

1. Sea $\{P; e_1, e_2, e_3\}$ una referencia ortonormal del espacio afín euclídeo $(\mathbb{A}, E)$. Designemos por s la simetría respecto al eje $P + \langle (a, b, c) \rangle$ y por $\tilde{s}$ su endomorfismo asociado.
 - a. Demuestra que, para todo $v \in E$, $\tilde{s}(v) + v$ es un vector propio de valor propio 1 (o bien es el $\vec{0}$).
 - b. Deduce de **a** la matriz de $\tilde{s}$ en función de a, b, c .
 - c. Usa **b** para hallar las ecuaciones de la rotación de ángulo π respecto de la recta intersección de los planos $3x - 4y - 25 = 0$, $z = 2$.
2. En los siguientes casos calcula la distancia $d(P, L)$, un punto $Q \in L$ tal que $d(P, Q) = d(P, L)$ y una recta que pase por P y corte a L perpendicularmente:
 - a. $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $L = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid 2x_1 + x_2 + 1 = 0\}$ en el espacio euclídeo usual $\mathbb{R}^2$.
 - b. $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $L = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 = x_1 + x_3 = 0\}$ en el espacio euclídeo usual $\mathbb{R}^3$.
3. En los siguientes casos, calcula la distancia $d(L_1, L_2)$ y puntos $Q_i \in L_i$ ($i = 1, 2$) tales que $d(L_1, L_2) = d(Q_1, Q_2)$:
 - a. $L_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$, $L_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$ en el espacio euclídeo usual $\mathbb{R}^3$.
 - b. $L_1 = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$, $L_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$ en el espacio euclídeo usual $\mathbb{R}^4$. ¿Son únicos los puntos Q_1 y Q_2 en las condiciones anteriores?
4. Sea $\{P; e_1, e_2, e_3\}$ una referencia ortonormal del espacio afín euclídeo $(\mathbb{A}, E)$. Considera la simetría, σ , respecto al plano de ecuación $ax + by + cz + d = 0$ y $\tilde{\sigma}$ el endomorfismo de E asociado a σ .
 - a. Demuestra que, para todo $v \in E$, $\tilde{\sigma}(v) - v$ es ortogonal al plano de simetría.
 - b. Halla la matriz de $\tilde{\sigma}$ en función de a, b, c .
 - c. Halla las ecuaciones de la simetría respecto al plano $x + 2y - 3z + 2 = 0$.
5. En $\mathbb{R}^3$, considera el producto escalar cuya matriz en la base $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ es:

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Halla la distancia del punto $(-1, 1, -2)$ al plano que pasa por los puntos de coordenadas cartesianas $a = (1, -1, 1)$, $b = (-2, 1, 3)$ y $c = (4, -5, -2)$ en la referencia $\{O; \mathcal{B}\}$.

6. Determina el lugar geométrico de las imágenes del punto $(1, 1)$ por todos los giros de $\mathbb{R}^2$ de ángulo $\pi/2$ y centro sobre la recta $x + y = 1$.
7. Considera $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar usual y $\alpha \in \mathbb{R}$.
 - a. Calcula la ecuación de la recta ℓ_α que pasa por los puntos $P = (1, \alpha, -1)$ y $Q = (1, 2\alpha, -2)$.
 - b. Calcula el punto R_α simétrico del punto $M = (1, 0, -2)$ con respecto a la recta ℓ_α .
 - c. Demuestra que el lugar geométrico de los puntos R_α con $\alpha \in \mathbb{R}$, es la recta

$$(-1, 0, 2) + \langle (0, 1, 1) \rangle.$$

8. Encuentra la expresión analítica de las siguientes isometrías:
- La simetría deslizante de eje paralelo a la recta $2x + y = 3$ y que transforma $(2, 1)$ en $(1, 0)$.
 - El giro de ángulo $\pi/3$ que lleve $(2, 1)$ en $(1, 0)$.
9. Demuestra que la composición de tres simetrías en $\mathbb{R}^2$ de ejes concurrentes es otra simetría y determina su eje.
10. Encuentra la expresión analítica de las siguientes isometrías de $\mathbb{R}^3$:
- La simetría respecto al plano $3x - y + 2z = 1$.
 - La rotación helicoidal respecto al eje $\langle (1, -1, 0) \rangle$ con ángulo π y vector de traslación $(2, -2, 0)$.
 - La composición de las dos isometrías anteriores.
11. Estudia la composición de dos simetrías en $\mathbb{R}^2$ de ejes paralelos.
12. Demuestra que la composición de dos simetrías en un plano, cuyos ejes se cortan en un punto, es una rotación. Determina su centro y ángulo.
13. Estudia las siguientes isometrías (o movimientos) del plano $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} x' = -2 + \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y \\ y' = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y \end{cases} \quad \begin{cases} x' = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y \\ y' = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y \end{cases}$$

Estudia la isometría composición de las dos anteriores.

14. Estudia las siguientes isometrías de $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} x' = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y + \frac{1}{2}z \\ y' = -1 + \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}z \\ z' = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y + \frac{1}{2}z \end{cases} \quad \begin{cases} x' = 1 + y \\ y' = 1 - z \\ z' = -x \end{cases}$$

Estudia la composición de las dos isometrías anteriores.

15. Estudia (clasifica y calcula sus características geométricas) las isometrías del espacio afín euclídeo usual $\mathbb{R}^3$ dadas por $f(x) = A + Tx$ donde:

a. $T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $A = A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ó $A = A_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ (estudiar las dos).

b. $T = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ y $A = A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ó $A = A_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (estudiar las dos).

c. $T = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -6 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 6 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}$ y $A = A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ó $A = A_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ (estudiar las dos).

16. Determina las ecuaciones de las siguientes isometrías del espacio afín usual $\mathbb{R}^3$ en el referencial canónico:

a. La simetría respecto de la recta $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$.

b. La simetría deslizante respecto de la recta anterior (i.e. giro de 180 grados) con vector de deslizamiento $\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

c. La simetría respecto del plano $L = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + 2x_2 + x_3 = 2\}$.

d. La simetría deslizante respecto del plano anterior con vector de deslizamiento $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.