

## Hoja 5

## Derivadas de orden superior. Fórmula de Taylor. Máximos y mínimos

1.- Definamos la función

$$f(x, y) = \begin{cases} y \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Calcular, cuando existan, las siguientes derivadas parciales:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0).$$

2.- Sea

$$f(x, y) = xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \quad \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \quad f(0, 0) = 0.$$

Comprobar que  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = -1$  y  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = 1$ . ¿Qué se puede decir acerca de la continuidad de las derivadas de orden segundo  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$  y  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$  en el origen?

3.- El cambio de variable  $x = u + v$ ,  $y = u - v$  transforma  $f(x, y)$  en  $g(u, v)$ . Calcular el valor de  $\frac{\partial^2 g}{\partial v \partial u}$  en el punto en el que  $u = 1$ ,  $v = 1$ , sabiendo que

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1$$

en dicho punto.

4.- Hallar el polinomio de Taylor de orden 2 centrado en  $(0, 0)$  de las siguientes funciones:

$$(a) \quad f(x, y) = x e^{x+y}. \quad (b) \quad f(x, y) = \sin xy + \cos xy. \quad (c) \quad f(x, y) = e^{x^2+y^2}.$$

5.- Hallar los posibles puntos de máximo, mínimo y de silla de las siguientes funciones:

$$(a) \quad f(x, y) = (x + y)^2. \quad (b) \quad f(x, y) = xy e^{x-y}. \\ (c) \quad f(x, y) = \log(2 + \sin xy). \quad (d) \quad f(x, y) = x \log(x^2 + y^2).$$

6.- Hallar los puntos críticos y determinar cuáles son máximos locales, mínimos locales o puntos silla:

$$(a) \quad f(x, y) = x^2 + y^2 - 2xy. \quad (b) \quad f(x, y) = x^2 + y^2 + xy - 2x - 4y + 10. \\ (c) \quad f(x, y) = xy. \quad (d) \quad f(x, y) = 3x^2 - 4y^2 + xy.$$

7.- Considérense el polinomio  $f(x, y) = (y - 3x^2)(y - x^2)$  y la función  $g(t) = f(t, ct)$  de  $t \in \mathbb{R}$ . Demuéstrese que  $(0, 0)$  es un punto crítico degenerado para  $f$  y que aunque  $g$  tiene un mínimo en  $t = 0$ , el punto  $(0, 0)$  no es un mínimo local de  $f$ .

8.- Demostrar que las medias aritmética y geométrica de tres números no negativos  $x$ ,  $y$  y  $z$  satisfacen la desigualdad

$$\frac{x + y + z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz}$$

y que la igualdad se cumple si y sólo si  $x = y = z$ .

9.- Escribir un número dado  $a > 0$  como producto de cuatro factores positivos, cuya suma sea mínima.

10.- Calcular la distancia mínima entre los puntos de la gráfica de  $f(x, y) = \frac{1}{4xy}$  y el punto  $(0, 0, 0)$ .

11.- Encontrar los valores máximo y mínimo (absolutos) de  $f(x, y) = x^3 + 3xy$ , en la región

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, x \leq y\}.$$

12.- Hallar los extremos de las siguientes funciones con las correspondientes restricciones:

$$(a) f(x, y) = x^2 + y^2, 2x^2 + y^2 \leq 4, \quad (b) f(x, y) = x^2 - 3xy + y^2, x^2 + y^2 \leq 2.$$

13.- Queremos construir una caja de carton con volumen fijo  $V_0$ . Hallar las dimensiones que minimizan la cantidad de cartón utilizada. ¿Que tipo de caja obtenemos?

14.- Hallar las dimensiones de una caja de cartón que tenga superficie fija  $S_0$  y que tenga volumen máximo.

15.- Se quiere construir una lata metálica con forma cilíndrica con una capacidad de 1 litro. ¿Cuales son las dimensiones que minimizan la cantidad de metal empleada?

16.- Se quiere construir una lata metálica con forma cilíndrica, sin la tapa superior y con una capacidad de 1 litro. ¿Cuales son las dimensiones que minimizan la cantidad de metal empleada?

17.- Se dispone de 12 decímetros cuadrados de metal para fabricar una lata cilíndrica con las dos tapas. ¿Qué dimensiones maximizan el volumen de dicha lata?