

CONJUNTOS Y NÚMEROS. HOJA 4

PARA ENTREGAR ANTES DEL 15 DE NOVIEMBRE DE 2007

- 1) Sea $(A, \leq)$ un conjunto ordenado, $B \subset A$ un subconjunto. Para cada una de las afirmaciones siguientes demostrar que es cierta o dar un contraejemplo: i) Si A tiene un máximo, entonces A tiene un único elemento maximal; ii) Si A tiene un único elemento maximal, entonces A tiene un máximo; iii) Si B tiene un ínfimo en A , entonces B tiene un único elemento minimal y iv) Si B tiene un único elemento minimal, entonces B tiene un ínfimo en A .
- 2) Dada la relación de orden en $\mathbb{N}$, $n\mathcal{R}m \iff n \text{ divide a } m$, hallar los elementos maximales, minimales, máximos y mínimos (si existen) del conjunto $A = \{2, 3, 5, 6, 15, 10, 30\}$. ¿Es $\mathcal{R}$ una relación de orden total en A ?
- 3) Sea X un conjunto no vacío, $(\mathbb{N}, \leq)$ el conjunto ordenado de los números naturales y sea $f : X \longrightarrow \mathbb{N}$ una aplicación. Se define en X la siguiente relación: $x\mathcal{R}y \iff f(x) \leq f(y)$. Demostrar que:
 - a) La relación $\mathcal{R}$ no es en general una relación de orden.
 - b) La relación $\mathcal{R}$ es una relación de orden si y sólo si f es una aplicación inyectiva.
- 4) Diremos que una relación $\mathcal{R}$ en un conjunto A (que supondremos $\neq \emptyset$) es una *relación estricta* si satisface las dos propiedades siguientes:
 - i) No existen $x, y \in A$ tales que $x\mathcal{R}y$ e $y\mathcal{R}x$ (se podría llamar a esta propiedad “antisimétrica estricta”).
 - ii) Si $x\mathcal{R}y$ e $y\mathcal{R}z$, entonces $x\mathcal{R}z$ (propiedad transitiva).
 - a) Demostrar que una relación de orden no es una relación estricta, y que una relación estricta no es una relación de orden.
 - b) A pesar de la anterior, demostrar que dar una relación estricta en un conjunto A es equivalente a dar una relación de orden en A . (Sugerencia: ¿qué hay que añadir a una relación estricta para convertirla en una relación de orden?)
- 5) Sea $X = \{A \in P(\mathbb{Z}) : A \text{ es finito}\}$. Dado A finito, $Card(A)$, el *cardinal* de A , es el número de elementos de A .
 - a) Definimos en X la relación $A\mathcal{R}B \iff Card(A) \leq Card(B)$. Demostrar que $\mathcal{R}$ NO es una relación de orden.
 - b) Definimos ahora en X la relación $A\mathcal{R}'B \iff Card(A) < Card(B)$. Demostrar que $\mathcal{R}'$ es una relación de orden estricto.
 - c) Describe la relación de orden definida por $\mathcal{R}'$ de acuerdo con el procedimiento del apartado b) del problema anterior.

6) En $(\mathbb{R}; \leq)$ hallar el máximo, mínimo, supremo e ínfimo de los conjuntos siguientes:

$$\text{a) }]0, 1[\quad \text{b) } [0, 1[\quad \text{c) }]0, 1] \quad \text{d) } [0, 1] \quad \text{e) } \{2^{-n}\}_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{f) } \mathbb{Q} \cap [-\pi, \pi[$$

7) En el conjunto de funciones $C = \{f \mid f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]\}$ definimos la relación $f \mathcal{R} g \iff \sup(f) \leq \sup(g)$. Estudiar si es una relación de orden de algún tipo (parcial, total).

8) Dados $\alpha = (a, b, c)$ y $\alpha' = (a', b', c')$ en $\mathbb{N}^3$, se define:

$$\alpha \leq \alpha' \iff (a < a') \vee (a = a' \wedge b < b') \vee (a = a' \wedge b = b' \wedge c \leq c').$$

Discutir qué tipo de relación de orden es. Esta relación de orden se llama *orden lexicográfico*, por el modo en que ordenamos las palabras en el diccionario. Explicar por qué merece este nombre.

9) a) Generalizar la relación del ejercicio anterior para, dado k , ordenar k -uplas $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ de enteros positivos.

b) Generalizar el apartado anterior definiendo un *orden lexicográfico* en $A^k := \{(a_1, \dots, a_k) : a_i \in A\}$, donde $(A, \leq)$ es un conjunto ordenado cualquiera.

10) Sea $C = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4\} \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Dar una descripción explícita del conjunto C y ordenar sus elementos con el orden lexicográfico en $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Hallar sus elementos maximales y minimales. ¿Son máximo y mínimo? ¿Puede ser el conjunto C el grafo de alguna función de un subconjunto de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Z}$?

