

1. Sea $(V, \langle, \rangle)$ un espacio vectorial euclídeo.

a. Demuestra que, para todo par de vectores $u, v \in V$, se verifica la *Ley del paralelogramo*:

$$2(\|u\|^2 + \|v\|^2) = \|u + v\|^2 + \|u - v\|^2.$$

b. Demuestra que, para todo par de vectores $u, v \in V$, se cumple la *Identidad de polarización*:

$$4 \langle u, v \rangle = \|u + v\|^2 - \|u - v\|^2.$$

c. Demuestra que, para todo par de vectores $u, v \in V$, se da la igualdad:

$$2 \langle u, v \rangle = \|u + v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2.$$

2. Sea $\{e_1, e_2, e_3\}$ una base de $\mathbb{R}^3$ y $\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ la forma bilineal simétrica dada por:

$$\varphi((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

a. Demuestra que φ es un producto escalar en $\mathbb{R}^3$.

b. Calcula una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ respecto de φ .

3. Sea E un $\mathbb{R}$ -espacio vectorial de dimensión finita. Sean $f_1, \dots, f_k \in \text{Hom}(E, \mathbb{R})$ formas lineales linealmente independientes. Supongamos dados números reales $\lambda_{i,j} \in \mathbb{R}$, $1 \leq i, j \leq k$. Para $u, v \in E$ definimos

$$\phi(u, v) = \sum_{1 \leq i, j \leq k} \lambda_{i,j} f_i(u) f_j(v).$$

Demuestra que ϕ es una forma bilineal simétrica si y sólo si $\lambda_{i,j} = \lambda_{j,i}$, para $1 \leq i, j \leq k$.

4. Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, considera en $\mathbb{R}^3$ la aplicación bilineal

$$\phi_\alpha((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

a. Calcula los valores de α para los que ϕ_α es un producto escalar.

b. Sea M_α el plano ortogonal a $(1, 1, 1)$ respecto de ϕ_α . Demuestra que $\{M_\alpha : \alpha \in \mathbb{R}\}$ es un haz de planos de eje la recta OX .

5. Para cada $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, considera la aplicación bilineal $\phi_{\alpha,\beta}$ dada por:

$$\phi_{\alpha,\beta}((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} \beta & \alpha & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

a. Dibuja el subconjunto de $\mathbb{R}^2$ dado por $\{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 : \phi_{\alpha,\beta} \text{ es un producto escalar}\}$.

b. Determina los valores de α y β para que el plano de ecuación $x + y + z = 0$ sea ortogonal al vector $(1, 0, 1)$ respecto al producto escalar $\phi_{\alpha,\beta}$.

6. Demuestra que la forma bilineal $\varphi : \mathbf{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R}) \times \mathbf{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $\varphi(A, B) = \text{tr}(AB^t)$ es un producto escalar.

7. Sea $V = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] : \text{grado}(p(x)) \leq 3\}$. En $V \times V$ se considera la aplicación:

$$\phi(p(x), q(x)) = \int_{-1}^1 p(t)q(t)dt.$$

a. Demuestra que ϕ es un producto escalar.

b. Calcula la base obtenida después de aplicar el proceso de Gram-Schmidt a la base $\{1, x, x^2, x^3\}$.

8. Considera la base de $\mathbb{R}^3$ dada por: $u = (-2, -1, 1)$, $u_2 = (0, -1, 0)$ y $u_3 = (1, -1, 0)$, respecto de la base $B = \{e_1, e_2, e_3\}$. Definimos un producto escalar en $\mathbb{R}^3$ afirmando que $\{u_1, u_2, u_3\}$ es una base ortonormal. Encuentra la expresión analítica de este producto escalar en la base B .

9. Sea $\varphi((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1y_1 + (x_1 + x_2)(y_1 + y_2) + (x_1 + x_2 + x_3)(y_1 + y_2 + y_3)$ un producto escalar en $\mathbb{R}^3$. Da una base ortogonal de los subespacios $W_i \subset \mathbb{R}^3$ para
- $$W_1 = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 = x_2 = x_3\} \quad \text{y} \quad W_2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0\}.$$
10. Considera en $\mathbb{R}^n$ el producto escalar habitual. Encuentra las ecuaciones implícitas del complemento ortogonal del subespacio $W = \langle \{(1, 0, 1), (2, -1, 1)\} \rangle \subset \mathbb{R}^3$ (resp. $W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, 2x_1 - x_2 = 0\} \subset \mathbb{R}^4$).
11. Encuentra la aplicación adjunta de:

- La aplicación $h : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $h(x, y, z) = (x + y + z, x + 2y + 2z, x + 2y + 3z)$, con el producto escalar usual de $\mathbb{R}^3$.
- La aplicación $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = (-y + z, -x + 2z, x + 2y)$, con el producto escalar $\varphi((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1y_1 + (x_1 + x_2)(y_1 + y_2) + (x_1 + x_2 + x_3)(y_1 + y_2 + y_3)$.
- La aplicación $g : \mathbb{R}[x]_2 \longrightarrow \mathbb{R}[x]_2$, dada por $g(p(x)) = xp'(x) - (xp(x))'$, con el producto escalar dado en el ejercicio 7.
- La aplicación $T : \mathbf{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbf{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$, dada por $T(A) = A^t + A$, con el producto escalar $\langle A, B \rangle = \text{tr}(AB^t)$.

12. Sea f una aplicación lineal de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ cuya matriz en una base B es: $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & 1 - \alpha \end{pmatrix}$.

Demuestra que f es la proyección ortogonal sobre la recta $ax + by = 0$, donde:

$$\alpha = b^2/(a^2 + b^2) \text{ y } \beta = -ab/(a^2 + b^2)$$

13. En $\mathbb{R}^3$ se considera el producto escalar con matriz en una base $B = \{e_1, e_2, e_3\}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

- Calcula una base ortonormal $\{u_1, u_2, u_3\}$.
 - Calcula la proyección del vector de coordenadas $(1, 1, 1)$ en la base B sobre el plano $y + z = 0$.
 - Calcula el subespacio ortogonal al vector de coordenadas $(2, 0, 1)$ en la base $\{u_1, u_2, u_3\}$.
14. Encuentra las ecuaciones de la simetría ortogonal con respecto al plano $2x + y + z = 0$ (con el producto escalar usual).
15. Sea T una aplicación lineal de un espacio euclídeo E en sí mismo. Sea T' la adjunta de T . Demuestra que la aplicación $T + T'$ es autoadjunta.
16. Sean $(E, \langle, \rangle)$ un espacio vectorial euclídeo y f un endomorfismo de E tal que $\|f(x)\| \leq \|x\|$ para todo $x \in E$. Sea g la adjunta de f .
- Demuestra que $\|g(x)\| \leq \|x\|$, para todo $x \in E$.
 - Demuestra que $\text{Ker}(g - \text{id}_E) = \text{Ker}(f - \text{id}_E)$, donde id_E denota la aplicación identidad de E .
 - Demuestra que $E = \text{Ker}(f - \text{id}_E) + \text{Im}(f - \text{id}_E)$.
17. Sean $(E, \langle, \rangle)$ un espacio vectorial euclídeo y f un endomorfismo de E tal que $\langle f(u), v \rangle = -\langle u, f(v) \rangle$, para todo par de vectores $u, v \in E$.
- Demuestra que $\text{Ker}(f)$ e $\text{Im}(f)$ son subespacios ortogonales de E .
 - Demuestra que $E = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f)$.
 - Demuestra que, si (a_{ij}) es la matriz de f en una base ortonormal, entonces $a_{ij} = -a_{ji}$ para todo i, j .