Conjuntos y Números — **1^o de Matemáticas**

CURSO 2007-2008 — 8 DE FEBRERO DE 2008

EXAMEN FINAL

APELLIDOS Y NOMBRE ______________________________

D.N.I. ____________ GRUPO ____________ FIRMA ____________________

1. Hay, al menos, tres pruebas distintas de que $\forall n \in \mathbb{N}, n^3 + 5n$ es múltiplo de 6.

a) Usar inducción.

b) Usar aritmética modular.

c) Expresar $n^3 + 5n$ en términos de coeficientes binómicos (números combinatorios).

Se pide escribir con todos los detalles, al menos, dos de las tres demostraciones mencionadas.

2. a) Calcular las raíces racionales del polinomio $P(X) = 2X^3 + X^2 + X + 2$.

b) Escribir P como producto de factores irreducibles primero en $\mathbb{Q}[X]$ y luego en $\mathbb{R}[X]$ y en $\mathbb{C}[X]$.

c) Dibujar una gráfica aproximada de la función polinómica $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ determinada por P y explicar con algún detalle como la gráfica y la factorización real son compatibles.

d) Discutir, razonadamente, si f es **inyectiva** o **sobreyectiva**.

3. a) Encontrar todos los números complejos z que satisfacen la ecuación:

$$z^{10} = i\, \overline{z}^{10}. \tag{1}$$

b) Si llamamos S al conjunto de los números complejos que satisfacen la ecuación (1) del punto anterior y definimos

$$S_0 = \{z \in S \ : \ |z| = 1\} \text{ y } S_1 = \{z \in S_0 \ : \ \mathrm{Re}(z) > 0\},$$

determinar razonadamente los cardinales de S, S_0 y S_1.

4. En el conjunto $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x > 0,\ y > 0\}$ se define la siguiente relación binaria:

$$(x, y)\mathcal{R}(x', y') \Leftrightarrow (x \cdot y < x' \cdot y') \vee ((x \cdot y = x' \cdot y') \wedge (x \leq x')).$$

a) Demostrar que $\mathcal{R}$ es una relación de orden.

b) ¿Es $\mathcal{R}$ un orden total?

c) Sea $S = \{(x, y) \in X \ : \ x + y = 1\}$. Determinar, si existen, el máximo, mínimo, elementos maximales y minimales, cotas superiores e inferiores, supremo e ínfimo de S.