11) En $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ con el orden lexicográfico consideramos los subconjuntos siguientes: $A := [0, 1] \times [0, 1]$, $B := (0, 1) \times (0, 1)$, $C := [0, 1] \times (0, 1)$, $D := (0, 1) \times [0, 1]$. Para cada uno de ellos encontrar sus máximos y mínimos, elementos maximales y minimales, cotas, supremos e ínfimos (si existen).

12) Considérese el conjunto, S , de todas las sucesiones infinitas $\{a_1, a_2, \dots\}$ de números reales. Se dice que dos de esas sucesiones, $\alpha = \{a_1, a_2, \dots\}$ y $\alpha' = \{a'_1, a'_2, \dots\}$, satisfacen $\alpha \leq \alpha'$ si los términos de α llegan a ser en algún momento menores o iguales que los de α' . Es decir, si existe $K > 0$ tal que $a_j \leq a'_j$ para todo $j \geq K$. Decidir qué tipo de relación es, y en particular si es o no de orden.

13) Diremos que un conjunto ordenado $(A, \leq)$ está *bien ordenado* si cualquier subconjunto no vacío $X \subset A$ tiene un mínimo.

a) Estudiar si los conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{R}$ con sus ordenes naturales y $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ con el orden lexicográfico están bien ordenados.

b) ¿Es cierto que si $(A, \leq)$ es un conjunto bien ordenado, entonces cualquier subconjunto no vacío $X \subset A$ tiene un máximo?

- 14) Definimos en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ una relación $\mathcal{R}$: $(a, b)\mathcal{R}(c, d) \iff (a + b < c + d) \vee (a + b = c + d \wedge a \leq c)$.
- Demuestra que $\mathcal{R}$ es una relación de orden y además es un buen orden en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.
 - Halla los conjuntos de cotas superiores e inferiores, el supremo y el ínfimo, el máximo y el mínimo (todo en caso de que existan) para este orden del conjunto $A := \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid a^2 + b^2 \leq 16\}$.
- 15) Sean A, B unos subconjuntos de $\mathbb{R}$ tales que:
- el orden natural $\leq$ en $\mathbb{R}$ define un buen orden tanto en A como en B ;
 - $a < b$ para cualquier par de elementos $a \in A, b \in B$.
- Demostrar que la relación $\leq$ define un buen orden en $A \cup B$.
- 16) Sea L un subconjunto de $\mathbb{R}$ que está bien ordenado respecto del orden $\leq$ en $\mathbb{R}$. Demostrar que L es numerable. (*Recuerda:* Decimos que un conjunto es *numerable* cuando su cardinal es finito o cuando se puede poner en correspondencia biyectiva con los naturales).
- 17) Sean $(a_n)_{n \geq 1}$ y $(b_n)_{n \geq 1}$ dos sucesiones reales estrictamente crecientes. Demostrar que el conjunto $\{a_n + b_m : n, m \in \mathbb{N}\}$ está bien ordenado (respecto del orden natural $\leq$ en $\mathbb{R}$).
- 18) Sea $A = \{a, b, c\}$. Define una relación de orden total $\mathcal{R}$ en $P(A)$ tal que $\forall X, Y \in P(A), X \subset Y \implies X\mathcal{R}Y$.
- 19) Vamos a generalizar el ejercicio anterior. Sea $\mathcal{S}$ una relación de orden en un conjunto A . Demuestra que existe una relación de orden total $\mathcal{R}$ que extiende $\mathcal{S}$, lo que quiere decir que $a\mathcal{S}b \implies a\mathcal{R}b$, o equivalentemente, que viendo $\mathcal{S}$ y $\mathcal{R}$ como subconjuntos de $A \times A$ tenemos $\mathcal{S} \subset \mathcal{R}$. Para ello vemos el conjunto de las relaciones de orden, al que llamaremos $\mathcal{O}$, como un subconjunto de $P(A \times A)$, y lo ordenamos mediante $\subset$.
- Demuestra que toda relación de orden total es un elemento maximal de $\mathcal{O}$.
 - Recíprocamente, demuestra que todo elemento maximal de $\mathcal{O}$ es un orden total.
(*SUGERENCIA: intenta extender un orden como en el ejercicio 15. Ten de nuevo cuidado con la propiedad transitiva.*)
 - Demuestra que cualquier orden $\mathcal{S}$ en A se puede extender a un orden total.
(*SUGERENCIA: Aplica el Lema de Zorn al subconjunto de $\mathcal{O}$ formado por los órdenes que extienden $\mathcal{S}$.*)
- 20) Probar las siguientes afirmaciones:
- Si $(X; R), (Y; S)$ son equivalentes y R es un orden total, entonces S es también total.
 - Demostrar que si $(X; R)$ está bien ordenado, entonces cualquier otro conjunto ordenado $(Y; S)$ que sea del mismo tipo que $(X; R)$ estará también bien ordenado.
 - Demostrar que todo conjunto numerable admite un buen orden.