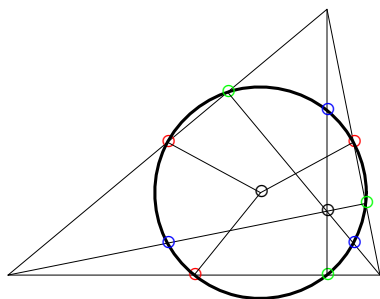


1. Demostrar que por tres puntos no alineados pasa una única circunferencia. Construir la para los puntos $(3, 0)$, $(5, 0)$ y $(5, 4)$.

2. (La circunferencia de Feuerbach). **Tómense los tres puntos medios de los lados de un triángulo, y considérese la circunferencia que pasa por ellos (que es única como hemos probado en el ejercicio 1).**



Para el mismo triángulo considerar ahora los tres puntos de corte de las alturas con sus lados opuestos, llamados *pies*, y trazar la circunferencia que pasa por ellos.

Por último marcar los 3 puntos medios entre el *ortocentro* (punto de encuentro de las alturas) y el vértice del que parte cada altura; y considerar la circunferencia que pasa por ellos.

Fig. 1.— Circunferencia por 9 puntos En los tres casos estamos ante la misma circunferencia, de manera que, a partir de un triángulo, hemos encontrado nueve puntos en una misma circunferencia. Esta es conocida como “circunferencia de Feuerbach” o “circunferencia de los nueve puntos”.

Verificar lo anterior para el triángulo de vértices $(0, 0)$, $(6, 5)$, $(7, 0)$.¹

3. Tomando un triángulo equilátero constrúyase “su” circunferencia de Feuerbach. ¿Qué ocurre con los puntos medios de los lados y los pies? (cf. Fig. 3).

4. Partiendo de un triángulo ABC podemos construir dos triángulos íntimamente relacionados con él, y con su circunferencia de Feuerbach. El primero de ellos es el de vértices los pies de las alturas, y se dice su *triángulo órtico*. De otra parte tenemos a su *triángulo complementario*, cuyos vértices son los puntos medios de los lados (o pies de las mediatrices). Demostrar que:

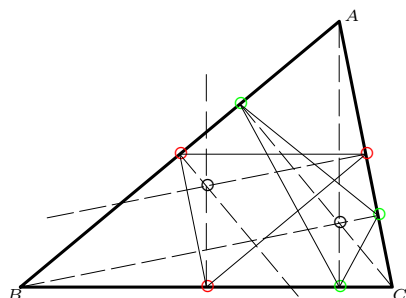


Fig. 2. — Triáng. órtico y complementario

- el ortocentro de ABC es el incentro (o confluencia de bisectrices) de su triángulo órtico;
- el circuncentro de ABC (encuentro de las mediatrices) es el ortocentro de su triángulo complementario.

5. Se denomina *segmento de Euler* de un triángulo al determinado por el ortocentro y el circuncentro. Ocurre (demostrar) que el baricentro (punto en el que confluyen las tres medianas), pertenece al segmento de Euler, dividiéndolo en $\frac{1}{3}$ y $\frac{2}{3}$ del mismo. Además, el punto medio del segmento de Euler es el centro de su circunferencia de Feuerbach, también conocida, bajo esta óptica, como *circunferencia de Euler*. Deducir este último resultado.

¹ Compruébese que: Ortocentro: $(6, 1.2)$; Pies: $(252/61, 210/61)$, $(175/26, 35/26)$, $(6, 0)$; Puntos medios ortocentro-vértice: $(6, 3.1)$, $(3, 0.6)$, $(6.5, 0.6)$; Centro de la circunferencia: $(4.75, 1.55)$; Radio: $\sqrt{3.965}$

6. Dada una circunferencia encontrar un triángulo del que sea su “circunferencia de Euler”.

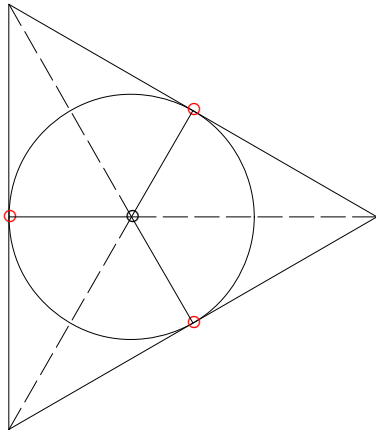


Fig. 3

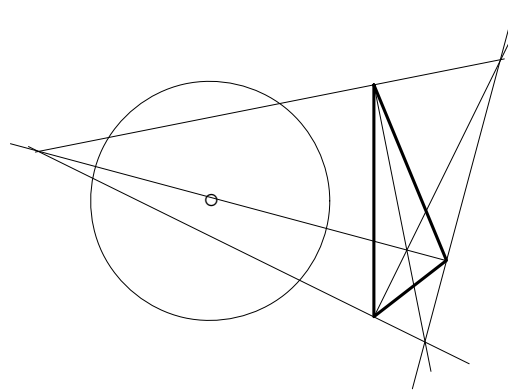


Fig. 4. — Partiendo del órtico

7. Demostrar el siguiente resultado atribuido a Thales de Mileto (640-560 a.C.):

TEOREMA. — *Todo ángulo inscrito en una semicircunferencia es recto.*

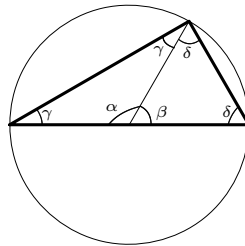


Fig. 5. — Un teorema de Thales