

Instrucciones. Los problemas marcados **A** y **B** serán resueltos por los profesores en las clases de problemas de los días 14, 15 y 16 de Abril de 2008. Después, en la misma clase, deberás hacer y entregar los marcados con la fecha correspondiente y que sea de la misma paridad que la penúltima cifra de tu DNI.

Definición. Dada una lista de vectores $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$, su **matriz de Gram** es la tabla de multiplicar escalarmente esos vectores: $G = (\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j)_{k \times k}$. Es siempre simétrica, y es definida positiva si y sólo si la lista de vectores es linealmente independiente.

A. Consideramos $\mathbb{R}^4$ con el producto escalar usual. Sea $\mathbb{V} \subset \mathbb{R}^4$ el plano vectorial con base

$$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\} = \{(1, -1, 1, -5), (1, 0, 0, -3)\}.$$

Sea el vector $\mathbf{v} = (1, 4, 0, 1)$ y $\mathbf{v}_0$ su proyección ortogonal sobre $\mathbb{V}$.

- Calcula $\mathbf{v}_0$ mediante la matriz de Gram de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$.
- Comprueba que $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\} = \{(0, 1, -1, 2), (1, 1, -1, -1)\}$ es también base de $\mathbb{V}$, y calcula los vectores:

$$\mathbf{v}'_0 = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1} \mathbf{v}_1 + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_2}{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2} \mathbf{v}_2 \quad \text{y} \quad \mathbf{v}''_0 = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}_1}{\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_1} \mathbf{w}_1 + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}_2}{\mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{w}_2} \mathbf{w}_2.$$

B. Halla la expresión analítica de las aplicaciones lineales $f, g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, siendo f la proyección ortogonal sobre el plano $\{x + 3y - 2z = 0\}$ y g la reflexión ortogonal sobre ese mismo plano.

Lunes impar. Haz lo mismo que en el ejercicio **A** para

$$\mathbf{v} = (2, 6, -7, 3), \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\} = \{(1, 1, 3, 3), (2, 0, 5, 3)\} \text{ y } \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\} = \{(0, 2, 1, 3), (1, -1, 2, 0)\}.$$

¿Coincide $\mathbf{v}'_0$ con $\mathbf{v}'$? ¿Coincide $\mathbf{v}''_0$ con $\mathbf{v}_0$? Explica el fenómeno.

Haz lo mismo que en el ejercicio **B** para el plano $\{2x + y - z = 0\}$.

Lunes par. Haz lo mismo que en el ejercicio **A** para

$$\mathbf{v} = (4, 1, 2, 1), \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\} = \{(1, 0, 1, 1), (2, 1, 2, 0)\} \text{ y } \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\} = \{(0, 1, 0, -2), (5, 2, 5, 1)\}.$$

¿Coincide $\mathbf{v}'_0$ con $\mathbf{v}'$? ¿Coincide $\mathbf{v}''_0$ con $\mathbf{v}_0$? Explica el fenómeno.

Haz lo mismo que en el ejercicio **B** para el plano $\{x + y - 3z = 0\}$.

Martes impar. Haz lo mismo que en el ejercicio **A** para

$$\mathbf{v} = (3, 2, 0, 2), \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\} = \{(1, 1, 1, 0), (0, 1, 1, -1)\} \text{ y } \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\} = \{(1, 0, 0, 1), (1, 2, 2, -1)\}.$$

¿Coincide $\mathbf{v}'_0$ con $\mathbf{v}'$? ¿Coincide $\mathbf{v}''_0$ con $\mathbf{v}_0$? Explica el fenómeno.

Haz lo mismo que en el ejercicio **B** para el plano $\{x - y + z = 0\}$.

Martes par. Haz lo mismo que en el ejercicio **A** para

$$\mathbf{v} = (3, 2, 2, 1), \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\} = \{(0, 1, 1, 1), (1, 2, 1, 1)\} \text{ y } \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\} = \{(1, 1, 0, 0), (-1, 1, 2, 2)\}.$$

¿Coincide $\mathbf{v}'_0$ con $\mathbf{v}'$? ¿Coincide $\mathbf{v}''_0$ con $\mathbf{v}_0$? Explica el fenómeno.

Haz lo mismo que en el ejercicio **B** para el plano $\{2x + 2y + z = 0\}$.

Miércoles impar. Haz lo mismo que en el ejercicio **A** para

$$\mathbf{v} = (2, 3, 2, 0), \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\} = \{(1, 1, 1, -1), (1, 2, 0, 0)\} \text{ y } \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\} = \{(0, -1, 1, -1), (3, 4, 2, -2)\}.$$

¿Coincide $\mathbf{v}'_0$ con $\mathbf{v}'$? ¿Coincide $\mathbf{v}''_0$ con $\mathbf{v}_0$? Explica el fenómeno.

Haz lo mismo que en el ejercicio **B** para el plano $\{x + y + z = 0\}$.

Miércoles par. Haz lo mismo que en el ejercicio **A** para

$$\mathbf{v} = (2, -2, 1, 1), \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\} = \{(1, 3, 0, -2), (0, -1, 0, 1)\} \text{ y } \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\} = \{(1, 0, 0, 1), (1, 2, 0, -1)\}.$$

¿Coincide $\mathbf{v}'_0$ con $\mathbf{v}'$? ¿Coincide $\mathbf{v}''_0$ con $\mathbf{v}_0$? Explica el fenómeno.

Haz lo mismo que en el ejercicio **B** para el plano $\{-x + 4y + z = 0\}$.