

1. Calcula la dimensión del subespacio afín de $\mathbb{A}^5$ generado por los puntos:

$$\begin{aligned} P_1 &= (-1, 2, -1, 0, 4), & P_2 &= (0, -1, 3, 5, 1), \\ P_3 &= (4, -2, 0, 0, -3), & P_4 &= (3, -1, 2, 5, 2). \end{aligned}$$

2. Considera la familia de planos $2\lambda x + (\lambda + 1)y - 3(\lambda - 1)z + 2\lambda - 4 = 0$ en $\mathbb{A}^3$.

- a) Demuestra que estos planos tienen una recta en común.
- b) Determina los planos de esta familia que pasan por el punto $(1, -1, 2)$.
- c) Determina los planos de esta familia que son paralelos a la recta:

$$L = \{x + 3z - 1 = 0, y - 5z + 2 = 0\}.$$

3. Sea λ un número real. Considera los puntos de $\mathbb{A}^3$: $A = (\lambda, 0, 0)$, $B = (1, 2, 1)$, $C = (1, 0, -1)$ y $D = (2, 2, \lambda)$, y los conjuntos:

$$S_1 = \{A, B\}, \quad S_2 = \{A, B, C\}, \quad S_3 = \{A, B, D\}.$$

- a) Halla las ecuaciones implícitas de los subespacios afines engendrados por S_1 , S_2 y S_3 .
 - b) Calcula las dimensiones de los subespacios anteriores en función de λ , y estudia las posiciones relativas entre ellos.
4. Sea M la variedad lineal de $\mathbb{A}^4$ engendrada por los puntos: $P_0 = (1, 0, 0, 0)$, $P_1 = (2, 1, 0, 0)$, $P_2 = (3, 1, 0, 0)$, $P_3 = (4, 2, 0, 0)$. Sea L la variedad lineal de ecuaciones paramétricas $x_1 = 2\lambda + 5$, $x_2 = \lambda + 1$, $x_3 = \lambda + 1$, $x_4 = \lambda + 1$. Halla las ecuaciones implícitas de $L + M$ y de $L \cap M$ y comprueba que se verifica la fórmula de Grassmann.
5. Estudia la dependencia afín de los puntos de $\mathbb{A}^3$: $A_1 = (1, 0, 1)$, $A_2 = (4, 3, -2)$, $A_3 = (2, 1, 0)$. Halla las ecuaciones vectoriales, paramétricas, implícitas del subespacio afín que engendran.
6. En $\mathbb{A}^4$ se considera los puntos de coordenadas $Q_0 = (1, 0, 3, 1)$, $Q_1 = (1, 1, 3, 0)$, $Q_2 = (0, 1, 1, 0)$. Sea N el subespacio afín de $\mathbb{A}^4$ que engendran.
- a) Estudia la dependencia afín de Q_0 , Q_1 y Q_2 . Halla la dimensión de N .
 - b) Halla las ecuaciones paramétricas e implícitas de N .
7. Sea $\mathbb{A}^4(\mathbb{K})$ un espacio afín de dimensión 4 sobre el cuerpo $\mathbb{K}$. Sea $\mathcal{R}_0$ un sistema de referencia cartesiano en $\mathbb{A}^4(\mathbb{K})$. Considera los hiperplanos de ecuaciones (respecto de $\mathcal{R}_0$)
- $$\pi_1 : 1 + x + y + z + t = 0, \quad \pi_2 : 2 + x - y + z - t = 0, \quad \text{y el punto } P = (1, 1, 1, -4).$$
- a) Verifica que $P \in \pi_1$, y halla un sistema de referencia afín, $\mathcal{R}$, de π_1 que no tenga ninguno de sus puntos en el hiperplano π_2 .
 - b) Fijado el sistema de referencia $\mathcal{R}$ del apartado anterior, halla las ecuaciones de la variedad lineal de dimensión 2 que pasa por P , está contenida en π_1 , y es paralela a $\pi_1 \cap \pi_2$.

8. Considera los puntos de $\mathbb{A}^3$: $P_0 = (0, 0, 1)$, $P_1 = (0, 1, 0)$, $P_2 = (0, 0, 0)$, $P_3 = (1, 0, 0)$, $Q_0 = (2, 1, 1)$, $Q_1 = (1, 0, 1)$, $Q_2 = (1, 1, 0)$, $Q_3 = (0, 0, -1)$.

- Demuestra que $\mathcal{R} = \{P_0, P_1, P_2, P_3\}$ y $\mathcal{R}_0 = \{Q_0, Q_1, Q_2, Q_3\}$ son referencias afines de $\mathbb{A}^3$.
- Halla las ecuaciones del cambio de coordenadas cartesianas de la referencia $\mathcal{R}$ a la referencia $\mathcal{R}_0$.
- Halla las ecuaciones del cambio de coordenadas baricéntricas de la referencia $\mathcal{R}$ a la referencia $\mathcal{R}_0$.

9. Considera los siguientes puntos de $\mathbb{A}^4$: $A = (1, -2, 3, 1)$, $B = (0, 0, 1, 5)$, $C = (3, -1, 5, 0)$. Halla la ecuación del haz de hiperplanos que tiene como base el plano $A + B + C$.

10. En el espacio afín real $\mathbb{A}^3$ se consideran las rectas:

$$L_1 = \{x + y + z = 0, x + 2y = 0\}, \quad L_2 = \{2x + 2y + z = 3, x + y = 2\}$$

$$L_3 = \{3x + 2y + 2z = 2, 2x + y + z = 0\}.$$

Demuestra que se cruzan dos a dos y que existe un plano π paralelo a las tres rectas.

