} \subset K \subset \mathbb{R}$, $K \neq \mathbb{R}$ (las operaciones en K son heredadas de $\mathbb{R}$).

- a) Demostrar que existe un número infinito de cuerpos de este tipo.
b) Demostrar que existe un conjunto no vacío A , $A \subset K$, acotado superiormente, que no tiene supremo en K .

6. Demostrar que para todo $n \in \mathbb{N}$ y para todo $x > 0$, existe un único número real $y > 0$ tal que $y^n = x$.

7. (Continuación) Dados $x > 0$, $n \in \mathbb{N}$ tales que $y^n = x$, definimos $x^{\frac{1}{n}}$ como la única solución positiva de la ecuación $y^n = x$. Sean $a, b > 0$ y $m, n, k \in \mathbb{N}$. Demostrar las siguientes propiedades de las raíces:

$$a) \quad a > 1 \iff a^{\frac{1}{n}} > 1; \quad b) \quad a^{\frac{1}{n}} b^{\frac{1}{n}} = (ab)^{\frac{1}{n}}; \quad c) \quad (a^{\frac{1}{n}})^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{nm}}; \quad d) \quad (a^{\frac{1}{n}})^m = (a^{\frac{1}{kn}})^{km}.$$

8. a) Utilizar el apartado d) del ejercicio anterior para definir potencias racionales de un número a real positivo. Demostrar que $(r \in \mathbb{Q}) \wedge (r > 0) \wedge (a > 1) \implies a^r > 1$; $(r \in \mathbb{Q}) \wedge (r > 0) \wedge (a < 1) \implies a^r < 1$.

- b) (La definición de potencias reales) Sea $a > 0$ un número real fijo. Se considera la función $f_0 : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_0(r) = a^r$, $r \in \mathbb{Q}$. Demostrar que es una función continua en $\mathbb{Q}$. Demostrar que existe una única función continua $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f_0 = f|_{\mathbb{Q}}$. Definimos $a^y = f(y)$, $y \in \mathbb{R}$.

Indicación: Demostrar que para todo $y \in \mathbb{R}$, existe el límite $\lim_{r \in \mathbb{Q}, r \rightarrow y} f_0(r)$ y que $f(y)$ tiene que ser igual a este límite.

- c) Partiendo de la definición de a^y , $a > 0$, $y \in \mathbb{R}$, dada en el apartado b), demostrar las siguientes propiedades para todos $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a > 0$:

$$\text{i) } a^b a^c = a^{b+c}, \quad \text{ii) } (a^b)^c = a^{bc}.$$

Indicación: Comprobar primero estas propiedades para b, c racionales.

9. Expresar los siguientes números complejos en la forma $a + bi$:
- a) $\frac{1-i}{1+i}$; c) $\frac{(2-i)^2}{(3-i)^2}$; e) $\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3$;
b) $\frac{(3-i)(2+i)}{3+i}$; d) $((2-3i)^3 - i)^2$; f) $((2+i)(2-i))^2$.
10. Encontrar las partes reales e imaginarias de las siguientes expresiones, en función de $Re(z)$ e $Im(z)$:
- a) z^2 ; b) $\frac{1}{z^2}$; c) $\frac{z+1}{z-1}$.
11. Verificar que si $z, w \in \mathbb{C}$, entonces $|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2)$.
12. Calcular el módulo de los números complejos:
- a) $i(2+3i)(5-2i)(-2-i)^{-1}$; b) $\frac{(2-3i)^2}{(8+6i)^2}$.
13. a) Demostrar que para todos $\phi, \psi \in \mathbb{R}$,

$$(\cos \phi + i \operatorname{sen} \phi)(\cos \psi + i \operatorname{sen} \psi) = \cos(\phi + \psi) + i \operatorname{sen}(\phi + \psi).$$
b) Deducir (usando inducción) la fórmula de Moivre: $(\cos \phi + i \operatorname{sen} \phi)^n = \cos(n\phi) + i \operatorname{sen}(n\phi)$, $n \in \mathbb{N}$.
14. Hallar un polinomio con coeficientes reales que tenga a $z = 1 + \sqrt{-2}$ entre sus raíces.
15. Encontrar dos números complejos tales que su cuadrado sea $8 - 6i$.
16. Demostrar las desigualdades: $||z| - |w|| \leq |z - w| \leq |z| + |w|$.
17. Calcular el módulo y el argumento de los siguientes números complejos y expresarlos en forma polar:
- a) $-2 - 2i$; b) $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$; c) $\frac{2}{1-i\sqrt{3}}$; d) $(\sqrt{3} - i)^6$.
18. Sea $r > 0$ una constante. Demostrar que la ecuación de la circunferencia de radio r centrada en un punto ω es:

$$|z|^2 - 2\operatorname{Re}(z\bar{\omega}) + |\omega|^2 = r^2.$$
19. Expresar en la forma $a + bi$: $e^{\pi i}$, $e^{\frac{\pi}{2}i}$, $e^{\frac{\pi}{4}i}$, $e^{-\frac{\pi}{4}i}$.
20. Demostrar la identidad: $1 + z + z^2 + \cdots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$ cuando z es un número complejo, $z \neq 1$.
21. Demostrar que para todo n natural y para todo $x \in \mathbb{R}$, se tiene la desigualdad $|\operatorname{sen}(nx)| \leq n |\operatorname{sen}(x)|$.
Indicación: aplicar las fórmulas de Euler y una variante de la fórmula del ejercicio anterior.
22. Sea w una raíz n -ésima de la unidad (es decir: $w^n = 1$) distinta de 1. Comprobar que
a) $1 + w + w^2 + \cdots + w^{n-1} = 0$;
b) $1 + 2w + 3w^2 + \cdots + nw^{n-1} = \frac{n}{w-1}$.
23. a) Demostrar que z es real si y sólo si $z = \bar{z}$.
b) Sean a, b números complejos tales que $|b| = 1$. Demostrar que $\left|\frac{a-b}{1-b\bar{a}}\right| = 1$.
24. Describir el lugar geométrico de los puntos $z \in \mathbb{C}$ que satisfacen:
a) $Im(z+5) = 0$; b) $Re(z^2+5) = 0$.
25. Calcular los diferentes valores de: $\sqrt{1-i}$, $\sqrt[3]{-8}$, $\sqrt[3]{-i}$, $\sqrt[4]{16i}$ y $\sqrt{-9}$.
26. Calcular todas las raíces sextas de la unidad.
27. Para todo número z complejo, definimos $\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$; $\operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$. Demostrar las fórmulas:

$$\cos(z+w) = \cos z \cos w - \operatorname{sen} z \operatorname{sen} w;$$

$$\operatorname{sen}(z+w) = \operatorname{sen} z \cos w + \cos z \operatorname{sen} w.$$