11. Sea (X, E, φ) un espacio afín, donde E es un espacio vectorial de dimensión finita sobre un cuerpo ordenado $\mathbb{K}$. Un subconjunto $Y \subset X$ se dice convexo si para todo par de puntos $P, Q \in Y$ el segmento de extremos P y Q está contenido en Y . Demuestra que todo subespacio afín es convexo.

12. Considera el plano afín $\mathbb{A}^2(\mathbb{F}_3)$ sobre el cuerpo $\mathbb{F}_3$.

- Calcula cuántos puntos y rectas hay en $\mathbb{A}^2(\mathbb{F}_3)$. Calcula el cardinal de una recta.
- Calcula el número de rectas paralelas a una dada, y el número de haces de rectas paralelas que hay en $\mathbb{A}^2(\mathbb{F}_3)$.

13. En el plano afín $\mathbb{A}^2$ se considera el triángulo ABC y con relación a él los sistemas de referencia: $\mathcal{R} = \{A; AB, AC\}$, y $\mathcal{R}_0 = \{B; BA, BC\}$.

- Halla las ecuaciones que permiten pasar de $\mathcal{R}$ a $\mathcal{R}_0$.
- Determina el conjunto de puntos del plano que tienen las mismas coordenadas respecto a los dos sistemas de referencia.

14. Para cada $i = 1, 2, 3$, tómesese la recta $L_i \subset \mathbb{A}^2$ de ecuación $a_i x + b_i y + c_i = 0$, con $(a_i, b_i) \neq (0, 0)$. Compruébese que la relación:

$$(\dagger) \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

es una condición necesaria para que las tres rectas sean concurrentes (es decir, se corten las tres en el mismo punto).

Dése un ejemplo de tres rectas no concurrentes que verifiquen $(\dagger)$.

Supongamos que se da la condición $(\dagger)$. ¿Qué condiciones geométricas y algebraicas han de verificarse para que las tres rectas sean concurrentes?

15. Sea E un $\mathbb{K}$ -espacio vectorial, y (X, E, φ) un espacio afín sobre $\mathbb{K}$. Dados tres puntos alineados A_1, A_2, A_3 de X , se llama *razón simple* de A_1, A_2, A_3 , y se escribe $(A_1 A_2 A_3)$, al escalar $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que

$$A_1 A_3 = \lambda A_1 A_2.$$

La razón simple está definida siempre que $A_1 \neq A_2$, es 0 si $A_1 = A_3$, y es 1 si $A_2 = A_3$.

- Si $A_2 \neq A_3$ y (α, β) son las coordenadas baricéntricas de A_1 en el sistema de referencia $\{A_2, A_3\}$, demuestra que $(A_1 A_2 A_3) = -\alpha/\beta$.
 - Supongamos que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Demuestra que el punto A_1 está en el segmento que une A_2 con A_3 , si y sólo si $(A_1 A_2 A_3) < 0$.
 - Sean P_0, P_1, P_2 tres puntos distintos de $\mathbb{C}$. Da una condición necesaria y suficiente en función de su razón simple para que formen un triángulo equilátero.
16. Considera los puntos de $\mathbb{A}^3$: $P_0 = (0, 0, 1)$, $P_1 = (0, 1, 0)$, $P_2 = (0, 0, 0)$, $P_3 = (1, 0, 0)$, $Q_0 = (1, 1, 1)$, $Q_1 = (3, 1, 1)$, $Q_2 = (2, 2, 2)$, $Q_3 = (1, 0, 5)$.
- Demuestra que $\mathcal{R}_c = \{P_0; P_0 P_1, P_0 P_2, P_0 P_3\}$ y $\mathcal{R}'_c = \{Q_0; Q_0 Q_1, Q_0 Q_2, Q_0 Q_3\}$ son referencias cartesianas de $\mathbb{A}^3$, y que $\mathcal{R} = \{P_0, P_1, P_2, P_3\}$ y $\mathcal{R}' = \{Q_0, Q_1, Q_2, Q_3\}$ son referencias afines.
 - Halla las ecuaciones del cambio que transforma coordenadas cartesianas en la referencia $\mathcal{R}_c$ en coordenadas cartesianas en la referencia $\mathcal{R}'_c$.
 - Halla las ecuaciones del cambio que transforma coordenadas baricéntricas en la referencia $\mathcal{R}$ en coordenadas baricéntricas en la referencia $\mathcal{R}'$.
17. Sean L_1, L_2, L_3 rectas en el espacio afín $\mathbb{A}^3$ con direcciones F_1, F_2, F_3 respectivamente tales que $F_1 + F_2 + F_3 = \mathbb{R}^3$. Demuestra que:
- Existe una única recta L en $\mathbb{A}^3$ paralela a L_1 que corta a L_2 y a L_3 .
 - Existe un único plano π paralelo a L_3 que contiene a L_2 .
 - Para todo punto $p \in \mathbb{A}^3$ existe una única recta L_0 que pasa por p , es paralela al plano π , y corta a L_1 .
 - Calcula los L, π y L_0 de los apartados anteriores cuando

$$L_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle, L_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle, L_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle, \text{ y } p = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

18. Encuentra las ecuaciones cartesianas de $L_1 + L_2$ y paramétricas de $L_1 \cap L_2$ siendo L_1, L_2 las variedades lineales en el espacio afín $\mathbb{A}^4$ dadas por

$$L_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad L_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$